– Kapitel 3 –

Hyperbolische Geometrie

3.1 Die hyperbolische Metrik

Satz 3.1
Es sei $\lambda(z)\,|dz|$ eine konforme Pseudo–Metrik auf $\mathbb{D}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) Für jede konforme Abbildung f von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$ gilt

$$\lambda(f(z))\,|f'(z)|\,|dz| = \lambda(z)\,, \qquad z \in \mathbb{D}\,.$$

(b) Es gibt ein $c > 0$ mit $\lambda = c \cdot \lambda_{\mathbb{D}}$.

Bemerkung

(a) Die Metrik $c \cdot \lambda_{\mathbb{D}}$ hat die Krümmung $\equiv -1/c^2$. Dies erklärt den Faktor 2 in der Formel

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2}{1-|z|^2}\,,$$

der sichert, dass $\kappa_{\lambda_{\mathbb{D}}} \equiv -1$. In manchen Lehrbüchern der Geometrie bzw. Funktionentheorie wird die Metrik

$$\frac{1}{1-|z|^2}\,|dz|$$

als hyperbolische Metrik von $\mathbb{D}$ bezeichnet. Diese Metrik hat die Krümmung $\equiv -4$.

(b) Satz 3.1 impliziert insbesondere, dass

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ und jede konforme Abbildung f von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$. Wir werden später alle konformen Abbildungen von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$ *explizit* bestimmen können.

Definition 3.2
Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$ ein glatter Weg in $\mathbb{D}$. Dann heißt

$$L_{\lambda_{\mathbb{D}}}(\gamma) := \int\limits_{\gamma} \lambda_{\mathbb{D}}(z)\,|dz| = \int\limits_a^b \frac{2\,|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\,dt$$

die hyperbolische Länge von γ.

Beispiel 3.3
Für $z_1 \in \mathbb{D}$ und $\gamma(t) := tz_1$, $t \in [0,1]$, gilt

$$L_{\lambda_{\mathbb{D}}}(\gamma) = \log \frac{1+|z_1}{1-|z_1|}\,.$$

Man beachte, dass für $|z_1| \to 1$ die hyperbolische Länge der eukldiischen Strecke $[0,z_1]$ von 0 nach z_1 gegen $+\infty$ strebt!

Proposition 3.4
Es sei $z_1 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$ ein glatter Weg in $\mathbb{D}$ von 0 nach z_1. Dann gilt

$$L_{\lambda_{\mathbb{D}}}(\gamma) \geq \log \frac{1+|z_1}{1-|z_1|}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\gamma([a,b]) = [0,z_1]$ und $\mathrm{Re}(\overline{z_1}\gamma'(t)) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$.

Definition 3.5
Für $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ bezeichnet

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_0,z_1) := \inf\{L_{\lambda_{\mathbb{D}}}(\gamma) \,:\, \gamma \text{ glatter Weg in } \mathbb{D} \text{ von } z_0 \text{ nach } z_1\}$$

den hyperbolischen Abstand von z_0 und z_1. Ein glatter Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$ von z_0 nach z_1, dessen hyperbolische Länge gleich $\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_0,z_1)$ ist, heißt hyperbolische Geodätische von z_0 nach z_1. Das Bild jeder hyperbolischen Geodätischen von z_0 nach z_1 heißt hyperbolische Strecke von z_0 nach z_1.

Bemerkung 3.6
Proposition 3.4 zeigt, dass

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(0,z_1) = \log \frac{1+|z_1|}{1-|z_1|}\,,$$

und $\gamma(t) = tz_1$ ist *eine* hyperbolische Geodätische von 0 nach z_1. Es gibt ferner genau eine hyperbolische Strecke von 0 nach z_1 und zwar die euklidische Strecke $[0,z_1]$.

Satz 3.7
Für $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ gilt

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_0,z_1) = \log \frac{1+\left|\frac{z_0-z_1}{1-\overline{z_0}z_1}\right|}{1-\left|\frac{z_0-z_1}{1-\overline{z_0}z_1}\right|}\,.$$

Für $z_0 \neq z_1$ gibt es genau eine hyperbolische Strecke $[z_0,z_1]_h$ von z_0 nach z_1. $[z_0,z_1]_h$ ist der zwischen z_0 und z_1 gelegene Teil der euklidischen Kreislinie/euklidischen Geraden durch z_0 und z_1, die die Einheitskreislinie senkrecht schneidet.

Bemerkung 3.8
(a) Liegen $z_0 \neq z_1$ auf einer euklidischen Geraden durch 0, so liegt $[z_0,z_1]_h$ auf einer euklidischen Geraden durch 0. Liegen $z_0 \neq z_1$ nicht auf einer euklidischen Geraden durch 0, so liegt $[z_0,z_1]_h$ auf einer euklidischen Kreislinie, die $\partial\mathbb{D}$ senkrecht schneidet.

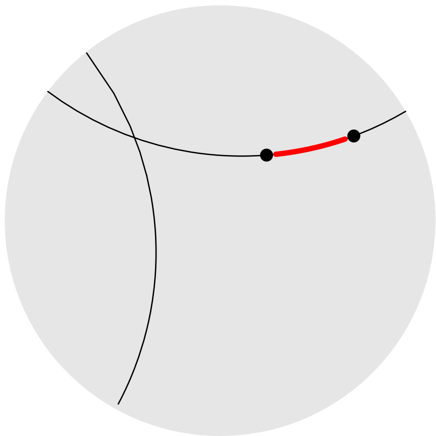

Abbildung 3.1: Hyperbolische Strecken und Geraden

(b) Die hyperbolische Strecke $[z_0, z_1]_h$ kann man wie folgt bestimmen. Man betrachte die konforme Abbildung (Möbiustransformation)

$$T(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0}\, z}$$

von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$. Dann ist $[z_0, z_1]_h$ das Bild der euklidischen Strecke $[0, T(z_1)]$ unter $T = T^{-1}$. Eine mögliche explizite Parametrisierung, d.h. hyperbolische Geodätische $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ von z_0 nach z_1 ist folglich durch $\gamma(t) = T(t\, T(z_1))$, also durch

$$\gamma(t) = \frac{z_0 - t\dfrac{z_0 - z_1}{1 - \overline{z_0} z_1}}{1 - t\,\overline{z_0}\dfrac{z_0 - z_1}{1 - \overline{z_0} z_1}}\,, \qquad t \in [0,1]$$

gegeben.

(c) Es gilt

$$\mathrm{d}_{\mathbb{D}}(z_0, z_1) = \mathrm{d}_{\mathbb{D}}\left(0, \frac{z_0 - z_1}{1 - \overline{z_0}\, z_1}\right)$$

für alle $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$.

Definition 3.9
Eine hyperbolische Gerade ist der Durchschnitt der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ mit einer euklidischen Kreislinie oder einer euklidischen Geraden, die die Einheitskreislinie senkrecht schneidet.

Bemerkung 3.10
Durch je zwei Punkte z_0 und z_1 von $\mathbb{D}$ gibt es genau eine hyperbolische Gerade. Zu jeder hyperbolischen Geraden L und jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{D}\backslash L$ gibt es unendlich viele hyperbolische Geraden durch z_0, die L nicht schneiden, d.h. zu jeder hyperbolischen Geraden gibt es unendlich viele hyperbolische “Parallelen” !