Satz 4.13
Auf $G = \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ gibt es eine vollständige reguläre konforme Metrik mit Krümmung ≤ -1.

Zum Beweis von Satz 4.13 benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz
Es seien $\lambda(w)\,|dw|$ und $\mu(w)\,|dw|$ reguläre konforme Metriken auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) $\kappa_{c\lambda}(w) = \frac{1}{c^2} \cdot \kappa_\lambda(w)$ für alle $w \in G$ und jede Konstante $c > 0$.

(b) $\kappa_{\lambda\cdot\mu}(w) = \frac{1}{\mu(w)^2}\kappa_\lambda(w) + \frac{1}{\lambda(w)^2}\kappa_\mu(w)$ für alle $w \in G$.

(c) Für $\nu := \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ gilt $\kappa_\nu(w) \leq \frac{\lambda(w)^4}{\nu(w)^4}\kappa_\lambda(w) + \frac{\mu(w)^4}{\nu(w)^4}\kappa_\mu(w)$ für alle $w \in G$.

(d) Gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ mit $\kappa_\lambda(w) \leq -k_1^2 < 0$ und $\kappa_\mu(w) \leq -k_2^2 < 0$ für alle $w \in G$, so folgt für $\nu := \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ die Abschätzung $\kappa_\nu(w) \leq -\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}$ für alle $w \in G$.

Beweis. Die beiden Aussagen (a) und (b) beweist man direkt mithilfe der Definition der Krümmung durch Nachrechnen.

Um (c) zu beweisen, setzen wir zur Abkürzung $f := \lambda^2$, $g := \mu^2$ und $h := f + g = \nu^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\kappa_\lambda &= -\frac{1}{\lambda^2}\Delta \log \lambda = -\frac{1}{2f}\Delta \log f = -\frac{2}{f}\left(f \cdot f_{w\overline{w}} - f_w \cdot f_{\overline{w}}\right) \\
\kappa_\mu &= -\frac{2}{g}\left(g \cdot g_{w\overline{w}} - g_w \cdot g_{\overline{w}}\right) \\
\kappa_\nu &= -\frac{2}{h}\left(h \cdot h_{w\overline{w}} - h_w \cdot h_{\overline{w}}\right)
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit einer (etwas längeren) Rechnung

$$fgh\left(f^2\kappa_\lambda + g^2\kappa_\mu - h^2\kappa_\nu\right) = 2\left|f \cdot g_w - g \cdot f_w\right|^2 \geq 0\,.$$

Also gilt $\left(f^2\kappa_\lambda + g^2\kappa_\mu - h^2\kappa_\nu\right) \geq 0$. Dies ist die zu beweisende Abschätzung.

Zum Beweis von (d) beachten wir, dass aus (c)

$$\kappa_\nu \leq \frac{f^2\kappa_\lambda + g^2\kappa_\mu}{(f+g)^2} \leq \frac{-k_1^2 f^2 - k_2^2 g^2}{(f+g)^2}$$

folgt. Die zu beweisende Ungleichung ergibt sich somit aus

$$k_1^2 f^2 + k_2^2 g^2 \geq \frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}(f+g)^2\,,$$

d.h. aus

$$(k_1^2 + k_2^2)(k_1^2 f^2 + k_2^2 g^2) \geq k_1^2 k_2^2 (f+g)^2\,.$$

Diese letzte Ungleichung ist äquivalent zu

$$k_1^4 f^2 + k_2^4 g^2 \geq 2k_1^2 k_2^2 fg \iff (k_1^2 f + k_2^2 g)^2 \geq 0\,.$$

■

Beweisidee von Satz 4.13. Wir starten mit der durch

$$\tau(w) := \varepsilon \frac{\sqrt{1+|w|^{\frac{1}{3}}}}{|w|^{\frac{5}{6}}} \frac{\sqrt{1+|w-1|^{\frac{1}{3}}}}{|w-1|^{\frac{5}{6}}}$$

induzierten Metrik $\tau(w)\,|dw|$. Wie im Beweis von Satz 2.23 gezeigt, ist $\tau(w)\,|dw|$ für geeignetes $\varepsilon > 0$ eine reguläre konforme Metrik auf $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ mit $\kappa_\lambda \leq -1$. Allerdings (siehe Aufgabe 10.3) ist $\tau(w)\,|dw|$ nicht vollständig für $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Wir „verkleben“ $\tau(w)\,|dw|$ mit der vollständigen hyperbolischen Metrik $\lambda_{\mathbb{D}'}(w)\,|dw|$ der punktierten Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}'$ und erhalten so eine reguläre konforme Metrik $\lambda_1(w)\,|dw|$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, die „vollständig bei $w = 0$“ ist, d.h. $\mathrm{d}_{\lambda_1}(w_n, w_0) \to +\infty$ für $n \to \infty$ für jede Folge $(w_n) \subset \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ mit $w_n \to 0$. Entsprechend behandelt man den Randpunkt $w = 1$ und den „Randpunkt $w = \infty$“.

