

Rückblick (Auf dem Weg zu den komplexen Zahlen)

Satz 1.1 *Es kein $x \in \mathbb{Q}$, derart, dass $x^2 = 2$.*

Bem. *Es gibt kein $z \in \mathbb{R}$ mit $z^2 = -1$.*

Ausweg: Betrachte „größere“ Menge

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

und definiere dort für $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ eine **Addition**

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$$

und eine **Multiplikation**

$$(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y).$$

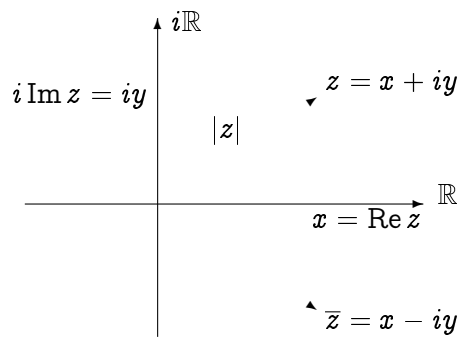
Schreibt man kurz x bzw. y anstelle von $(x, 0)$ bzw. $(0, y)$, so gilt

$$\begin{aligned} (x, y) &= \underbrace{(x, 0) \cdot (1, 0)}_{= (x \cdot 1 - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 1 \cdot 0) = (x, 0)} + \underbrace{(y, 0) \cdot (0, 1)}_{= (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, y)} = x + y \cdot (0, 1). \end{aligned}$$

Def.: $i := (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ heißt *imaginäre Einheit*.

Dann folgt $(x, y) = x + yi$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und

$$\boxed{i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1}$$



Die Gaußsche Zahlenebene $\mathbb{C}$