– Kapitel 2 –

Konforme Metriken

2.1 Die euklidische Metrik: intrinsische Charakterisierung

Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein glatter (d.h. stetig differenzierbarer) Weg, so ist die *euklidische Weglänge* $L_1(\gamma)$ von γ gegeben durch

$$L_1(\gamma) = \int\limits_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, dt \, .$$

Für das Integral benutzen wir im folgenden die nützliche Schreibweise

$$\int\limits_\gamma |dz| := \int\limits_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, dt \, .$$

Man nennt den (formalen) Ausdruck $|dz|$ die euklidische Metrik.

Beispiel 2.1
Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$ gegeben. Dann ist $\dot{\gamma}(t) = z_1 - z_0$ und $L_1(\gamma) = |z_1 - z_0| = \mathrm{d}_{\mathbb{C}}(z_0, z_1)$. Man nennt

$$[z_0, z_1] := \{(1-t)z_0 + tz_1 \, : \, t \in [0,1]\}$$

die euklidische Strecke von z_0 nach z_1.

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und z_0, z_1 seien zwei Punkte in G. Wir suchen denjenigen glatten Weg $\gamma : [a,b] \to G$ von z_0 nach z_1 mit der kleinsten euklidischen Länge.

Proposition 2.2
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, z_0, z_1 seien zwei verschiedene Punkte in G und die euklidische Strecke $[z_0, z_1]$ von z_0 nach z_1 liege in G. Dann gilt für jeden glatten Weg $\gamma : [a,b] \to G$, der z_0 und z_1 verbindet, die Ungleichung $L_1(\gamma) \geq |z_1 - z_0|$. Ist $\gamma : [a,b] \to G$ injektiv, so gilt Gleichheit genau dann, wenn $\gamma([a,b]) = [z_0, z_1]$ gilt.

Beweis. Es sei

$$T(z) = \frac{\overline{z_1 - z_0}}{|z_1 - z_0|}(z - z_0) \, .$$

Dann ist T eine Isometrie der euklidischen Ebene mit $T(z_0) = 0$ und $T(z_1) = |z_1 - z_0| > 0$. Ist $\gamma : [a, b] \to G$ ein glatter Weg, der z_0 und z_1 verbindet, so verbindet $T \circ \gamma$ die Punkte 0 und $|z_1 - z_0|$ und es gilt $L_1(T \circ \gamma) = L_1(\gamma)$. Folglich

$$\begin{aligned} L_1(\gamma) &= L_1(T \circ \gamma) = \int_a^b |(T \circ \gamma)^{\cdot}(t)|\, dt \geq \int_a^b \operatorname{Re}\left((T \circ \gamma)^{\cdot}(t)\right)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\operatorname{Re}(T \circ \gamma)(t)\right)\, dt \\ &= \operatorname{Re}(T \circ \gamma)(b) - \operatorname{Re}(T \circ \gamma)(a) = |z_1 - z_0|\,. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\operatorname{Im}\left((T \circ \gamma)^{\cdot}(t)\right) = 0$ und $\operatorname{Re}\left((T \circ \gamma)^{\cdot}(t)\right) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt. Dies ist für einen injektiven Weg $\gamma : [a, b] \to G$ von z_0 nach z_1 genau dann erfüllt, wenn $(T \circ \gamma)([a, b]) = [T(z_0), T(z_1)]$, d.h. wenn $\gamma([a, b]) = [z_0, z_1]$. ∎

Korollar 2.3
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, z_0, z_1 seien zwei verschiedene Punkte in G und die euklidische Strecke $[z_0, z_1]$ liege in G. Dann gilt für den euklidischen Abstand $\mathrm{d}_{\mathbb{C}}(z_0, z_1)$:

$$\mathrm{d}_{\mathbb{C}}(z_0, z_1) = \inf\{L_1(\gamma) \,:\, \gamma \textit{ glatter Weg in } G \textit{ von } z_0 \textit{ nach } z_1\}\,.$$

Definition 2.4
Eine offene Menge $\subseteq \mathbb{C}$ heißt Gebiet, wenn es zu je zwei Punkten einen Weg in G gibt, der diese beiden Punkte verbindet.

