3.2 Die hyperbolische Ebene und ihre Isometrien

Satz 3.11
$(\mathbb{D}, \mathrm{d}_{\mathbb{D}})$ *ist ein vollständiger metrischer Raum.*

Für $z_0 \in \mathbb{D}$ und $r > 0$ heißt

$$K_r^h(z_0) := \{z \in \mathbb{D} \, : \, \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z, z_0) < r\}$$

hyperbolische Kreisscheibe mit hyperbolischem Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{D}$ und hyperbolischem Radius $r > 0$. Analog nennen wir

$$C_r^h(z_0) := \{z \in \mathbb{D} \, : \, \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z, z_0) = r\}$$

hyperbolische Kreisslinie mit hyperbolischem Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{D}$ und hyperbolischem Radius $r > 0$.

Bemerkung 3.12
Jede hyperbolische Kreisscheibe $K_r^h(z_0)$ bzw. Kreislinie $C_r^h(z_0)$ ist auch eine euklidische Kreisscheibe $K_R(z_1)$ bzw. Kreislinie $C_R(z_1)$. Dabei gilt stets $r \neq R$ und i.a. $z_0 \neq z_1$, aber stets $\arg z_0 = \arg z_1$ und $|z_1| \leq |z_0|$.

Unser nächstes Ziel ist die Bestimmung aller Isometrien von $(\mathbb{D}, \mathrm{d}_{\mathbb{D}})$ oder kurz aller *hyperbolischen Isometrien*, d.h. aller Abbildungen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) = \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Lemma 3.13 (Schwarz–Pick revisited)
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann gilt

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) \leq \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \qquad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{D} \, .$$

Insbesondere ist jede konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$ eine hyperbolische Isometrie.

Die entsprechende Aussage für den euklidischen Abstand $\mathrm{d}_{\mathbb{C}}$ ist *nicht* richtig. Man betrachte dazu etwa $f(z) = z^2$, $z_1 = 3/4$ und $z_2 = 3i/4$.

Beispiel 3.14
Für jedes $\eta \in \partial\mathbb{D}$ und jedes $z_0 \in \mathbb{D}$ ist

$$f(z) = \eta \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0}\, z}$$

eine hyperbolische Isometrie.

Lemma 3.15
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine hyperbolische Isometrie.

(a) Gilt $f(z_0) = z_0$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}$, so folgt $f(C_R^h(z_0)) \subseteq C_R^h(z_0)$ für alle $R > 0$.

(b) Gilt $f(0) = 0$, so gibt es ein $\eta \in \partial\mathbb{D}$ mit $f(z) = \eta \cdot z$ oder $f(z) = \eta \cdot \overline{z}$.

Satz 3.16
Für eine Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) *f ist eine hyperbolische Isometrie.*

(b) *Es gibt ein $\eta \in \partial\mathbb{D}$ und ein $z_0 \in \mathbb{D}$ mit*

$$f(z) = \eta \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0}\, z} \qquad \textit{oder} \qquad f(z) = \eta \frac{z_0 - \overline{z}}{1 - \overline{z_0}\, \overline{z}}\,.$$

Korollar 3.17
Für die Menge

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) := \{f \ : \ f \textit{ konforme Abbildung von } \mathbb{D} \textit{ auf } \mathbb{D}\}$$

der Automorphismen von $\mathbb{D}$ gilt

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) := \left\{ \eta \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0}\, z} \ : \ \eta \in \partial\mathbb{D}\,,\ z_0 \in \mathbb{D} \right\}.$$

Somit sind die *holomorphen* hyperbolischen Isometrien genau die konformen Abbildungen von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$! Die entsprechende Aussage in der euklidischen Geometrie ist nicht richtig. $f(z) = az + b$ ist für alle $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ eine konforme Abbildung der euklidischen Ebene $\mathbb{C}$ auf sich, aber nur die Abbildungen mit $|a| = 1$ sind auch euklidische Isometrien.

