- Lösungshinweise zu den Übungsblättern unter

http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼schleissinger/lina2011/

- Folien und Beamerpräsentationen der Vorlesungen unter

http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html

Beispiel 2.1 (Der $\mathbb{R}^n$)

Definiere auf der Menge $\mathbb{R}^n$ eine Addition $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.1 (Der $\mathbb{R}^n$)
Definiere auf der Menge $\mathbb{R}^n$ eine Addition $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathbb{R}^n$; Skalare aus $\mathbb{R}$

Beispiel 2.1 (Der $\mathbb{R}^n$)
Definiere auf der Menge $\mathbb{R}^n$ eine Addition $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathbb{R}^n$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen!)

Beispiel 2.1 (Der $\mathbb{R}^n$)
Definiere auf der Menge $\mathbb{R}^n$ eine Addition $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathbb{R}^n$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen!)

- Addition
  $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $(x, y) \mapsto x + y$

Beispiel 2.1 (Der $\mathbb{R}^n$)

Definiere auf der Menge $\mathbb{R}^n$ eine Addition $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathbb{R}^n$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen!)

- Addition
  $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $(x, y) \mapsto x + y$
- Skalare Multiplikation
  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$

Beispiel 2.1 (Der $\mathbb{R}^n$)
Definiere auf der Menge $\mathbb{R}^n$ eine Addition $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathbb{R}^n$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen!)

- Addition
  $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $(x, y) \mapsto x + y$
- Skalare Multiplikation
  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$

(c) Wir definieren

$$0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

als den „Nullvektor“

Beispiel 2.1 (Der $\mathbb{R}^n$)
Definiere auf der Menge $\mathbb{R}^n$ eine Addition $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathbb{R}^n$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen!)

- Addition
  $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $(x, y) \mapsto x + y$
- Skalare Multiplikation
  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$

(c) Wir definieren

$$0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

als den „Nullvektor“ und

$$-x := \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Beispiel 2.1 (Der $\mathbb{R}^n$)
Definiere auf der Menge $\mathbb{R}^n$ eine Addition $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dann gelten für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechenregeln:

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathbb{R}^n$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen!)

- Addition
  $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $(x, y) \mapsto x + y$

- Skalare Multiplikation
  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$

(c) Wir definieren

$$0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

als den „Nullvektor“ und

$$-x := \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Beispiel 2.1 (Der $\mathbb{R}^n$)
Definiere auf der Menge $\mathbb{R}^n$ eine Addition $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dann gelten für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechenregeln:

(V1)	$(x + y) + z = x + (y + z)$
(V2)	$x + 0 = x$
(V3)	$x + y = y + x$
(V4)	$x + (-x) = 0$
(V5)	$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
(V6)	$1x = x$
(V7)	$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
(V8)	$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathbb{R}^n$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen!)

- Addition
  $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $(x, y) \mapsto x + y$
- Skalare Multiplikation
  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$

(c) Wir definieren

$$0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

als den „Nullvektor“ und

$$-x := \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

und eine skalare Multiplikation

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)\,,\;\; (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; Skalare aus $\mathbb{R}$

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

und eine skalare Multiplikation

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)\,,\ \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen)

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

und eine skalare Multiplikation

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)\,, \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen)

Addition
$$+ : \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$(f,g) \mapsto f+g$$

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$$+ : \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

und eine skalare Multiplikation

$\cdot : \mathbb{R} \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)\,, \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f, g \in \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen)

Addition $+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $(f,g) \mapsto f+g$

Skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $(\alpha, f) \mapsto \alpha f$

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$$+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

und eine skalare Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ durch}$$

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)\,, \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen)

Addition
$+ : \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$(f,g) \mapsto f+g$

Skalare Multiplikation
$\cdot : \mathbb{R} \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$(\alpha, f) \mapsto \alpha f$

(c) Wir definieren

$$0 \in \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ durch } 0(x) := 0,\ x \in \mathbb{R}$$

als die „Nullfunktion“

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$$+ : \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

und eine skalare Multiplikation

$\cdot : \mathbb{R} \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)\,,\quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f, g \in \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen)

Addition
$$+ : \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$(f,g) \mapsto f+g$$

Skalare Multiplikation
$$\cdot : \mathbb{R} \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$(\alpha, f) \mapsto \alpha f$$

(c) Wir definieren

$$0 \in \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ durch } 0(x) := 0,\ x \in \mathbb{R}$$

als die „Nullfunktion“ und

$$-f \in \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

durch

$$(-f)(x) := -f(x),\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$$+ : \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

und eine skalare Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ durch}$$

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)\,,\quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f, g \in \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beachte:

(a) Grundmenge $\text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen)

Addition
$$+ : \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$(f,g) \mapsto f+g$$

Skalare Multiplikation
$$\cdot : \mathbb{R} \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$(\alpha, f) \mapsto \alpha f$$

