Wintersemester 2019/2020 16.10.2019

1. Übungblatt zur Analysis 1

Aufgabe 1.1 **(4+3 Punkte)**

Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $0! := 1$ und $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ sei

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(a) Beweisen Sie

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

für alle $1 \leq k \leq n-1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie mithilfe von (a), dass

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 1.2 **(1+1+1 Punkte)**

Beweisen Sie für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen:

(a)

$$\mathrm{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2};$$

(b)

$$\mathrm{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i};$$

(c)

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Aufgabe 1.3 **(1+1+1 Punkte)**

Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$(a)\ \frac{1+i}{1-i}, \quad (b)\ \frac{1}{i + \frac{1}{i + \frac{1}{i+1}}}, \quad (c)\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 3\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

Aufgabe 1.4 **(4 Punkte)**

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $M := a^2 + b^2$ sowie $N := c^2 + d^2$. Man zeige, dass es $p, q \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $MN = p^2 + q^2$.

Aufgabe 1.5 **(3 Punkte)**

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j}.$$

Abgabe bis **Mittwoch, den 23.10.2019, 10:00 Uhr** in die dafür vorgesehenen Briefkästen vor der Teilbibliothek Physik oder im Raum S0.105 im Bibliotheks- und Seminarzentrum.

Die Lösungen können einzeln oder zu zweit abgegeben werden. Bitte schreiben Sie Ihre Namen und die Nummer der Übungsgruppe, in welcher das Blatt zurückgegeben werden soll, deutlich sichtbar auf Ihre Bearbeitung. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie diese bitte zusammen.