4.3 Beweis des großen Satzes von Montel

Wir beschränken uns zunächst auf den Spezialfall $D = \mathbb{D}$ von Satz 4.1 und betrachten daher holomorphe Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Wir notieren zuerst die folgende allgemeine Version des Lemmas von Schwarz–Pick.

Satz 4.14 (Lemma von Schwarz–Pick; allgemein)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit einer regulären konformen Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ mit Krümmung $\kappa_\lambda \leq -1$ und $f : \mathbb{D} \to G$ holomorph. Dann gilt

$$\mathrm{d}_\lambda(f(z_1), f(z_0)) \leq \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1, z_0) \qquad \textit{für alle } z_0, z_1 \in \mathbb{D}\,. \tag{4.1}$$

Bemerkung

(a) Die Abschätzung (4.1) folgt aus dem Fundamentalsatz (Satz 2.15; Lemma von Ahlfors) und der Tatsache, dass $\lambda(f(z))\,|f'(z)|\,|dz|$ eine reguläre konforme Pseudo–Metrik auf $\mathbb{D}$ mit Krümmung ≤ -1 darstellt (Theorema Egregium). Man vergleiche dazu den fast identischen Beweis von Lemma 3.13.

(b) Als Abbildung zwischen den metrischen Räume $(\mathbb{D}, \mathrm{d}_{\mathbb{D}})$ und (G, d_λ) erfüllt also jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to G$ eine Lipschitz–Bedingung mit der *universellen* (d.h. von der Funktion f unabhängigen) Lipschitz–Konstanten 1!

(c) Die Abschätzung (4.1) gilt insbesondere für jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ mit der Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ aus Satz 2.23.

Es seien nun $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ holomorphe Funktionen. Wir suchen eine Teilfolge (f_{n_k}), so dass entweder

(a) (f_{n_k}) lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ konvergiert

oder

(b) $(1/f_{n_k})$ lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen $\equiv 0$ konvergiert.

Im Fall (a) ist die Grenzfunktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ sicher holomorph (Satz von Weierstraß). Ferner folgt aus dem Satz von Hurwitz (Funktionentheorie), dass entweder $f \equiv 0$ oder $f \equiv 1$ oder $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ gilt. Wir können also, falls die Aussage von Satz 4.1 richtig ist, folgern, dass es eine Teilfolge (f_{n_k}) gibt, so dass entweder

(i) (f_{n_k}) lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ konvergiert

oder

(ii) (f_{n_k}) lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen $f \equiv 0$ oder gegen $f \equiv 1$ oder $(1/f_{n_k})$ lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen $\equiv 0$ konvergiert.

Im Falle (i) konvergiert dann insbesondere (f_{n_k}) *punktweise* in $\mathbb{D}$ gegen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, so dass für jeden Punkt $z \in \mathbb{D}$ jede Teilfolge von $(f_{n_k}(z))$ einen Häufungspunkt (nämlich $f(z)$) *in* $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ besitzt. Wir wollen diese einfache Überlegung nun (partiell) umkehren!

Satz 4.15
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit einer vollständigen regulären konformen Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ mit Krümmung $\kappa_\lambda \le -1$ und (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : \mathbb{D} \to G$. Falls für jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{D}$ jede Teilfolge von $(f_n(z_0))$ einen Häufungspunkt in G besitzt, dann gibt es eine Teilfolge (f_{n_k}), die lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen eine Grenzfunktion $f : \mathbb{D} \to G$ konvergiert.

Beweisstrategie.

1. Es sei $L \subseteq \mathbb{D}$ eine abzählbar dichte Teilmenge von $\mathbb{D}$. Mit dem Diagonalverfahren konstruieren wir *eine* Teilfolge (f_{n_k}), so dass $(f_{n_k}(z))$ für *jeden* Punkt in L gegen einen Punkt in G konvergiert. Inbesondere ist für jeden Punkt $z \in L$ die Folge $(f_{n_k}(z))$ eine Cauchy–Folge im metrischen Raum (G, d_λ).

2. Wir benutzen dann die Abschätzung (4.1) um zu zeigen, dass für jeden Punkt $z \in \mathbb{D}$ (und nicht für die Punkte $z \in L$) die Folge $(f_{n_k}(z))$ eine Cauchy–Folge im metrischen Raum (G, d_λ). Da (G, d_λ) vollständig ist, konvergiert die Funktionenfolge (f_{n_k}) also *punktweise* in $\mathbb{D}$ gegen eine Grenzfunktion $f : \mathbb{D} \to G$ mit Werten in G.

3. Benutzt man noch einmal die Abschätzung (4.1), so ergibt sich, dass diese punktweise Konvergenz sogar lokal gleichmäßig ist.

Satz 4.16
Es sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Falls für einen Punkt $z_0 \in \mathbb{D}$ die Folge $(f_n(z_0))$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ besitzt, so gibt es eine Teilfolge (f_{n_k}), so dass (f_{n_k}) lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen $f \equiv 0$ oder gegen $f \equiv 1$ oder $(1/f_{n_k})$ lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen $\equiv 0$ konvergiert.

Der Große Satz von Montel für den Fall $D = \mathbb{D}$ folgt jetzt sofort aus Satz 4.15 (zusammen mit Satz 4.13) und Satz 4.16.

Beweisstrategie von Satz 4.1. Es sei L eine abzählbar dichte Teilmenge des Gebietes D. Zu jedem Punkt $z_j \in L$ gibt es ein $r_j > 0$ mit $K_j := K_{r_j}(z_j) \subset D$. Selbstverständlich ist $\cup_{j \ge 1} K_j = D$. Für jede *Kreisscheibe* K_j gibt es eine Teilfolge (f_k^j) mit den im Satz von Montel genannten Eigenschaften. Mit dem Diagonalverfahren findet man dann *eine* Teilfolge (f_{n_k}), so dass für jede Kreisscheibe K_j entweder Aussage (a) oder (b) im Satz von Montel gilt. Da D ein *Gebiet* ist, folgert man, dass für diese Teilfolge (f_{n_k}) entweder Aussage (a) für alle Kreisscheiben K_j oder Aussage (b) für alle Kreisscheiben K_j gelten muss. Damit ist Satz 4.1 bewiesen. ■

Satz 4.17
Wir wünschen Ihnen für Ihre berufliche und private Zukunft viel Erfolg und alles Gute!

Beweis. .... ☺ ■