Satz 4.5
Es sei $\lambda(w)\,|dw|$ eine konforme Metrik auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist durch

$$\mathrm{d}_\lambda(w_0, w_1) := \inf\{L_\lambda(\gamma) : \gamma \textit{ glatter Weg in } G \textit{ von } w_0 \textit{ nach } w_1\}$$

eine Abstandsfunktion auf G definiert.

Beispiele 4.6
(a) Für $G = \mathbb{C}$ und $\lambda \equiv \lambda_{\mathbb{C}}$ hat man $\mathrm{d}_\lambda(w_0, w_1) = \mathrm{d}_{\mathbb{C}}(w_0, w_1) = |w_0 - w_1|$.

(b) Für $G = \{w \in \mathbb{C} : 1/2 < |w| < 2\}$ und $\lambda \equiv \lambda_{\mathbb{C}}$ gilt $\mathrm{d}_\lambda \neq \mathrm{d}_{\mathbb{C}}$.

(c) Für $G = \mathbb{D}$ und $\lambda \equiv \lambda_{\mathbb{D}}$ gilt $\mathrm{d}_\lambda = \mathrm{d}_{\mathbb{D}}$.

Beispiel (b) zeigt, dass d_λ nicht nur von λ sondern auch von G abhängt!

Satz 4.7
Es sei $\lambda(w)\,|dw|$ eine konforme Metrik auf dem Gebiet G. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Eine Menge $U \subseteq G$ ist offen in (G, d_λ) (d.h. zu jedem Punkt $w_0 \in U$ gibt es ein $r > 0$, derart, dass die λ–Kreisscheibe $K_r^\lambda(w_0) := \{w \in G : \mathrm{d}_\lambda(w, w_0) < r\}$ in U enthalten ist) genau dann, wenn U in $(G, |\cdot|)$ offen ist.

(b) Eine Menge $K \subset G$ ist kompakt in (G, d_λ) (d.h. jede Folge $(w_n) \subset K$ besitzt eine Teilfolge (w_{n_k}) und einen Punkt w_0 in K, so dass $\mathrm{d}_\lambda(w_{n_k}, w_0) \to 0$ für $k \to \infty$) genau dann, wenn K in $(G, |\cdot|)$ kompakt ist.

Man sagt kurz für (a): Die beiden metrischen Räume (G, d_λ) und $(G, |\cdot|)$ besitzen die dieselben Topologien (also dieselben offenen und abgeschlossenen Mengen).

Definition 4.8
Eine konforme Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt vollständig (für G), wenn die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}_\lambda(w_n, w_0) \to +\infty$$

für jede Folge $(w_n) \subseteq G$ ohne Häufungspunkt in G und für einen (und damit jeden) Punkt $w_0 \in G$ gilt.

Bemerkung
(a) Es sei $(w_n) \subset G$. Gilt $\mathrm{d}_\lambda(w_n, w_0) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ für *ein* $w_0 \in G$, so gilt für jeden anderen Punkt $\tilde{w}_0 \in G$

$$\mathrm{d}_\lambda(w_n, \tilde{w}_0) \geq \mathrm{d}_\lambda(w_n, w_0) + \mathrm{d}_\lambda(w_0, \tilde{w}_0) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\,.$$

(b) Eine konforme Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ ist also vollständig für das Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ genau dann, wenn jede beschränkte Folge (w_n) in (G, d_λ) einen Häufungspunkt in G besitzt.
(„Bolzano–Weierstraß Eigenschaft“)

Dabei heißt $(w_n) \subset G$ beschränkt in (G, d_λ), wenn es ein $M > 0$ und einen Punkt $w_0 \in G$ gibt mit $\mathrm{d}_\lambda(w_n, w_0) \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Definition 4.8 besagt anschaulich, dass jeder Randpunkt des Gebietes G einen unendlich großen Abstand von jedem inneren Punkt $w_0 \in G$ besitzt.