2.2 Konforme Metriken

Im folgenden seien mit D und G stets Gebiete in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Konforme Abbildungen erhalten die Winkel zwischen sich schneidenden Wegen, aber die euklidische Länge $L_1(\gamma)$ eines Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist im allgemeinen nicht konform invariant, d.h. $L_1(\gamma) \neq L_1(f \circ \gamma)$ für eine konforme Abbildung f. Es ist daher ratsam eine flexiblere Methode zur Messung von Weglängen zu erlauben.

Definition 2.5 (Konforme Dichten)
Eine stetige Funktion $\lambda : G \to [0, +\infty)$, $\lambda \not\equiv 0$, heißt konforme Dichte auf G.

Definition 2.6 (Konforme Metriken and konforme Pseudo–Metriken)
Es sei $\gamma : [a, b] \to G$ ein glatter Weg in G und λ eine konforme Dichte auf G. Dann heißt

$$L_\lambda(\gamma) := \int_\gamma \lambda(z)\, |dz| := \int_a^b \lambda(\gamma(t))\, |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

λ–Länge des Weges γ und die Größe $\lambda(z)\, |dz|$ heißt konforme Pseudo–Metrik auf G. Falls $\lambda(z) > 0$ für alle $z \in G$, so heißt $\lambda(z)\, |dz|$ konforme Metrik auf G. Wir nennen eine konforme Pseudo–Metrik $\lambda(z)\, |dz|$ auf G regulär, falls $\lambda \in C^2(G')$ für $G' := \{z \in G : \lambda(z) > 0\}$.

Beispiel 2.7
Für $\lambda(z)\,|dz| = \frac{|dz|}{1-|z|}$ auf $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$ und $\gamma(t) = t$, $t \in [0, r]$, gilt

$$L_\lambda(\gamma) = \int\limits_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|} = \int\limits_0^r \frac{dt}{1-t} = \log \frac{1}{1-r} \,.$$

Wir betrachten eine konforme Pseudo–Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ auf dem Gebiet D und eine nicht–konstante holomorphe Funktion $w = f(z)$ von G nach D. Wir suchen eine konforme Pseudo–Metrik $\mu(z)\,|dz|$ auf G, derart, dass $L_\mu(\gamma) = L_\lambda(f \circ \gamma)$ für jeden glatten Weg γ in G. Aufgrund der Substitutionsregel

$$L_\lambda(f \circ \gamma) = \int\limits_{f\circ\gamma} \lambda(w)\,|dw| = \int\limits_\gamma \lambda(f(z))\,|f'(z)|\,|dz| = L_{\lambda\circ f \cdot |f'|}(\gamma)$$

gibt es nur eine mögliche Wahl für $\mu(z)\,|dz|$.

Definition 2.8
Es sei $\lambda(w)\,|dw|$ eine konforme Pseudo–Metrik auf D und $w = f(z)$ eine nicht–konstante holomorphe Funktion von G nach D. Dann heißt die konforme Pseudo–Metrik

$$(f^*\lambda)(z)\,|dz| := \lambda(f(z))\,|f'(z)|\,|dz| \tag{2.1}$$

der Pullback (oder die Zurückholung) von $\lambda(w)\,|dw|$ unter $w = f(z)$.

