Hinweise

- Liste alle zur Klausur Zugelassenen ab Di., 31.1.2012 unter www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼schleissinger/lina2011/
- Letzte Vorlesung Fr., 3.2.2012
- Übungen Mo./Di., 6. & 7.2.2012: Fragestunde zur Klausur
- Klausur Sa., 11.02.2012, Beginn: 12:00 Uhr, Dauer: 90 Minuten
  - Aufteilung nach dem Anfangsbuchstaben Ihres Nachnamens:
A–G: HS 1 Phil. H–N: HS 1 Physik O–Z: 0.0004 ZHSG.
  - Warten Sie bitte **vor** den genannten Hörsäalen auf Einlaß ab **11:50 Uhr**. Bitte pünktlich erscheinen !
  - Bringen Sie selbst genügend Papier für Ihre Bearbeitung der Klausur mit (oben rechts mit Ihrem Namen, Vornamen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet).
  - Bearbeiten Sie pro Blatt jeweils nur eine Aufgabe.
  - Nicht erlaubt:
Mehr als ein Buch, Mobiltelefone, Notebooks, Taschenrechner, etc.
  - Erlaubt: Mitschriften aus Vorlesungen und Übungen, Übungsblätter inkl. Lösungshinweise, Vorlesungsskript und ein Buch.
  - Das komplette Vorlesungsskript ist ab Sa. 4.2.2012 unter http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/LA/ abrufbar (Login: lina Passwort: G@u33)

Satz 5.38 (Struktur der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Ist $x_0 \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $Ax = b$, so ist die Menge aller Lösungen gegeben durch

$$x_0 + N(A) := \{x_0 + x \,:\, x \in N(A)\} .$$

Gauß–Verfahren (siehe www.mathematik.uni-wuerzburg.de/$\sim$roth/la1.html)

Gauß–Verfahren (siehe www.mathematik.uni-wuerzburg.de/$\sim$roth/la1.html)

Geg.: $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. **Ges.:** Alle Lösungen von $Ax = b$.

Gauß–Verfahren (siehe www.mathematik.uni-wuerzburg.de/$\sim$roth/la1.html)

Geg.: $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. **Ges.:** Alle Lösungen von $Ax = b$.

Wir setzen $B := (A, b) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ und benutzen folgende Umformungen:

Gauß–Verfahren (siehe www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

Geg.: $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. **Ges.:** Alle Lösungen von $Ax = b$.

Wir setzen $B := (A, b) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ und benutzen folgende Umformungen:

(1) Vertauschung der Zeilen von B.

Gauß–Verfahren (siehe www.mathematik.uni-wuerzburg.de/$\sim$roth/la1.html)

Geg.: $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. **Ges.:** Alle Lösungen von $Ax = b$.

Wir setzen $B := (A, b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ und benutzen folgende Umformungen:

(1) Vertauschung der Zeilen von B.

(2) Vertauschung der Spalten von A.
(entspricht einer Umnummerierung der Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$)

Gauß–Verfahren (siehe www.mathematik.uni-wuerzburg.de/$\sim$roth/la1.html)

Geg.: $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. **Ges.:** Alle Lösungen von $Ax = b$.

Wir setzen $B := (A, b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ und benutzen folgende Umformungen:

(1) Vertauschung der Zeilen von B.

(2) Vertauschung der Spalten von A.
(entspricht einer Umnummerierung der Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$)

(3) Ersetzen einer Zeile z_j von B durch $z_j + \alpha z_k$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$ und eine Zeile z_k mit $k \neq j$.

Gauß–Verfahren (siehe www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

Geg.: $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. **Ges.:** Alle Lösungen von $Ax = b$.

Wir setzen $B := (A, b) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ und benutzen folgende Umformungen:

(1) Vertauschung der Zeilen von B.

