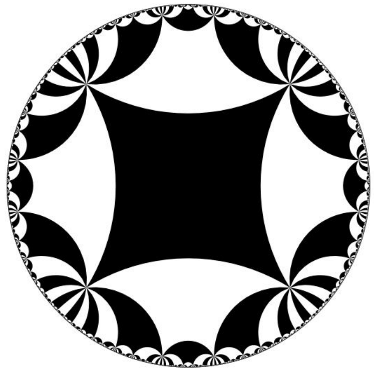
Universität Würzburg
Mathematisches Institut

Oliver Roth & Daniela Kraus



Würzburg, den
20. November 2008

5. Übungsblatt zur Komplexen Geometrie

(Abgabe: Donnerstag, den 27. November 2008, *vor* der Vorlesung)

5.1 Zeigen Sie, dass $(\mathbb{D}, \mathrm{d}_{\mathbb{D}})$ ein metrischer Raum ist, dessen Abstandsfunktion $\mathrm{d}_{\mathbb{D}}$ die Eigenschaft hat, dass für drei paarweise verschiedene Punkte $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ genau dann

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_0, z_2) + \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_2, z_1) = \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_0, z_1)$$

gilt, wenn $z_2 \in [z_0, z_1]_h$. (3 P.)

5.2 Es sei C eine hyperbolische Kreislinie mit hyperbolischem Radius $R > 0$. Berechnen Sie die hyperbolische Weglänge von C. (2 P.)

5.3 Es sei $\gamma : [a, b] \to G$ ein glatter Weg in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und Ψ eine differenzierbare und surjektive Funktion $\Psi : [a', b'] \to [a, b]$ mit $\Psi'(s) \geq 0$ für alle $s \in [a', b']$. Dann ist $\hat{\gamma} := \gamma \circ \Psi : [a', b'] \to G$ ein glatter Weg mit demselben Bild wie γ. Zeigen Sie, dass für jede konforme Pseudo–Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ auf G gilt

$$L_\lambda(\gamma) = L_\lambda(\hat{\gamma})\,. \qquad \text{(2. P)}$$

5.4 (a) Es sei L_1 die hyperbolische Gerade durch die beiden Punkte $-2/3$ und $2/3$ und L_2 die hyperbolische Gerade durch die beiden Punkte $\frac{2-2\,i}{4-i}$ und $\frac{2+2\,i}{4+i}$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt von L_1 und L_2 in $\mathbb{D}$ und den Winkel zwischen L_1 und L_2.

(b) Bestimmen Sie die Menge L aller Punkte in $\mathbb{D}$, die von $z_0 = 0$ und $z_1 = 1/3$ denselben hyperbolischen Abstand besitzen.

(c) Bestimmen den euklidischen Mittelpunkt und den euklidischen Radius der hyperbolischen Kreisscheibe $K_3^h(\frac{1+i}{3})$. (3+3+3 P.)

5.5 Der hyperbolische Flächeninhalt einer Teilmenge $G \subset \mathbb{D}$ ist definiert durch

$$A(G) := \iint_G \lambda_{\mathbb{D}}(z)^2\, dx\, dy\,.$$

Zeigen Sie, dass $A(T(G)) = A(G)$ für jeden Automorphismus T von $\mathbb{D}$ gilt und berechnen Sie die Fläche einer hyperbolischen Kreisscheibe $K_r^h(z_0)$ mit hyperbolischem Radius r und hyperbolischem Mittelpunkt z_0. (3 P.)