Wir halten fest:

$$L_{f^*\lambda}(\gamma) = L_\lambda(f \circ \gamma) \,. \tag{2.2}$$

Beispiel 2.9
Für $\lambda(w)\,|dw| := 1\,|dw|$ auf $G = \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \to C$ gegeben durch $f(z) = z^2$ gilt $(f^*\lambda)(z) = \lambda(f(z))\,|f'(z)| = \lambda(z^2)\,2\,|z| = 2\,|z|$. Der Weg $\gamma(t) = e^{i\pi/4}t$, $t \in [0, 2]$, wird durch f auf den Bildweg $(f \circ \gamma)(t) = it^2$, $t \in [0, 2]$, abgebildet mit (euklidischer) λ–Weglänge $L_\lambda(\gamma) = 4$. Für die $f^*\lambda$–Weglänge von γ gilt dann nach (2.2) ebenfalls $L_{f^*\lambda}(\gamma) = 4$. Dies lässt sich auch einfach direkt nachrechnen

$$L_{f^*\lambda}(\gamma) = \int\limits_\gamma (f^*\lambda)(z)\,|dz| = \int\limits_\gamma 2|z|\,|dz| = \int\limits_0^2 2|\gamma(t)|\,|\gamma'(t)|\,dt = 2\int\limits_0^2 t\,dt = 4 \,.$$

2.2.1 Krümmung

Es sei $\lambda(w)\,|dw|$ eine konforme Pseudo–Metrik. Wir suchen eine *konforme Invariante* T_λ, derart, dass

$$T_{f^*\lambda}(z) = T_\lambda(f(z))$$

für alle holomorphen Funktionen $w = f(z)$.

Dazu betrachte man (2.1). Wir müssen den "konformen Faktor" $|f'(z)|$ eliminieren. Zu diesem Zwecke beachten wir, dass $\log|f'|$ harmonisch ist, d.h. $\Delta(\log|f'|) = 0$. Dies führt auf

$$\Delta(\log f^*\lambda)(z) = \Delta(\log \lambda\circ f)(z) + \Delta(\log|f'|)(z) = \Delta(\log \lambda\circ f)(z) = \Delta(\log\lambda)(f(z))\,|f'(z)|^2 \,.$$

Im letzten Schritt haben die Kettenregel $\Delta(u \circ f) = (\Delta u \circ f) \cdot |f'|^2$ für den Laplace Operator Δ und holomorphe Funktionen f benutzt. Somit besitzt $T_\lambda(z) := \Delta(\log \lambda)(z)/\lambda(z)^2$ die gewünschte Eigenschaft.

Definition 2.10 (Gaußsche Krümmung)
Es sei $\lambda(z)\,|dz|$ eine reguläre konforme Pseudo–Metrik auf dem Gebiet G. Dann ist

$$\kappa_\lambda(z) := -\frac{\Delta(\log \lambda)(z)}{\lambda(z)^2}$$

für jeden Punkt $z \in G$ mit $\lambda(z) > 0$ definiert. Wir nennen κ_λ die (Gaußsche) Krümmung von $\lambda(z)\,|dz|$.

Unsere Vorüberlegungen können wir damit wie folgt zusammenfassen.

Satz 2.11 (Theorema Egregium, Gauß 1827)
Für jede nicht konstante holomorphe Funktion $f : D \to G$ und jede reguläre konforme Pseudo–Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ auf G gilt

$$\kappa_{f^*\lambda}(z) = \kappa_\lambda(f(z)) \tag{2.3}$$

für jeden Punkt $z \in D$ mit $\lambda(f(z))\,|f'(z)| > 0$.

Für die euklidische Metrik $\lambda(z)\,|dz| := |dz|$ ergibt sich $\kappa_\lambda(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung

(a) Die grundlegende Beziehung (2.3) gilt insbesondere für jede konforme Abbildung f des Gebietes D auf das Gebiet G. Man sagt deshalb, dass die Krümmung κ_λ konform invariant ist.

(b) Gilt $\kappa_\lambda(z) \equiv k \in \mathbb{R}$, so ist $\kappa_{f^*\lambda}(z) \equiv k$. Im Falle konstanter Krümmung $k \in \mathbb{R}$ ist daher $\kappa_{f^*\lambda}$ eine *absolute* konforme Invariante. Es ist somit zu erwarten, dass konforme Pseudo–Metriken mit konstanter Krümmung eine besondere Rolle spielen. Dies wird sich im Laufe unserer weiteren Überlegungen in der Tat bestätigen.

