Jeder metrische Raum (X, d_X), der es gestattet die Begriffe einer “Geraden” und des Winkels zwischen je zwei sich schneidenden Geraden zu definieren, so dass die obigen fünf Aussagen gelten, heißt *Modell der hyperbolischen Geometrie*.

Wir nennen $(\mathbb{D}, \mathrm{d}_{\mathbb{D}})$ die hyperbolische Ebene bzw. das Poincaré–Modell der hyperbolischen Geometrie.

3.3 Das Halbebenenmodell der hyperbolischen Geometrie

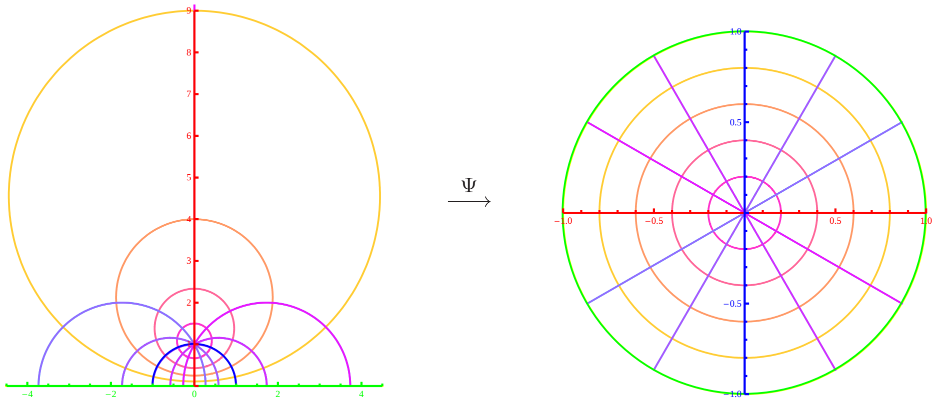
Es sei

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Im} z > 0\}$$

die obere Halbebene in $\mathbb{C}$. Die Möbiustransformation

$$\Psi(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

bildet $\mathbb{H}$ konform auf $\mathbb{D}$ ab.



Nach Aufgabe 4.1 ist dann

$$\lambda_{\mathbb{H}}(z)\,|dz| := \lambda_{\mathbb{D}}(\Psi(z))\,|\Psi'(z)|\,|dz|$$

die *maximale* reguläre konforme Pseudo–Metrik auf $\mathbb{H}$ mit Krümmung ≤ -1. Wir nennen $\lambda_{\mathbb{H}}(z)\,|dz|$ die hyperbolische Metrik der oberen Halbebene $\mathbb{H}$,

$$L_{\lambda_{\mathbb{H}}}(\gamma) = \int\limits_{\gamma} \lambda_{\mathbb{H}}(z)\,|dz|$$

die hyperbolische Länge des glatten Weges γ in $\mathbb{H}$ und

$$\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(z_0, z_1) := \ \{L_{\lambda_{\mathbb{H}}}(\gamma) \,:\, \gamma \text{ Weg in } \mathbb{H} \text{ von } z_0 \text{ nach } z_1\}$$

den hyperbolischen Abstand der Punkte z_0 und z_1 in $\mathbb{H}$.

Satz 3.22
Für die hyperbolische Metrik $\lambda_{\mathbb{H}}(z)\,|dz|$ der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ gelten die folgenden Aussagen

(a) *Die Dichte von $\lambda_{\mathbb{H}}(z)\,|dz|$ ist gegeben durch*

$$\lambda_{\mathbb{H}}(z) = \frac{1}{\operatorname{Im} z}, \qquad z \in \mathbb{H}.$$

(b) *Für jeden glatten Weg γ in $\mathbb{H}$ gilt $L_{\lambda_{\mathbb{H}}}(\gamma) = L_{\lambda_{\mathbb{D}}}(\Psi \circ \gamma)$.*

(c) *Es gilt für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$*

$$\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(\Psi(z_1), \Psi(z_2)) = \log \frac{|z_1 - \overline{z_2}| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \overline{z_2}| - |z_1 - z_2|}.$$

Korollar 3.23

(a) *Ein glatter Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{H}$ ist genau dann eine hyperbolische Geodätische in $\mathbb{H}$ (d.h. $L_{\lambda_{\mathbb{H}}}(\gamma) = \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(\gamma(a), \gamma(b))$), wenn $\Psi \circ \gamma$ eine hyperbolische Geodätische in $\mathbb{D}$ ist.*