Beispiele 4.9

(a) $\lambda_{\mathbb{C}}(w)\,|dw|$ ist vollständig für $G = \mathbb{C}$: Ist $(w_n) \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge ohne HP in $\mathbb{C}$, so gilt $|w_n| \to +\infty$, also $\mathrm{d}_{\mathbb{C}}(w_n, w_0) = |w_n - w_0| \geq |w_n| - |w_0| \to +\infty$ für einen (und damit jeden) Punkt $w_0 \in \mathbb{C}$.

(b) $\lambda_{\mathbb{C}}(w)\,|dw|$ ist nicht vollständig für $G = \mathbb{D}$, denn $w_n = 1 - 1/(n+1)$ ist eine Folge in $\mathbb{D}$ ohne HP in $\mathbb{D}$, aber $\mathrm{d}_{\mathbb{C}}(w_n, 0) = |w_n| \to 1 \neq +\infty$.

(c) $\lambda_{\mathbb{D}}(w)\,|dw|$ ist vollständig für $G = \mathbb{D}$.

Lemma 4.10

Es sei $\lambda(w)\,|dw|$ eine vollständige konforme Metrik auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$. Dann besitzt jede Cauchy–Folge (w_n) in (G, d_λ) einen Grenzwert $w_0 \in G$ (d.h. $\mathrm{d}_\lambda(w_n, w_0) \to 0$ für $n \to \infty$) und (G, d_λ) ist folglich ein vollständiger metrischer Raum.

Bemerkung 4.11

Für eine konforme Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ auf einem Gebiet G sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Jede in (G, d_λ) beschränkte Folge $(w_n) \subset G$ besitzt einen Häufungspunkt in G.

(b) (G, d_λ) ist ein vollständiger metrischer Raum.

Man beachte, dass Lemma 4.10 gerade die Implikation „(a) $\Rightarrow$ (b)“ ergibt. Diese ist (wie der Beweis von Lemma 4.10 zeigt) tatsächlich für *beliebige* metrische Räume (X, d) anstelle von (G, d_λ) richtig. Die Implikation „(b) $\Rightarrow$ (a)“ ist der sogenannte *Satz von Hopf–Rinow*. Dieser ist allerdings nicht für beliebige metrische Räume gültig. Für einen Beweis des Satzes von Hopf–Rinow verweisen wir z.B. auf das Seminar *Komplexe Geometrie* im Sommmersemester 2009.

Beispiel 4.12

Die hyperbolische Metrik

$$\lambda_{\mathbb{D}'}(w)\,|dw| = \frac{|dw|}{|w| \log(1/|w|)}$$

(vgl. Übungsaufgabe 3.4 (b)) auf der punktierten Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}' = \mathbb{D}\backslash\{0\}$ ist vollständig für $\mathbb{D}'$. Um dies nachzuweisen, sei (w_n) eine Folge in $\mathbb{D}'$ ohne Häufungspunkt in $\mathbb{D}'$ und $\gamma_n : [a,b] \to \mathbb{D}'$ sei ein glatter Weg von z.B. $w_0 = 1/2$ nach $w = w_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L_{\lambda_{\mathbb{D}'}}(\gamma_n) &= \int\limits_{\gamma_n} \frac{|dw|}{|w| \log(1/|w|)} = \int\limits_a^b \frac{|\gamma_n'(t)|}{|\gamma_n(t)| \log(1/|\gamma_n(t)|)}\, dt \geq \int\limits_a^b \frac{\left|\frac{d}{dt}\left(|\gamma_n(t)|\right)\right|}{|\gamma_n(t)| \log(1/|\gamma_n(t)|)}\, dt \\ &= \int\limits_{1/2}^{|w_n|} \frac{|ds|}{s \log(1/s)} = \left|\log(\log 2) - \log(\log(1/|w_n|))\right| . \end{aligned}$$

Es folgt $\mathrm{d}_\lambda(1/2, w_n) \geq |\log(\log 2) - \log(\log(1/|w_n|))| \to +\infty$ für $n \to \infty$, da (w_n) keinen Häufungspunkt in $\mathbb{D}'$ besitzt.