Beispiel 2.12
Sei $\lambda(z) := \frac{2}{1-|z|^2}$ definiert für $z \in G := \mathbb{D}$. Dann ist $\lambda(z)\,|dz|$ eine reguläre konforme Metrik auf $\mathbb{D}$ und man berechnet sehr einfach

$$\kappa_\lambda(z) = -1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}\,.$$

Beispiel 2.13
Sei $\lambda(w) := \frac{2}{1-|w|^2}$, $w \in \mathbb{D}$ und $f(z) := \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$, $z \in \mathbb{D}$. Die Übungsaufgaben 1.3 (b) und (c) zeigen, dass $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\backslash\{0\} \subset \mathbb{D}$, d.h. der Pullback

$$(f^*\lambda)(z)\,|dz| = \frac{4}{1-\left|\exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)\right|^2}\,\frac{1}{|1-z|^2}\left|\exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)\right|\,|dz|$$

stellt eine reguläre konforme Metrik auf $\mathbb{D}$ dar. Die Krümmung von $(f^*\lambda)(z)\,|dz|$ berechnet man besser nicht direkt mit Definition 2.10, sondern bequem mit dem Theorema Egregium zu $\kappa_{f^*\lambda} \equiv -1$.

2.3 Der Fundamentalsatz

Definition 2.14 (Die hyperbolische Metric)
Wir nennen

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z)\,|dz| := \frac{2}{1-|z|^2}\,|dz|$$

die hyperbolische Metrik der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$ *und* $\lambda_{\mathbb{D}}$ *die hyperbolische Dichte auf* $\mathbb{D}$. *Die Krümmung von* $\lambda_{\mathbb{D}}(z)\,|dz|$ *beträgt* $\equiv -1$.

Die hyperbolische Metrik $\lambda_{\mathbb{D}}(z)\,|dz|$ besitzt eine wichtige Extremaleigenschaft.

Satz 2.15 (Fundamentalsatz, Lemma von Ahlfors' 1938)
Es sei $\lambda(z)\,|dz|$ *eine reguläre konforme Pseudo–Metrik auf* $\mathbb{D}$ *mit* $\kappa_\lambda \leq -1$ *(d.h. es ist* $\kappa_\lambda(z) \leq -1$ *für alle* $z \in \mathbb{D}$ *mit* $\lambda(z) > 0$*). Dann gilt* $\lambda(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{D}$.

Beweis. (a) Man fixiere $0 < R < 1$. Die durch

$$\lambda_R(z) := \frac{2R}{R^2-|z|^2} = \frac{1}{R}\lambda_{\mathbb{D}}(z/R)$$

induzierte reguläre konforme Metrik $\lambda_R(z)\,|dz|$ auf $|z| < R$ besitzt die Krümmung $\kappa_{\lambda_R}(z) \equiv -1$. Dies folgt aus dem Theorema Egregium mit $f(z) = z/R$.

(b) Da $\lambda \not\equiv 0$, gibt es ein $R_0 \in (0,1)$ mit $\lambda \not\equiv 0$ auf $|z| < R_0$. Wähle $R \in (R_0, 1)$. Die für $|z| < R$ definierte nichtnegative stetige Funktion $z \mapsto \lambda(z)/\lambda_R(z)$ ist nicht $\equiv 0$ und strebt für $|z| \to R$ gegen 0. Sie nimmt daher in einem inneren Punkt $|z_0| < R$ ihren größten Wert an, der notwendigerweise positiv ist. Die Funktion

$$u(z) := \log\left(\frac{\lambda(z)}{\lambda_{\mathbb{D}_R}(z)}\right)$$

ist also in einer Umgebung von z_0 wohldefiniert und hat in z_0 ein lokales Maximum. Daher gilt

$$0 \geq \Delta u(z_0) = \Delta \log \lambda(z_0) - \Delta \log \lambda_R(z_0) \geq \lambda(z_0)^2 - \lambda_R(z_0)^2\,.$$