(b) *Die hyperbolischen Strecken in $\mathbb{H}$ (d.h. die Bilder der hyperbolischen Geodätischen in $\mathbb{H}$) sind genau die Urbilder der hyperbolischen Strecken in $\mathbb{D}$ unter Ψ.*

(c) *Die hyperbolischen Geraden in $\mathbb{H}$ (d.h. die Urbilder der hyperbolischen Geraden in $\mathbb{D}$ unter Ψ) sind diejenigen (Teile von euklidischen) Kreislinien oder Geraden, die die reelle Achse senkrecht schneiden.*

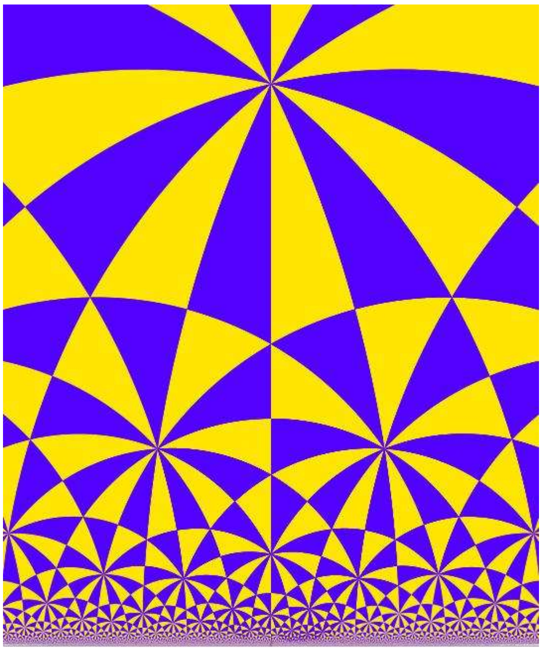


Abbildung 3.2: Links: Hyperbolische Geraden in $\mathbb{H}$; Rechts: "Regular Division of the Plane VI" (M.C. Escher 1957)

Eine Abbildung $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ mit $\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(f(z_1), f(z_2)) = \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ heißt hyperbolische Isometrie auf $\mathbb{H}$.

Satz 3.24
Die hyperbolischen Isometrien f auf $\mathbb{H}$ haben die Form $\Psi^{-1} \circ g \circ \Psi$ mit einer hyperbolischen Isometrie g auf $\mathbb{D}$. Eine Abbildung $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ist genau dann eine hyperbolische Isometrie auf $\mathbb{H}$, wenn es **reelle** *Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gibt mit $ad - bc > 0$ und*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \textit{oder} \quad f(z) = \frac{a(-\overline{z}) + b}{c(-\overline{z}) + d}.$$

Satz 3.25
Für den hyperbolischen Flächeninhalt

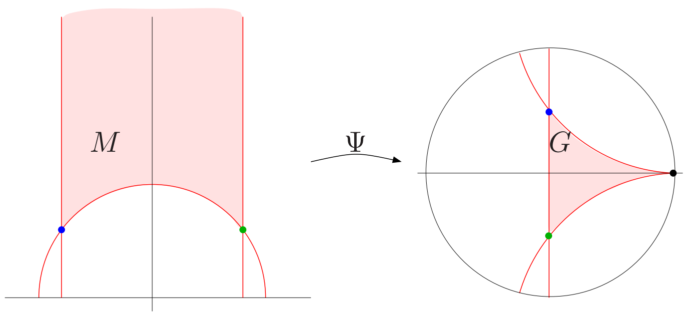
$$A(M) := \iint_M \lambda_{\mathbb{H}}(z)^2 \, dxdy \,, \qquad z = x + iy$$

einer Menge $M \subseteq \mathbb{H}$ gilt

$$A(M) = A(\Psi(M)) \overset{\text{Aufg.5.5}}{=} \iint_{\Psi(M)} \lambda_{\mathbb{D}}(u + iv)^2 \, dudv \,.$$

Insbesondere gilt $A(M) = A(f(M))$ für jede holomorphe hyperbolische Isometrie f auf $\mathbb{H}$.

Beispiel 3.26
Es sei $G \subset \mathbb{D}$ die von den hyperbolischen Geraden durch je zwei der drei Punkte $i/2$, $-i/2$ und 1 umrandete Menge (siehe Skizze) und $M := \Psi^{-1}(G) \subset \mathbb{H}$.