(2) Vertauschung der Spalten von A.
(entspricht einer Umnummerierung der Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$)

(3) Ersetzen einer Zeile z_j von B durch $z_j + \alpha z_k$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$ und eine Zeile z_k mit $k \neq j$.

Bei diesen Umformungen bleibt die Lösungsmenge von $Ax = b$ erhalten, bis auf einer eventuellen Umnummerierung der x_j wegen Operation (2).

Gauß–Verfahren (siehe www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

Geg.: $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. **Ges.:** Alle Lösungen von $Ax = b$.

Wir setzen $B := (A, b) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ und benutzen folgende Umformungen:

(1) Vertauschung der Zeilen von B.

(2) Vertauschung der Spalten von A.
(entspricht einer Umnummerierung der Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$)

(3) Ersetzen einer Zeile z_j von B durch $z_j + \alpha z_k$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$ und eine Zeile z_k mit $k \neq j$.

Bei diesen Umformungen bleibt die Lösungsmenge von $Ax = b$ erhalten, bis auf einer eventuellen Umnummerierung der x_j wegen Operation (2).

0. Die Matrix A enthalte keine Nullspalte.
(Ansonsten kommt ein x_k im Gleichungssystem gar nicht vor!)

Gauß–Verfahren (siehe www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

Geg.: $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. **Ges.:** Alle Lösungen von $Ax = b$.

Wir setzen $B := (A, b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ und benutzen folgende Umformungen:

(1) Vertauschung der Zeilen von B.

(2) Vertauschung der Spalten von A.
(entspricht einer Umnummerierung der Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$)

(3) Ersetzen einer Zeile z_j von B durch $z_j + \alpha z_k$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$ und eine Zeile z_k mit $k \neq j$.

Bei diesen Umformungen bleibt die Lösungsmenge von $Ax = b$ erhalten, bis auf einer eventuellen Umnummerierung der x_j wegen Operation (2).

0. Die Matrix A enthalte keine Nullspalte.
   (Ansonsten kommt ein x_k im Gleichungssystem gar nicht vor!)
1. Schritt: Durch Anwendung von (1) erhält man $a_{1,1} \neq 0$.

Gauß–Verfahren (siehe www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

Geg.: $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. **Ges.:** Alle Lösungen von $Ax = b$.

Wir setzen $B := (A, b) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ und benutzen folgende Umformungen:

(1) Vertauschung der Zeilen von B.

(2) Vertauschung der Spalten von A.
(entspricht einer Umnummerierung der Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$)

(3) Ersetzen einer Zeile z_j von B durch $z_j + \alpha z_k$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$ und eine Zeile z_k mit $k \neq j$.

Bei diesen Umformungen bleibt die Lösungsmenge von $Ax = b$ erhalten, bis auf einer eventuellen Umnummerierung der x_j wegen Operation (2).

0. Die Matrix A enthalte keine Nullspalte.
(Ansonsten kommt ein x_k im Gleichungssystem gar nicht vor!)
1. Schritt: Durch Anwendung von (1) erhält man $a_{1,1} \neq 0$.
2. Schritt: Durch Anwenden von (3) erhält man ein System der Form

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1$$

und das reduzierte System

$$a'_{j,2}x_2 + \ldots + a'_{j,n}x_n = b'_j\,, \qquad j = 2, \ldots, m\,.$$

Gauß–Verfahren (siehe www.mathematik.uni-wuerzburg.de/$\sim$roth/la1.html)

Geg.: $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. **Ges.:** Alle Lösungen von $Ax = b$.

Wir setzen $B := (A, b) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ und benutzen folgende Umformungen:

(1) Vertauschung der Zeilen von B.

(2) Vertauschung der Spalten von A.
(entspricht einer Umnummerierung der Unbekannten $x_1, \dots, x_n$)

(3) Ersetzen einer Zeile z_j von B durch $z_j + \alpha z_k$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$ und eine Zeile z_k mit $k \neq j$.