Es folgt $\lambda(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}_R}(z)$ für alle $|z| < R$. Lässt man jetzt $R \nearrow 1$, so ergibt sich $\lambda(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$. ∎

Korollar 2.16 (Lemma von Schwarz–Pick)
Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *holomorph. Dann gilt*

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Beweis. Für eine nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist $(f^*\lambda_{\mathbb{D}})(z)\,|dz|$ eine reguläre konforme Pseudo–Metrik auf $\mathbb{D}$ mit konstanter Krümmung -1. Der Fundamentalsatz impliziert $(f^*\lambda_{\mathbb{D}})(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Dies ist die Behauptung. ∎

Korollar 2.17
Es gibt keine reguläre konforme Pseudo–Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ *auf ganz* $\mathbb{C}$ *mit* $\kappa_\lambda \leq -1$.

Beweis. Sei $\lambda(w)\,|dw|$ eine reguläre konforme Pseudo–Metrik auf ganz $\mathbb{C}$ mit $\kappa_\lambda \leq -1$. Man beachte die Konvention, dass dann insbesondere $\lambda \not\equiv 0$ gilt. Fixiere $R > 0$ und betrachte $f_R(z) := Rz$ für $z \in \mathbb{D}$. Dann ist $(f_R^*\lambda)(z)\,|dz|$ eine reguläre konforme Pseudo–Metrik auf $\mathbb{D}$ mit Krümmung ≤ -1. Der Fundamentalsatz impliziert $\lambda(Rz)\,R = (f_R^*\lambda)(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$, d.h.

$$0 \leq \lambda(w) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(w/R)\frac{1}{R} = \frac{2R}{R^2 - |w|^2}$$

für jedes $|w| < R$ und alle $R > 0$. Lässt man $R \to +\infty$, so erhält man $\lambda \equiv 0$. Widerspruch! ■

Korollar 2.18
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $\lambda(w)\,|dw|$ eine reguläre konforme Metrik auf G mit $\kappa_\lambda \leq -1$. Dann ist jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to G$ konstant.

Beweis. Es sei $\lambda(w)\,|dw|$ eine reguläre konforme Metrik auf G mit $\kappa_\lambda \leq -1$. Wir nehmen an, dass eine nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to G$ gibt. Dann ist $(f^*\lambda)(z)\,|dz|$ eine reguläre konforme Pseudo–Metrik auf $\mathbb{C}$ mit Krümmung ≤ -1. Dies widerspricht Korollar 2.17. ■

Korollar 2.19 (Satz von Liouville)
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt (d.h. es gibt ein $M > 0$ mit $|f(z)| < M$ für alle $z \in \mathbb{C}$). Dann ist f konstant.

Beweis. Durch $g(z) := f(z)/M$ ist eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ definiert. Da $\mathbb{D}$ eine reguläre konforme Metrik mit Krümmung ≤ -1 besitzt (z.B. die hyperbolische Metrik $\lambda_{\mathbb{D}}(z)\,|dz|$), ist g nach Korollar 2.18 konstant. Somit ist auch f konstant. ■

Korollar 2.20 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes Polynom $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Es sei $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Angenommen, $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $f(z) := 1/p(z)$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Wegen

$$f(1/z) = \frac{z^n}{a_n + a_{n-1}z + \ldots + a_0 z^n} \overset{z\to 0}{\longrightarrow} 0\,,$$

gibt es ein $R > 0$ mit $|f(1/z)| \leq 1$ für alle $|1/z| \leq 1/R$, also $|f(z)| \leq 1$ für alle $|z| \geq R$. Da $|f|$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $|z| \leq R$ durch eine Zahl $L > 0$ beschränkt ist, ist f überhaupt beschränkt, also konstant nach dem Satz von Liouville. Widerspruch! ■