Beweis von Satz 4.13. Es sei $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit

$$\phi(w) = \begin{cases} 1 & |w| \leq 1/3 \\ 0 < \phi(w) < 1 & \text{für } 1/3 < |w| < 1/2 \\ 0 & |w| \geq 1/2\,. \end{cases}$$

Beispielsweise kann man mit

$$\psi(x) := \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

durch

$$\phi(w) := 1 - \frac{\psi(|w| - 1/3)}{\psi(|w| - 1/3) + \psi(1/2 - |w|)}$$

eine solche Funktion definieren. Dann setzen wir

$$\eta(w) := \phi(w) \cdot \lambda_{\mathbb{D}'}(w)$$

und

$$\mu(w) := \eta(w) + \eta(w-1) + \frac{1}{|w|^2}\eta(1/w)\,.$$

Man beachte, dass μ auf $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ beliebig oft differenzierbar ist. Für $w \in K_{1/3}(0)$ gilt $\eta(w) = \lambda_{\mathbb{D}'}(w)$, d.h. $\kappa_\mu(w) = \kappa_{\lambda_{\mathbb{D}'}}(w) = -1$ für alle $w \in K_{1/3}(0)$. Analog folgert man $\kappa_\mu(w) \equiv -1$ für alle $w \in K_{1/3}(1) \cup \{w \in \mathbb{C} \,:\, |w| > 3\}$.

Schließlich sei

$$\hat{\lambda}(w) := \sqrt{\tau(w)^2 + \beta\mu(w)^2}$$

für $\beta > 0$. Wir zeigen, dass die reguläre konforme Metrik $\hat{\lambda}(w)\,|dw|$

(i) für jedes $\beta > 0$ vollständig für $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ ist; und

(ii) für geeignetes $\beta > 0$ Krümmung $\leq -1/2$ besitzt.

Zu (i): Da $\lambda_{\mathbb{D}'}(w)\,|dw|$ vollständig für $\mathbb{D}'$ ist, ergibt sich, dass $\hat{\lambda}(w)\,|dw|$ vollständig für $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ ist.
Um dies einzusehen, beachte man, dass $\mu(w) = \eta(w) = \lambda_{\mathbb{D}'}(w)$ für alle $w \in K_{1/3}(0)\backslash\{0\}$ gilt. Daraus folgt $\hat{\lambda}(w) \geq \sqrt{c}\cdot\lambda_{\mathbb{D}'}(w)$ für alle $w \in K_{1/3}(0)\backslash\{0\}$. Hieraus ergibt sich $\mathrm{d}_{\hat{\lambda}}(w_n, 1/6) \to +\infty$ für jede Folge $(w_n) \subset K_{1/3}(0)\backslash\{0\}$ mit $w_n \to 0$.

Analog folgert man $\mathrm{d}_{\hat{\lambda}}(w_n, 5/6) \to +\infty$ für jede Folge $(w_n) \subset K_{1/3}(1)\backslash\{1\}$ mit $w_n \to 1$ und $\mathrm{d}_{\hat{\lambda}}(w_n, 3) \to +\infty$ für jede Folge $(w_n) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w| > 3\}$ mit $|w_n| \to +\infty$.

Insgesamt schließt man $\mathrm{d}_{\lambda}(w_n, 1/2) \to +\infty$ für jede Folge $(w_n) \subset \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$.

Zu (ii): Sei $\Omega := K_{1/2}(0) \cup K_{1/2}(1) \cup \{w \in \mathbb{C} : |w| > 2\}$ und $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$. Dann gilt $\hat{\lambda}(w) = \tau(w)$ und daher $\kappa_{\hat{\lambda}}(w) \leq -1$. Nun sei $w \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ mit $\kappa_{\mu}(w) \equiv -1$. Dann ist $\kappa_{\sqrt{\beta}\mu}(w) = -1/\beta$ und $\kappa_{\hat{\lambda}}(w) \leq -\frac{1}{1+\beta}$ nach dem Hilfssatz (Aussage (d)). Für $\beta \leq 1$ ist also $\kappa_{\hat{\lambda}}(w) \leq -\frac{1}{2}$.
Nun sei

$$M := \{w \in \mathbb{C} : 1/3 \leq |w| \leq 1/2\} \cup \{w \in \mathbb{C} : 1/3 \leq |w-1| \leq 1/2\} \cup \{w \in \mathbb{C} : 2 \leq |w| \leq 3\}$$

und $w \in M$. Dann ist

$$\hat{\lambda}(w) = \sqrt{\Big(\sqrt{\beta}\cdot\hat{\lambda}_1(w)\Big)^2 + \Big(\sqrt{1-\beta}\cdot\tau(w)\Big)^2}\,, \qquad \hat{\lambda}_1(w) := \sqrt{\tau(w)^2 + \mu(w)^2}\,.$$

Aus dem Hilfssatz (Aussage (c)) folgt daher mithilfe von

$$\kappa_{\sqrt{\beta}\cdot\hat{\lambda}_1}(w) = \frac{1}{\beta}\kappa_{\hat{\lambda}_1}(w)\,, \qquad \kappa_{(\sqrt{1-\beta}\cdot\tau}(w) = \frac{1}{1-\beta}\kappa_{\tau}(w)$$

die Abschätzung

$$\kappa_{\hat{\lambda}}(w) \leq \frac{\beta\hat{\lambda}_1(w)^4\kappa_{\hat{\lambda}_1}(w) + (1-\beta)\tau(w)^4\kappa_{\tau}(w)}{(\tau(w)^2 + \beta\mu(w)^2)^2}\,.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hängt stetig von w und β ab und ist auf $M \times \{0\}$ negativ:

$$\kappa_{\hat{\lambda}}(w) = \kappa_{\tau}(w) \leq -1 \qquad \text{für alle } w \in M \text{ und } \beta = 0\,.$$

Es gilt also $\kappa_{\hat{\lambda}}(w) \leq -1/2$ für alle $w \in M$ falls $\beta > 0$ hinreichend klein ist (M ist kompakt!).

Aus (i) und (ii) folgt: $\lambda(w)\,|dw| := \hat{\lambda}(w)/\sqrt{2}\,|dw|$ ist eine auf $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ vollständige reguläre konforme Metrik mit Krümmung ≤ -1 ■