Bemerkung 3.18 (Geometrische Interpretation der hyperbolischen Isometrien)
Es gilt für $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ zeigt eine kurze Rechnung

$$\frac{z_0}{\overline{z_0}} \cdot \overline{\left(\frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0}\, z} \right)} = \frac{1}{\overline{z_0}} + \frac{\frac{1}{|z_0|^2} - 1}{\overline{z} - \frac{1}{z_0}}\,.$$

Dies ist gerade die Spiegelung I_C an der euklidischen Kreislinie $C = C_R(1/\overline{z_0})$ mit $R^2 = 1/|z_0|^2 - 1$! Man beachte (Pythagoras!), dass C die Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$ senkrecht schneidet! Bezeichnet man mit

$$I_L(z) := z_0 \cdot \overline{\left(\frac{z}{z_0} \right)},$$

die Inversion an der hyperbolischen (oder euklidischen) Geraden durch 0 und z_0, so gilt also

$$\frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0}\, z} = (I_L \circ I_C)(z)\,.$$

Insbesondere ist jede Spiegelung an einer hyperbolischen Geraden eine hyperbolische Isometrie. Bestimmt man zu $\eta \in \partial\mathbb{D}$ ein $z_1 \in \partial\mathbb{D}$ mit

$$\eta = \frac{z_1}{\overline{z_1}} \cdot \frac{\overline{z_0}}{z_0}$$

und betrachtet die Spiegelung $I_G(z) = z_1 \cdot \overline{(z/z_1)}$ an der Geraden G durch 0 und z_1, so folgt

$$\eta \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0}\, z} = (I_G \circ I_L \circ I_L \circ I_C)(z) = (I_G \circ I_C)(z)\,.$$

und

$$\eta \frac{z_0 - \overline{z}}{1 - \overline{z_0}\, \overline{z}} = (I_G \circ I_C)(\overline{z}) = (I_G \circ I_C \circ I_{\mathbb{R}})(z)\,.$$

Satz 3.19 (Der Dreispiegelungssatz)
Jede hyperbolische Isometrie setzt sich aus maximal 3 *Spiegelungen an hyperbolischen Geraden zusammen.*

Der folgende Satz klärt, warum man Inversionen an hyperbolischen Geraden tatsächlich als "Spiegelungen" bezeichnen darf.

Satz 3.20
Es sei C eine hyperbolische Gerade, $a \in \mathbb{D} \backslash C$ und $a' := I_C(a)$. Dann schneidet die hyperbolische Gerade durch a und a' die Gerade C senkrecht. Für den Schnittpunkt b gilt $\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(a, b) = \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(a', b)$.

Bemerkung 3.21 (Konstruktives hyperbolisches Spiegeln)
Es sei C eine hyperbolische Gerade und $a \in \mathbb{D} \backslash C$. Um $a' = I_C(a)$ zu finden, wähle man $z_1 \neq z_2$ auf C und setze $r_1 := \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_1, a)$ bzw. $r_2 := \mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_2, a)$. Dann gilt $C^h_{r_1}(z_1) \cap C^h_{r_2}(z_2) = \{a, a'\}$.

Zusammenfassung (Die euklidischen Axiome)
Im metrischen Raum $(\mathbb{D}, \mathrm{d}_{\mathbb{D}})$ gelten die folgenden Aussagen.

(1) Durch je zwei Punkte $z_0 \neq z_1$ in $\mathbb{D}$ gibt es eine hyperbolische Strecke (siehe Satz 3.7).

Vgl. 1. Euklidisches Axiom: *"dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen könne"*

(2) Jede hyperbolische Strecke liegt auf einer hyperbolischen Geraden (siehe Satz 3.7 und Definition 3.9).

Vgl. 2. Euklidisches Axiom: *"dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern könne"*

(3) Für alle $z_0 \in \mathbb{D}$ und $r > 0$ gibt es eine hyperbolische Kreislinie $C^h_r(z_0)$ *in* $\mathbb{D}$ (siehe Satz 3.7).

Vgl. 3. Euklidisches Axiom: *"dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen könne"*

(4) Schneiden sich die hyperbolischen Geradenpaare L_1 und L_2 bzw. L_3 und L_4 jeweils senkrecht, so gibt es eine Isometrie von $L_1 \cup L_2$ auf $L_3 \cup L_4$ (siehe Beweis von Satz 3.20).

Vgl. 4. Euklidisches Axiom: *"dass alle rechten Winkel einander gleich seien"*

(5) Zu einer hyperbolischen Geraden $L \subseteq \mathbb{D}$ und durch jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{D} \backslash L$ gibt es mehr als eine hyperbolische Gerade, die L nicht schneidet.

Vgl. 5. Euklidisches Axiom: *"dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirke, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte würden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen würden auf der Seite, auf der die Winkel lägen, die zusammen kleiner als zwei rechte seien".*