(c) Wir definieren

$0 \in \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ durch $0(x) := 0,\ x \in \mathbb{R}$

als die „Nullfunktion“ und

$$-f \in \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

durch

$$(-f)(x) := -f(x),\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$$+ : \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

und eine skalare Multiplikation

$\cdot : \mathbb{R} \times \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)\,,\ \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f, g \in \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten für alle $f, g, h \in \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Regeln:

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen)

Addition
$$+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$(f,g) \mapsto f+g$$

Skalare Multiplikation
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$(\alpha, f) \mapsto \alpha f$$

(c) Wir definieren

$$0 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ durch } 0(x) := 0,\ x \in \mathbb{R}$$

als die „Nullfunktion" und

$$-f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

durch

$$(-f)(x) := -f(x),\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$$+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

und eine skalare Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ durch}$$

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)\,,\ \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f,g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten für alle $f,g,h \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und alle $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Regeln:

(V1)	$(f+g)+h = f+(g+h)$
(V2)	$f+0 = f$
(V3)	$f+g = g+f$
(V4)	$f+(-f) = 0$
(V5)	$\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$
(V6)	$1f = f$
(V7)	$(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$
(V8)	$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

Beachte:

(a) Grundmenge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; Skalare aus $\mathbb{R}$

(b) Zwei Operationen (Abbildungen)

Addition
$$+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$(f,g) \mapsto f+g$$

Skalare Multiplikation
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$(\alpha,f) \mapsto \alpha f$$

(c) Wir definieren

$$0 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ durch } 0(x) := 0,\ x \in \mathbb{R}$$

als die „Nullfunktion“ und

$$-f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

durch

$$(-f)(x) := -f(x),\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$$+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

und eine skalare Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ durch}$$

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)\,,\ \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f,g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten für alle $f,g,h \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und alle $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Regeln:

(V1)	$(f+g)+h = f+(g+h)$
(V2)	$f+0 = f$
(V3)	$f+g = g+f$
(V4)	$f+(-f) = 0$
(V5)	$\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$
(V6)	$1f = f$
(V7)	$(\lambda+\mu)f = \lambda f+\mu f$
(V8)	$\lambda(f+g) = \lambda f+\lambda g$

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$$+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

und eine skalare Multiplikation

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)\,, \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dann gelten für alle $f, g, h \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Regeln:

(V1)	$(f+g)+h = f+(g+h)$
(V2)	$f+0 = f$
(V3)	$f+g = g+f$
(V4)	$f+(-f) = 0$
(V5)	$\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$
(V6)	$1f = f$
(V7)	$(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$
(V8)	$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

Beispiel 2.1 (Der $\mathbb{R}^n$)
Definiere auf der Menge $\mathbb{R}^n$ eine Addition $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dann gelten für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Regeln:

(V1)	$(x + y) + z = x + (y + z)$
(V2)	$x + 0 = x$
(V3)	$x + y = y + x$
(V4)	$x + (-x) = 0$
(V5)	$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
(V6)	$1x = x$
(V7)	$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
(V8)	$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

Beispiel 2.2 (Raum der reellen Abb.)
Definiere auf der Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eine Addition

$+ : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

und eine skalare Multiplikation

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

für jedes $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dann gelten für alle $f, g, h \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Regeln:

(V1)	$(f + g) + h = f + (g + h)$
(V2)	$f + 0 = f$
(V3)	$f + g = g + f$
(V4)	$f + (-f) = 0$
(V5)	$\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$
(V6)	$1f = f$
(V7)	$(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$
(V8)	$\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$

Bemerkung (Was ist Lineare Algebra ?)

Bemerkung (Was ist Lineare Algebra ?)

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch viele weitere Beispiele von Vektorräumen kennenlernen. Jeder dieser Vektorräume erfüllt dann die Vektorraumaxiome (V1)–(V8).

Bemerkung (Was ist Lineare Algebra ?)

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch viele weitere Beispiele von Vektorräumen kennenlernen. Jeder dieser Vektorräume erfüllt dann die Vektorraumaxiome (V1)–(V8). Dies hat folgende Konsequenz: Alle weiteren Eigenschaften, die sich alleine mithilfe dieser Vektorraumaxiome beweisen lassen, gelten dann automatisch in jedem Einzelnen dieser Vektorräume und müssen nicht in jedem Einzelfall noch einmal überprüft werden.

Bemerkung (Was ist Lineare Algebra ?)

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch viele weitere Beispiele von Vektorräumen kennenlernen. Jeder dieser Vektorräume erfüllt dann die Vektorraumaxiome (V1)–(V8). Dies hat folgende Konsequenz: Alle weiteren Eigenschaften, die sich alleine mithilfe dieser Vektorraumaxiome beweisen lassen, gelten dann automatisch in jedem Einzelnen dieser Vektorräume und müssen nicht in jedem Einzelfall noch einmal überprüft werden. *Dies bedeutet eine großartige Einsparung an Denkarbeit*.