Bei diesen Umformungen bleibt die Lösungsmenge von $Ax = b$ erhalten, bis auf einer eventuellen Umnummerierung der x_j wegen Operation (2).

0. Die Matrix A enthalte keine Nullspalte.
(Ansonsten kommt ein x_k im Gleichungssystem gar nicht vor!)

1. Schritt: Durch Anwendung von (1) erhält man $a_{1,1} \neq 0$.

2. Schritt: Durch Anwenden von (3) erhält man ein System der Form

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1$$

und das reduzierte System

$$a'_{j,2}x_2 + \ldots + a'_{j,n}x_n = b'_j\,, \qquad j = 2, \dots, m\,.$$

3. Schritt: Falls $(a'_{j,k}) = 0$, so beenden wir den Algorithmus. Ansonsten vefahren wir mit dem reduzierten System analog, wobei zur Sicherung von $a'_{2,2} \neq 0$ evtl. Operation (2) durchzuführen ist.

So fortfahrend erhalten wir das finale System in der Form

So fortfahrend erhalten wir das finale System in der Form

$$
\begin{array}{rcl}
b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_2 + \ldots + b_{1,k}x_k + \ldots + b_{1,n}x_n & = & b'_1 \\
b_{2,2}x_2 + \ldots + b_{2,k}x_k + \ldots + b_{2,n}x_n & = & b'_2 \\
& \vdots & \\
b_{k,k}x_k + \ldots + b_{k,n}x_n & = & b'_k \\
0 & = & b'_{k+1} \\
& \vdots & \\
0 & = & b'_m
\end{array}
$$

So fortfahrend erhalten wir das finale System in der Form

$$\begin{array}{rcl}
b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_2 + \ldots + b_{1,k}x_k + \ldots + b_{1,n}x_n & = & b'_1 \\
b_{2,2}x_2 + \ldots + b_{2,k}x_k + \ldots + b_{2,n}x_n & = & b'_2 \\
& \vdots & \\
b_{k,k}x_k + \ldots + b_{k,n}x_n & = & b'_k \\
0 & = & b'_{k+1} \\
& \vdots & \\
0 & = & b'_m
\end{array}$$

mit $b_{j,j} \neq 0$ für alle $j = 1, \ldots, k$.

So fortfahrend erhalten wir das finale System in der Form

$$\begin{aligned}
b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_2 + \ldots + b_{1,k}x_k + \ldots + b_{1,n}x_n &= b'_1 \\
b_{2,2}x_2 + \ldots + b_{2,k}x_k + \ldots + b_{2,n}x_n &= b'_2 \\
&\vdots \\
b_{k,k}x_k + \ldots + b_{k,n}x_n &= b'_k \\
0 &= b'_{k+1} \\
&\vdots \\
0 &= b'_m
\end{aligned}$$

mit $b_{j,j} \neq 0$ für alle $j = 1, \ldots, k$.

Das finale System ist genau dann lösbar, wenn

$$b'_{k+1} = \ldots = b'_m = 0$$

gilt.

So fortfahrend erhalten wir das finale System in der Form

$$\begin{array}{rcl}
b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_2 + \ldots + b_{1,k}x_k + \ldots + b_{1,n}x_n & = & b'_1 \\
b_{2,2}x_2 + \ldots + b_{2,k}x_k + \ldots + b_{2,n}x_n & = & b'_2 \\
& \vdots & \\
b_{k,k}x_k + \ldots + b_{k,n}x_n & = & b'_k \\
0 & = & b'_{k+1} \\
& \vdots & \\
0 & = & b'_m
\end{array}$$

mit $b_{j,j} \neq 0$ für alle $j = 1, \ldots, k$.

Das finale System ist genau dann lösbar, wenn

$$b'_{k+1} = \ldots = b'_m = 0$$

gilt.

In diesem Fall können wir $x_{k+1}, \ldots, x_n$ beliebig wählen und dann die $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$ in dieser Reihenfolge aus dem finalen System eindeutig ermitteln.