## – Kapitel 4 –

# Konforme Geometrie

## 4.1 Das Ziel: der große Satz von Montel

**Satz 4.1 (Großer Satz von Montel)**
*Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)$ ein Folge holomorpher Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})$, derart, dass entweder*

*(a) $(f_{n_k})$ lokal gleichmäßig in $D$ gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert,*

*oder*

*(b) $(1/f_{n_k})$ lokal gleichmäßig in $D$ gegen die Grenzfunktion $f \equiv 0$ konvergiert.*

**Bemerkung**
(a) Die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{C}$ in (a) ist nach dem Satz von Weierstraß aus der Funktionentheorie wieder holomorph.

(b) Die Schlussfolgerung von Satz 4.1 bleibt auch dann noch gülitg, wenn man anstelle von „$f_n(D) \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$" die Bedingung „$f_n(D) \subseteq \mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ für zwei verschiedene von $n$ unabhängige komplexe Zahlen $a$ und $b$" fordert (Beweis ?)

Bevor wir Satz 4.1 beweisen, diskutieren wir einige Konsequenzen dieses Satzes. Zuerst leiten wir aus Satz 4.1 den sogenannten Großen Satz von Picard ab.

**Satz 4.2 (Großer Satz von Picard)**
*Es sei $f$ holomorph in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ mit einer wesentlichen Singularität in $z = 0$. Dann nimmt $f$ jede komplexe Zahl mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft als Wert an.*

Satz 4.2 wird oft in der folgenden, etwas allgemeineren Fassung ausgesprochen. *Es sei $f$ holomorph in einer punktierten Umgebung $U$ eines Punktes $z_0$ und $z_0$ sei eine wesentliche Singularität von $f$. Dann nimmt $f$ jede komplexe Zahl mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft in $U$ als Wert an.* Wir überlassen den Beweis dieser Variante des Großen Satzes von Picard den Leserinnen.

**Beweisskizze für Satz 4.2.** Widerspruchsannahme: *$f$ nimmt in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ zwei verschiedene komplexe Zahlen $a$ und $b$ nur endlich oft als Wert an.*
Dann gibt es ein $r \in (0,1)$, so dass die in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ holomorphe Funktion $f_r(z) := f(rz)$ weder $a$ noch $b$ als Wert annimmt. Ferner hat $f_r$ in $z = 0$ eine wesentliche Singularität. Betrachtet man dann $F(z) := (f_r(z) - a)/(b - a)$, so ist $F$ holomorph in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ mit einer wesentlichen Singularität in $z = 0$ und $F(\mathbb{D}\backslash\{0\}) \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Folglich kann man auf die Folge $f_n(z) :=$

$F(z/n)$ den Großen Satz von Montel anwenden und man hat die zwei Alternativen (a) und (b) in Satz 4.1 zu untersuchen. Wir beschränken uns hier auf die Alternative (a) und überlassen Alternative (b) den Leserinnen. Es gibt also eine Teilfolge $(n_k) \subseteq \mathbb{N}$, so dass $(F(z/n_k))_k$ lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Grenzfunktion $g : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ konvergiert. Die Konvergenz ist insbesondere auf der kompakten Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/2\}$ gleichmäßig. Somit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|F(z/n_k)| \leq \max_{|z|=1/2} |g(z)| + 1 =: M$ für alle $|z| = 1/2$ und alle $k \geq N$, d.h. $|F(z)| \leq M$ für alle $|z| = 1/(2n_k)$ und alle $k \geq N$. Aus dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen ergibt sich $|F(z)| \leq M$ für alle $0 < |z| < 1/(2n_N)$. Dann hat aber $F$ nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz in $z = 0$ eine hebbare Singularität, im Widerspruch dazu, dass $F$ nach Konstruktion in $z = 0$ eine wesentliche Singularität besitzt. ∎

**Satz 4.3 (Kleiner Satz von Picard)**
*Es sei $f$ holomorph in $\mathbb{C}$, aber kein Polynom. Dann nimmt $f$ jede komplexe Zahl bis auf höchstens eine Ausnahme unendlich oft als Wert an.*

Man beachte, dass Satz 4.3 eine Verfeinerung von Satz 2.22 darstellt.

**Beweis.** $g(z) := f(1/z)$ ist holomorph in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ mit einer wesentlichen Singularität in $z = 0$. Der Kleine Satz von Picard folgt somit aus dem Großen Satz von Picard. ∎

Wir geben jetzt einen direkten Beweis des Großen Satzes von Picard mithilfe komplexer Geometrie basierend auf folgendem Satz.

**Satz 4.4 (Satz von Huber)**
*Es sei $G$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ mit einer regulären konformen Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ mit Krümmung $\kappa_\lambda \leq -1$. und $f : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to G$ sei holomorph. Gibt es eine Folge $(z_n) \subseteq \mathbb{D}\backslash\{0\}$, $z_n \to 0$, so dass $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ existiert und in $G$ liegt, dann hat $f$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität.*

**Beweis von Satz 4.2 mithilfe von Satz 4.4.**
Widerspruchsannahme: *$f$ nimmt in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ zwei verschiedene komplexe Zahlen $a$ und $b$ nur endlich oft als Wert an.* Dann gibt es ein $r \in (0, 1)$, so dass die in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ holomorphe Funktion $f_r(z) := f(rz)$ die beiden Werte $a$ und $b$ in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ nicht annimmt. Setzt man $G := \mathbb{C}\backslash\{a, b\}$, so gilt also $f_r(\mathbb{D}\backslash\{0\}) \subseteq G$. Satz 2.23 garantiert, dass auf $G = \mathbb{C}\backslash\{a, b\}$ eine reguläre konforme Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ mit Krümmung $\kappa_\lambda \leq -1$ existiert. Nun sei $c \in G$ beliebig gewählt. Da $f_r$ in $z = 0$ eine wesentliche Singularität besitzt, sichert der Satz von Casorati–Weierstraß, dass es eine Folge $(z_n) \subseteq \mathbb{D}\backslash\{0\}$, $z_n \to 0$, gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} f_r(z_n)$ existiert und $= c \in G$ ist. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Huber erfüllt und es folgt, dass $f_r$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität besitzt. Also ist die Widerspruchsannahme falsch und der Satz bewiesen. ∎

**Bemerkung**
Dieser Beweis des Großen Satzes von Picard beruht also im Wesentlichen darauf, dass es nach Satz 2.23 auf der zweifach punktierten Ebene $G = \mathbb{C}\backslash\{a, b\}$ eine reguläre konforme Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ gibt *mit Krümmung $\kappa_\lambda \leq -1$*. Den Rest erledigen die Sätze von Huber und Casorati–Weierstraß.

## 4.2 Vollständige konforme Metriken

Dieser Paragraph dient der Vorbereitung für den Beweis des Großen Satzes von Montel (Satz 4.1) im nächsten Paragraphen.