Wintersemester 2019/2020 23.10.2019

2. Übungblatt zur Analysis 1

Aufgabe 2.1 **(2+1 Punkte)**

Es sei K ein Körper. Zeigen Sie unter Verwendung der Körperaxiome und Beispiel 2.2:

(a) Seien $a, b \in K$ mit $a \cdot b = 0$. Dann gilt $a = 0$ oder $b = 0$.

(b) Aus $x \cdot x = 1$ für ein $x \in K$ folgt stets $x = 1$ oder $x = -1$.

Aufgabe 2.2 **(3+4 Punkte)**

(a) Beweisen Sie

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}, \quad k, n \in \mathbb{N}_0$$

(b) Zeigen Sie

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 3$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.3 **(2 Punkte)**

Es sei K ein angeordneter Körper und $x, y \in K_+$. Zeigen Sie

$$\min\left\{\frac{x^2}{y}, y\right\} \leq x.$$

Aufgabe 2.4 **(3+2 Punkte)**

Es sei K ein angeordneter Körper und $a, b \in K$. Beweisen Sie

(a) Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist $a < b$, so gilt $na < nb$ und im Falle $a > 0$ auch $0 < a^n < b^n$.

(b) Ist $a > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$, so ist $na < ma$.

Aufgabe 2.5 **(1+2 Punkte)**

Bestimmen Sie, soweit vorhanden, Infimum, Supremum, Minimum und Maximum folgender Teilmengen von $\mathbb{Q}$:

(a)

$$A := \left\{x \in \mathbb{Q} : \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = n^2\right\},$$

(b)

$$B := \left\{x \in \mathbb{Q} : \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{1}{n} + 1 + (-1)^n\right\}.$$

Abgabe bis **Mittwoch, den 30.10.2019, 10:00 Uhr** in die dafür vorgesehenen Briefkästen vor der Teilbibliothek Physik oder im Raum S0.105 im Bibliotheks- und Seminarzentrum.

Das Übungsblatt soll möglichst in Zweiergruppen bearbeitet werden. Bitte schreiben Sie Ihre Namen und die Nummer der Übungsgruppe, in welcher das Blatt zurückgegeben werden soll, deutlich sichtbar auf Ihre Bearbeitung. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie diese bitte zusammen.