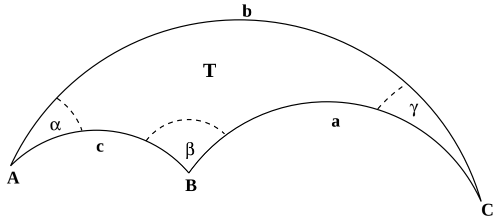
UNIVERSITÄT WÜRZBURG
MATHEMATISCHES INSTITUT
OLIVER ROTH & DANIELA KRAUS



Würzburg, den
27. November 2008

6. Übungsblatt zur Komplexen Geometrie

(Abgabe: Donnerstag, den 4. Dezember 2008, *vor* der Vorlesung)

6.1 Es sei $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine hyperbolische Isometrie mit der Eigenschaft, dass für alle $z \in \mathbb{D}$ stets $g(z) = z$ oder $g(z) = \overline{z}$ gilt. Zeigen Sie, dass entweder $g(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{D}$ oder $g(z) = \overline{z}$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt. (2 P.)

Definition: Hyperbolisches Dreieck
Ein hyperbolisches Dreieck T besteht aus drei paarweise verschiedenen Punkten A, B, C in $\mathbb{D}$, den Eckpunkten des Dreiecks, und aus den drei hyperbolischen Strecken $[A, C]_h$, $[A, B]_h$ und $[B, C]_h$, den Seiten des Dreiecks. Die gegenüberliegenden Seiten der Eckpunkte A, B und C haben hyperbolische Länge $a = d_{\mathbb{D}}(B, C)$, $b = d_{\mathbb{D}}(A, C)$ und $c = d_{\mathbb{D}}(A, B)$. Die Innenwinkel an den Ecken A, B und C seien mit α, β und γ bezeichnet. (Siehe Abbildung oben.)

6.2 *Satz des Pythagoras — hyperbolisch*
Für jedes hyperbolische Dreieck T mit den Ecken A, B, C und den Innenwinkeln α, β und $\gamma = \pi/2$ gilt

$$\cosh c = \cosh a \, \cosh b \, .$$

(3 P.)

6.3 Es sei T ein hyperbolisches Dreieck mit den Ecken A, B und C und $[A, C]_h$ sei die längste Seite von T, d. h. $b > a$ und $b > c$. Es sei L die hyperbolische Gerade, die A und C enthält und L_1 die hyperbolische Gerade, die B enthält und orthogonal zu L ist. Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt w von L und L_1 auf $[A, C]_h$ liegt. (3 P.)

6.4 Es sei C eine Kreislinie und I_C bezeichne die Inversion an C. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) $I_C(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

(b) C schneidet $\partial\mathbb{D}$ senkrecht.

(5 P.)

6.5 Es sei $z_0 \in \mathbb{D}$.

(a) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z, z_0)}{|z - z_0|} \, .$$

(b) Für eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ heißt

$$D_h f(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(f(z), f(z_0))}{\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z, z_0)}$$

die hyperbolische Ableitung von f in z_0. Zeigen Sie, dass

$$D_h f(z) = \left(1 - |z|^2\right) \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt. (2+2 P.)