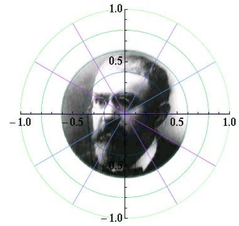
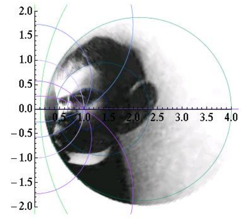
Universität Würzburg
Mathematisches Institut

Oliver Roth & Daniela Kraus





Würzburg, den
13. November 2008

4. Übungsblatt zur Komplexen Geometrie

(Abgabe: Donnerstag, den 20. November 2008, *vor* der Vorlesung)

4.1 Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine konforme Abbildung von G auf $\mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass $\lambda_G(z)\,|dz| := \lambda_{\mathbb{D}}(f(z))\,|f'(z)|\,|dz|$ die maximale reguläre konforme Metrik auf G mit $\kappa_{\lambda_G} \leq -1$ ist. Insbesondere ist $\lambda_G(z)\,|dz|$ unabhängig von der Wahl der konformen Abbildung f.
Bestimmen Sie $\lambda_G(z)\,|dz|$ für $G = K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-z_0| < R\}$ und für $G = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \text{Im }(z) > 0\}$.
(2+1+2 P.)

4.2 Es sei $\lambda(z)\,|dz|$ eine reguläre konforme Pseudo–Metrik und $\mu(z)\,|dz|$ eine reguläre konforme Metrik auf $\mathbb{D}$ mit $\kappa_\lambda(z) \leq \kappa_\mu(z) < 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Ferner seien λ und μ stetige Funktionen auf $\overline{\mathbb{D}}$ mit $\mu(z) > 0$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ und $\lambda(z) \leq \mu(z)$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Zeigen Sie: $\lambda(z) \leq \mu(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$. (4 P.)

(Hinweis: Analysieren Sie den Beweis des Lemmas von Ahlfors.)

4.3 Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Es sei $\lambda(z)\,|dz|$ eine reguläre konforme Metrik auf $\mathbb{D}$ mit konstanter Krümmung -1. Dann ist $\lambda = \lambda_{\mathbb{D}}$.

(b) Es sei $\lambda(z)\,|dz|$ eine reguläre konforme Pseudo–Metrik auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $\kappa_\lambda \leq -1$ und $f : G \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist $\mu(z)\,|dz| := \lambda(z)\,|f(z)|\,|dz|$ eine Pseudo–Metrik auf G mit $\kappa_\mu \leq -1$.

(c) Es seien $\lambda(z)\,|dz|$ und $\mu(z)\,|dz|$ reguläre konforme Pseudo–Metriken auf $\mathbb{D}$ mit $\kappa_\lambda(z) \leq \kappa_\mu(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Ferner seien λ und μ stetige Funktionen auf $\overline{\mathbb{D}}$ mit $\mu(z) > 0$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ und $\lambda(z) \leq \mu(z)$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Dann gilt $\lambda(z) \leq \mu(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$. (1+1+2 P.)

4.4 Es sei $r > 1$ und $K_r := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < r\}$. Die Funktion f sei holomorph in K_r mit $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie:

$$|f'(1)| = \liminf_{\mathbb{D} \ni z \to 1} \frac{1-|f(z)|}{1-|z|}\,.$$

(4 P.)