Universität Würzburg
Mathematisches Institut

Oliver Roth & Daniela Kraus

Würzburg, den
23. Oktober 2008

1. Übungsblatt zur Komplexen Geometrie

(Abgabe: Donnerstag, den 30. Oktober 2008, *vor* der Vorlesung)

1.1 Man zeige für eine reell differenzierbare Funktion f *eine* der folgenden zwei Rechenregeln für die Wirtinger–Ableitungen:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}(z) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z)\,, \qquad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(z)\,.$$

Ist $u(x,y) := \text{Re } f(x+iy)$ und $v(x,y) := \text{Im } f(x+iy)$, so zeige man für die Determinante der Jacobi–Matrix

$$J_f(z) := \det \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix} = \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z) \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) \right|^2 .$$

(2+2 P.)

1.2 Für $z_0 \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$ sei

$$T_{z_0}(z) = -\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $T_{z_0}(T_{z_0}(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

(b) Zeigen Sie, dass T_{z_0} die Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$ auf sich selbst abbildet.

(c) Man zeige, dass T_{z_0} die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ auf sich selbst abbildet. (1+2+2 P.)

1.3 (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(z) = z^2$ die rechte Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \text{Re } z > 0\}$ konform auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ abbildet.

(b) Bestimmen Sie das Bild der Einheitskreisscheibe unter der Funktion

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right].$$

(c) Bestimmen Sie die Bilder der vertikalen Geraden $V_a := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \text{Re } z = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, bzw. der horizontalen Geraden $H_b := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \text{Im } z = b\}$, $b \in \mathbb{R}$, unter der komplexen Exponentialfunktion $f(z) = e^z$. (2+2+2 P.)

1.4 Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. "Beweisen" Sie folgende

These. *Beim Differenzieren einer reell differenzierbaren Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ nach den konjugiert komplexen Variablen z und $\overline{z}$ darf man so tun, als ob z und $\overline{z}$ unabhängige Variablen seien.*

(Hniweis: Beachten Sie $x = (z + \overline{z})/2$ und $y = (z - \overline{z})/(2i)$.) (3 P.)

1.5 Alle auftretenden Zahlen seien natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Zahlen, die sich jeweils als Summe zweier Quadrate schreiben lassen, wiederum die Summe zweier Quadrate ist.

Konkret: Gilt $M = a^2 + b^2$ und $N = c^2 + d^2$, so gilt auch $MN = p^2 + q^2$. (4 P.)

Hinweise!

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Lösungsblatt. Es dürfen maximal zwei Namen auf einem Lösungsblatt stehen. Am Mo., 27.10., 17.00 Uhr, HS 4, findet anstelle der Übung eine zusätzliche Vorlesung statt. Die erste Übung findet am Mo., 3.11., 17.00 Uhr, HS 4 statt.