Universität Würzburg
Mathematisches Institut

Oliver Roth & Daniela Kraus

Würzburg, den
8. Januar 2009

10. Übungsblatt zur Komplexen Geometrie

(Abgabe: Donnerstag, den 15. Januar 2009, *vor* der Vorlesung)

10.1 (Der „kleine“ Satz von Montel)

(a) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) ein Folge holomorpher Funktionen $f_n : D \to \mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge (f_{n_k}) und eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ gibt, derart, dass (f_{n_k}) lokal gleichmäßig in D gegen f konvergiert.
(Hinweis: Benutzen Sie den Großen Satz von Montel (Satz 4.1).)

(b) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) ein Folge holomorpher Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, die in D lokal beschränkt ist, d.h. für jede kompakte Menge $K \subseteq D$ gibt es ein $M > 0$ mit $|f_n(z)| \leq M$ für alle $z \in K$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge (f_{n_k}) und eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ gibt, derart, dass (f_{n_k}) lokal gleichmäßig in D gegen f konvergiert.
(Hinweis: (a) + Diagonalverfahren)

(3+4 P.)

10.2 Es sei $\lambda(w)\,|dw|$ eine konforme Metrik auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Man zeige, dass es zu jeder kompakten Menge $K \subseteq G$ positive Konstanten c_1 und c_2 gibt mit

$$c_1|a-b| \leq \mathrm{d}_\lambda(a,b) \leq c_2|a-b| \qquad \text{für alle } a,b \in K\,.$$

(b) Gibt es stets positive Konstanten c_1 und c_2 mit

$$c_1|a-b| \leq \mathrm{d}_\lambda(a,b) \leq c_2|a-b| \qquad \text{für alle } a,b \in G\,?$$

(2+1 P.)

10.3 Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$, sei

$$\lambda_\alpha(z) := \frac{2(1-\alpha)|z|^{-\alpha}}{1-|z|^{2(1-\alpha)}}\,, \qquad z \in \mathbb{D}' := \mathbb{D}\backslash\{0\}\,.$$

(a) Zeigen Sie: $\lambda_\alpha(z)\,|dz|$ ist eine reguläre konforme Metrik auf $\mathbb{D}'$ mit Krümmung $\equiv -1$.

(b) Zeigen Sie: $\lambda_\alpha(z)\,|dz|$ ist nicht vollständig für $\mathbb{D}'$.

(c) Es sei $\lambda(z)\,|dz|$ die im Beweis von Satz 2.23 konstruierte reguläre konforme Metrik auf $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Zeigen Sie, dass $\lambda(z)\,|dz|$ nicht vollständig für $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ ist.

(2+3+2 P.)