Bemerkung (Was ist Lineare Algebra ?)

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch viele weitere Beispiele von Vektorräumen kennenlernen. Jeder dieser Vektorräume erfüllt dann die Vektorraumaxiome (V1)–(V8). Dies hat folgende Konsequenz: Alle weiteren Eigenschaften, die sich alleine mithilfe dieser Vektorraumaxiome beweisen lassen, gelten dann automatisch in jedem Einzelnen dieser Vektorräume und müssen nicht in jedem Einzelfall noch einmal überprüft werden. *Dies bedeutet eine großartige Einsparung an Denkarbeit*. Dabei ist die *abstrakte Behandlung von Vektorräumen* nicht (viel) schwieriger als die Untersuchung konkreter Vektorräume (wie des $\mathbb{R}^n$), sondern tatsächlich in vielen Fällen sogar einfacher und übersichtlicher.

Bemerkung (Was ist Lineare Algebra ?)

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch viele weitere Beispiele von Vektorräumen kennenlernen. Jeder dieser Vektorräume erfüllt dann die Vektorraumaxiome (V1)–(V8). Dies hat folgende Konsequenz: Alle weiteren Eigenschaften, die sich alleine mithilfe dieser Vektorraumaxiome beweisen lassen, gelten dann automatisch in jedem Einzelnen dieser Vektorräume und müssen nicht in jedem Einzelfall noch einmal überprüft werden. *Dies bedeutet eine großartige Einsparung an Denkarbeit*. Dabei ist die *abstrakte Behandlung von Vektorräumen* nicht (viel) schwieriger als die Untersuchung konkreter Vektorräume (wie des $\mathbb{R}^n$), sondern tatsächlich in vielen Fällen sogar einfacher und übersichtlicher. Daher beschäftigt sich die Lineare Algebra systematisch mit dem axiomatisch definierten Vektorraum–Begriff und seinen Implikationen.

Bemerkung (Was ist Lineare Algebra ?)

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch viele weitere Beispiele von Vektorräumen kennenlernen. Jeder dieser Vektorräume erfüllt dann die Vektorraumaxiome (V1)–(V8). Dies hat folgende Konsequenz: Alle weiteren Eigenschaften, die sich alleine mithilfe dieser Vektorraumaxiome beweisen lassen, gelten dann automatisch in jedem Einzelnen dieser Vektorräume und müssen nicht in jedem Einzelfall noch einmal überprüft werden. *Dies bedeutet eine großartige Einsparung an Denkarbeit*. Dabei ist die *abstrakte Behandlung von Vektorräumen* nicht (viel) schwieriger als die Untersuchung konkreter Vektorräume (wie des $\mathbb{R}^n$), sondern tatsächlich in vielen Fällen sogar einfacher und übersichtlicher. Daher beschäftigt sich die Lineare Algebra systematisch mit dem axiomatisch definierten Vektorraum–Begriff und seinen Implikationen. Die speziellen Beispiele von Vektorräumen (wie der $\mathbb{R}^n$) spielen dabei eine wichtige, aber zumeist doch eher untergeordnete Rolle.

Bemerkung (Was ist Lineare Algebra ?)

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch viele weitere Beispiele von Vektorräumen kennenlernen. Jeder dieser Vektorräume erfüllt dann die Vektorraumaxiome (V1)–(V8). Dies hat folgende Konsequenz: Alle weiteren Eigenschaften, die sich alleine mithilfe dieser Vektorraumaxiome beweisen lassen, gelten dann automatisch in jedem Einzelnen dieser Vektorräume und müssen nicht in jedem Einzelfall noch einmal überprüft werden. *Dies bedeutet eine großartige Einsparung an Denkarbeit*. Dabei ist die *abstrakte Behandlung von Vektorräumen* nicht (viel) schwieriger als die Untersuchung konkreter Vektorräume (wie des $\mathbb{R}^n$), sondern tatsächlich in vielen Fällen sogar einfacher und übersichtlicher. Daher beschäftigt sich die Lineare Algebra systematisch mit dem axiomatisch definierten Vektorraum–Begriff und seinen Implikationen. Die speziellen Beispiele von Vektorräumen (wie der $\mathbb{R}^n$) spielen dabei eine wichtige, aber zumeist doch eher untergeordnete Rolle. Die abstrakte Herangehensweise bedeutet allerdings, dass wir ab jetzt *ausschließlich* die Vektorraumaxiome zugrundelegen dürfen und auch Aussagen überprüfen müssen, die z.B. im Spezialfall des $\mathbb{R}^n$ selbstverständlich sind, obwohl dies zunächst etwas befremdlich und beunruhigend erscheinen mag.