Universität Würzburg
Mathematisches Institut

Oliver Roth & Daniela Kraus

Würzburg, den
30. Oktober 2008

2. Übungsblatt zur Komplexen Geometrie

(Abgabe: Donnerstag, den 6. November 2008, *vor* der Vorlesung)

2.1 Beweisen Sie Lemma 1.22 der Vorlesung. (2 P.)

2.2 Die beiden Kreislinien in Abbildung 1 haben jeweils Radius $r = 1$ und Mittelpunkt $z = 0$.

(a) Überzeugen Sie sich, dass die geometrische Definition der Sinus– und Cosinusfunktion unmittelbar $A = 2\sin\theta$ und $B = 2\cos\theta$ zeigt.

(b) Zeigen Sie, $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\,\cos\phi + \sin\phi\,\cos\theta$ durch Anwendung des Satzes von Ptolemäus auf das Viereck im rechten Bild. (1+2 P.)

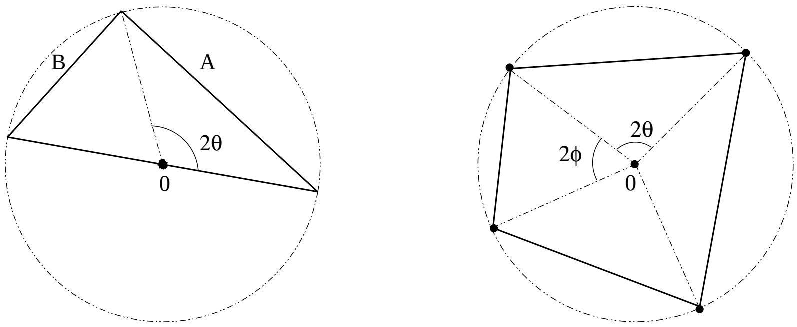
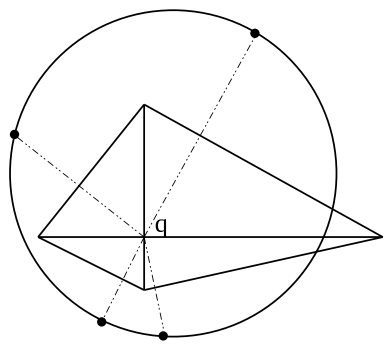


Abbildung 1:

2.3 Es sei V ein konvexes Viereck, dessen Diagonalen sich senkrecht im Punkt q schneiden. Man zeige, dass die vier Punkte, die man durch Spiegelung von q an jeder der vier Kanten des Vierecks erhält, auf einer gemeinsamen Kreislinie liegen.



(4 P.)

2.4 Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen.

(a) Man zeige

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\,.$$

Folgern Sie, dass für eine in G harmonische Funktion u die Funktion $\frac{\partial u}{\partial z}$ holomorph in G ist.

(b) Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass $u(z) := \log|f(z)|$ harmonisch in $G' := \{z \in G \,:\, f(z) \neq 0\}$ ist.

(c) Hat die Funktion $u \in C^2(G)$ in $z_0 \in G$ ein lokales (oder globales) Maximum, so zeige man, dass $\Delta u(z_0) \leq 0$.

(d) Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $D := f(G)$ und $u \in C^2(D)$. Beweisen Sie die Kettenregel für den Laplace Operator $\Delta(u \circ f)(z) = (\Delta u)(f(z)) \cdot |f'(z)|^2$. Formulieren und beweisen Sie eine analoge Kettenregel, falls f lediglich zweimal (reell) stetig differenzierbar ist.

(2+2+2+3 P.)