



### 3. Übungsblatt zur Komplexen Geometrie

(Abgabe: Donnerstag, den 13. November 2008, vor der Vorlesung)

3.1 Es sei  $\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $\lambda(z) := \frac{2}{1+|z|^2}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\lambda(z) |dz|$  eine reguläre konforme Metrik auf  $\mathbb{C}$  darstellt und berechnen Sie für jeden Punkt  $z \in \mathbb{C}$  die Gaußsche Krümmung  $\kappa_\lambda(z)$  von  $\lambda$  in  $z$ .
- (b) Zeigen Sie, dass die  $\lambda$ -Weglänge für die glatten Wege  $\gamma_1(t) := e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$  und  $\gamma_2(t) := e^{-it}$ ,  $t \in [0, \pi]$  jeweils  $\pi$  beträgt. (2+2 P.)

3.2 Zeigen Sie, dass es keine reguläre konforme Pseudo-Metrik  $\lambda(z) |dz|$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $\kappa_\lambda \leq -1$  gibt. (2 P.)

3.3 Es sei  $\mu : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\mu(z) := \frac{\sqrt{1 + |z|^{1/3}}}{|z|^{5/6}}.$$

Zeigen Sie, dass  $\mu(z) |dz|$  eine reguläre konforme Metrik auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  darstellt und berechnen Sie für jeden Punkt  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  die Krümmung  $\kappa_\mu(z)$ . (3 P.)

3.4 Es sei  $0 < r < R < \infty$  und  $A_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$  und

$$\lambda_{A_{r,R}}(z) |dz| := \frac{\pi}{\log(R/r)} \frac{1}{|z| \sin \left[ \pi \frac{\log(R/|z|)}{\log(R/r)} \right]} |dz|.$$

- (a) Es sei  $\lambda(z) |dz|$  eine reguläre konforme Pseudo-Metrik in  $A_{r,R}$  mit  $\kappa_\lambda \leq -1$ . Zeigen Sie, dass  $\lambda(z) \leq \lambda_{A_{r,R}}(z)$  für alle  $z \in A_{r,R}$ .  
 (Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass  $\lambda_{A_{r,R}}(z) |dz|$  eine reguläre konforme Metrik auf  $A_{r,R}$  mit konstanter Krümmung  $-1$  darstellt.)
- (b) Es sei  $R = 1$ . Bestimmen Sie  $\lambda_{\mathbb{D}'}(z) := \lim_{r \rightarrow 0} \lambda_{A_{r,1}}(z)$  für  $z \in \mathbb{D}' := \mathbb{D} \setminus \{0\}$  und berechnen Sie die Krümmung von  $\lambda_{\mathbb{D}'}(z) |dz|$ . Gilt  $\lambda(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}'}(z)$  für alle  $z \in \mathbb{D}'$  für jede reguläre konforme Pseudo-Metrik  $\lambda(z) |dz|$  in  $\mathbb{D}'$  mit  $\kappa_\lambda \leq -1$ ? (2+4+1 P.)