Satz 5.16 und Korollar 5.19

Sei $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann gibt es genau eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) $\det I_n = 1$

(ii) Ist $\det A \neq 0$, so ist A invertierbar.

(iii) Die Abbildung det ist linear in jeder Spalte.

Es gilt für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det A_{k,j} \,.$$

Zeilenentwicklungsformel (hier nach der $k$ten Zeile)

Satz 5.16 und Korollar 5.19

Sei $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann gibt es genau eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) $\det I_n = 1$

(ii) Ist $\det A \neq 0$, so ist A invertierbar.

(iii) Die Abbildung det ist linear in jeder Spalte.

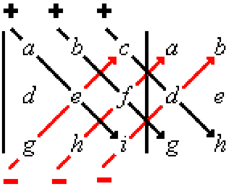
Es gilt für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det A_{k,j} \,.$$

Zeilenentwicklungsformel (hier nach der $k$ten Zeile)

Vorsicht! Die sog. „Regel von Sarrus“

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$



$$= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Satz 5.16 und Korollar 5.19

Sei $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann gibt es genau eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) $\det I_n = 1$

(ii) Ist $\det A \neq 0$, so ist A invertierbar.

(iii) Die Abbildung det ist linear in jeder Spalte.

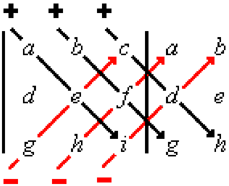
Es gilt für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det A_{k,j} \,.$$

Zeilenentwicklungsformel (hier nach der $k$ten Zeile)

Vorsicht! Die sog. „Regel von Sarrus“

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$



$$= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

gilt nur für (3×3)–Matrizen.

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

$$f_n(z_1,\ldots,z_n) \quad := \quad \det\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

$$f_n(z_1, \ldots, z_n) \quad := \quad \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte $(n-1)$ von Spalte n (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

$$f_n(z_1, \ldots, z_n) \quad := \quad \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte $(n-1)$ von Spalte n (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det \begin{pmatrix} & & & & & 0 \\ & & & & & (z_2 - z_1) z_2^{n-2} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & (z_n - z_1) z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

$$f_n(z_1,\ldots,z_n) \quad := \quad \det\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte $(j-1)$ von Spalte j (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det\begin{pmatrix} & 0 \\ & (z_2 - z_1)z_2^{n-2} \\ & \vdots \\ & (z_n - z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/$\sim$roth/la1.html)

$$f_n(z_1, \ldots, z_n) \quad := \quad \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte $(j-1)$ von Spalte j (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det \begin{pmatrix} & \ldots & 0 \\ & \ldots & (z_2 - z_1) z_2^{n-2} \\ & & \vdots \\ & \ldots & (z_n - z_1) z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/$\sim$roth/la1.html)

$$f_n(z_1, \ldots, z_n) \quad := \quad \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte 2 von Spalte 3 (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det \begin{pmatrix} & & & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & (z_2 - z_1) z_2^{n-2} \\ & & & & \vdots \\ & & & \ldots & (z_n - z_1) z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

$$f_n(z_1,\dots,z_n) \quad := \quad \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte 2 von Spalte 3 (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det \begin{pmatrix} & & 0 & \dots & 0 \\ & & (z_2 - z_1)z_2 & \dots & (z_2 - z_1)z_2^{n-2} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & (z_n - z_1)z_n & \dots & (z_n - z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

$$f_n(z_1,\ldots,z_n) \quad := \quad \det\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte 1 von Spalte 2 (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det\begin{pmatrix} & & 0 & \ldots & 0 \\ & & (z_2-z_1)z_2 & \ldots & (z_2-z_1)z_2^{n-2} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & (z_n-z_1)z_n & \ldots & (z_n-z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

$$f_n(z_1,\ldots,z_n) \quad := \quad \det\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte 1 von Spalte 2 (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ z_2 - z_1 & (z_2 - z_1)z_2 & \ldots & (z_2 - z_1)z_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n - z_1 & (z_n - z_1)z_n & \ldots & (z_n - z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

$$f_n(z_1,\ldots,z_n) \quad := \quad \det\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte 1 von Spalte 2 (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det\begin{pmatrix} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & z_2 - z_1 & (z_2 - z_1)z_2 & \ldots & (z_2 - z_1)z_2^{n-2} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & z_n - z_1 & (z_n - z_1)z_n & \ldots & (z_n - z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

$$f_n(z_1,\ldots,z_n) \quad := \quad \det\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte 1 von Spalte 2 (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & z_2 - z_1 & (z_2 - z_1)z_2 & \ldots & (z_2 - z_1)z_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n - z_1 & (z_n - z_1)z_n & \ldots & (z_n - z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

$$f_n(z_1,\dots,z_n) \quad := \quad \det\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$ Spalte 1 von Spalte 2 (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & z_2 - z_1 & (z_2 - z_1)z_2 & \dots & (z_2 - z_1)z_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n - z_1 & (z_n - z_1)z_n & \dots & (z_n - z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \quad \det\begin{pmatrix} z_2 - z_1 & (z_2 - z_1)z_2 & \dots & (z_2 - z_1)z_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n - z_1 & (z_n - z_1)z_n & \dots & (z_n - z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/$\sim$roth/la1.html)

$$f_n(z_1,\ldots,z_n) \quad := \quad \det\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte 1 von Spalte 2 (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & z_2 - z_1 & (z_2 - z_1)z_2 & \ldots & (z_2 - z_1)z_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n - z_1 & (z_n - z_1)z_n & \ldots & (z_n - z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \quad \det\begin{pmatrix} z_2 - z_1 & (z_2 - z_1)z_2 & \ldots & (z_2 - z_1)z_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n - z_1 & (z_n - z_1)z_n & \ldots & (z_n - z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \quad (z_2 - z_1)\ldots(z_n - z_1)f_{n-1}(z_2,\ldots,z_n)\,.$$

Beweis von Beispiel 5.26 (www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼roth/la1.html)

$$f_n(z_1,\ldots,z_n) \quad := \quad \det\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-2} & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-2} & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-2} & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $z_1 \times$Spalte 1 von Spalte 2 (Lemma 5.17 (a))

$$= \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & z_2 - z_1 & (z_2-z_1)z_2 & \ldots & (z_2-z_1)z_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n - z_1 & (z_n-z_1)z_n & \ldots & (z_n-z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \quad \det\begin{pmatrix} z_2 - z_1 & (z_2-z_1)z_2 & \ldots & (z_2-z_1)z_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n - z_1 & (z_n-z_1)z_n & \ldots & (z_n-z_1)z_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \quad (z_2-z_1)\ldots(z_n-z_1)f_{n-1}(z_2,\ldots,z_n)\,.$$

Jetzt eine kleine Induktion . . .