Dann ist $M \subset \mathbb{H}$ von den senkrechten Geraden durch $\pm 4/5$ und der Einheitskreislinie berandet und es gilt

$$\begin{aligned} A(G) &= A(M) = \iint_M \lambda_{\mathbb{H}}(z)^2 \, dxdy = \int_{-4/5}^{4/5} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy \, dx = \int_{-4/5}^{4/5} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \\ &= 2 \arcsin(4/5) \,. \end{aligned}$$

Satz 3.27 (Gauß–Bonnet)
Es sei T ein hyperbolisches Dreieck in $\mathbb{H}$ (oder $\mathbb{D}$) mit Innenwinkel α, β, γ und D das von T umrandete Gebiet. Dann gilt

$$A(D) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \; .$$

Korollar 3.28
Die Summe der Innenwinkel eines hyperbolischen Dreiecks ist stets kleiner als π.

Bemerkung (Die Vermessung der Welt)
In den Sommern der Jahre 1821 bis 1823 vermaß Gauß das Königreich Hannover in Süd-Nord-Richtung, von Göttingen nach Hamburg.

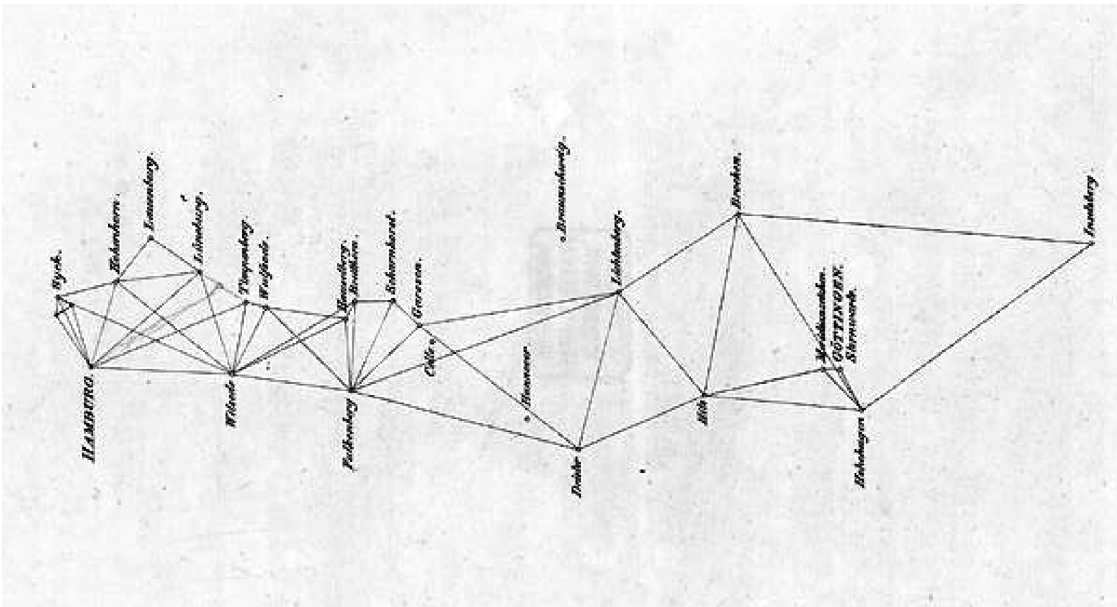


Abbildung 3.3: Skizze Carl Friedrich Gauß' zur Vermessung des Königreichs Hannover

Eines der von Gauß im Verborgenen verfolgten Ziele der Landvermessung war es, das 5. Euklidische Axiom experimentell zu überprüfen. Das Parallelenaxiom in seiner ursprünglichen Formulierung ist jedoch einer experimentellen Untersuchung nicht zugänglich. Es ist aber relativ einfach zu zeigen, dass die Aussage „Die Winkelsumme eines Dreiecks beträgt π“ im Wesentlichen äquivalent zum Parallelenaxiom ist. Der Satz über die Winkelsumme lässt sich aber im Prinzip experimentell überprüfen! Das Schwierige dabei ist jedoch, dass die Abweichung der Winkelsumme vom Sollwert π für „kleine“ Dreiecke zu gering ist, um signifikante Abweichungen vom Sollwert zu erhalten. In der hyperbolischen Geometrie ist dies eine Folgerung aus dem Satz von Gauß–Bonnet. Um das Parallelenaxiom zu falsifizieren, hat Gauß daher das zur damaligen Zeit bis dato größte Dreieck vermessen: vom Hohen Hagen, zum Brocken und zum thüringischen Inselberg. Die Genauigkeit der damaligen Meßverfahren ließ jedoch weder eine Bestätigung noch eine Widerlegung des Parallelenpostulats zu.