Korollar 2.21 (Satz von Casorati–Weierstraß)
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$, d.h. die Bildmenge $f(\mathbb{C})$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $f(\mathbb{C})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ liegt. Dann gibt es mindestens einen Punkte $w_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, derart, dass die offene Kreisscheibe $K_\varepsilon(w_0)$ keinen Punkt mit $f(\mathbb{C})$ gemeinsam hat. Andernfalls würde für jeden Punkt $w_0 \in \mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon > 0$ mindestens ein Punkt in $f(\mathbb{C}) \cap K_\varepsilon(w_0)$ existieren, d.h. in jeder Umgebung jedes Punktes $w_0 \in \mathbb{C}$ läge mindestens ein Punkt aus der Bildmenge $f(\mathbb{C})$, die somit dicht in $\mathbb{C}$ liegen würde, im Widerspruch zur Annahme.

Aus $K_\varepsilon(w_0) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$ folgt, dass $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$ für die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $g(z) = 1/(f(z) - w_0)$. Der Satz von Liouville impliziert, dass g und somit auch f konstant sein müssten. Widerspruch! ∎

Satz 2.22 (Satz von Picard)
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann nimmt f jede komplexe Zahl mit höchstens einer Ausnahme als Wert an.

Satz 2.23
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass $\mathbb{C}\backslash G$ mindestens zwei Punkte enthält. Dann gibt es eine reguläre konforme Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ auf G mit $\kappa_\lambda \leq -1$.

Beweis von Satz 2.22. Wir nehmen an, dass f die zwei komplexen Zahlen $a \neq b$ nicht als Wert annimmt. Dann bildet f in das Gebiet $G := \mathbb{C}\backslash\{a, b\}$ hinein ab. Nach Satz 2.23 besitzt G aber eine reguläre konforme Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ mit $\kappa_\lambda \leq -1$. Korollar 2.18 impliziert dann, dass f konstant ist. ∎

Beweis von Satz 2.23. (a) Wir zeigen zuerst, dass für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ durch

$$\lambda(z) := \varepsilon \frac{\sqrt{1 + |z|^{\frac{1}{3}}}}{|z|^{\frac{5}{6}}} \frac{\sqrt{1 + |z-1|^{\frac{1}{3}}}}{|z-1|^{\frac{5}{6}}}$$

eine reguläre konforme Metrik auf $\mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ mit $\kappa_\lambda \leq -1$ definiert wird. Übungsaufgabe 3.3 liefert für

$$\tau(z) := \frac{\sqrt{1 + |z|^{\frac{1}{3}}}}{|z|^{\frac{5}{6}}}$$

zunächst

$$\Delta(\log \tau)(z) = \Delta \log \frac{\sqrt{1 + |z|^{\frac{1}{3}}}}{|z|^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{18} \frac{1}{(1 + |z|^{\frac{1}{3}})^2 |z|^{\frac{5}{3}}}$$

und für $\tau(z-1)$ analog

$$\Delta \log \frac{\sqrt{1 + |z-1|^{\frac{1}{3}}}}{|z-1|^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{18} \frac{1}{(1 + |z-1|^{\frac{1}{3}})^2 |z-1|^{\frac{5}{3}}} .$$

Es folgt für

$$\kappa_\lambda(z) = -\frac{\Delta(\log \lambda)(z)}{\lambda(z)^2} = -\frac{\Delta(\log \tau)(z) + \Delta(\log \tau)(z-1)}{\varepsilon^2 \cdot \tau(z)^2 \cdot \tau(z-1)^2}$$

die Identität

$$\kappa_\lambda(z) = -\frac{1}{18\,\varepsilon^2}\left[\frac{|z-1|^{5/3}}{(1+|z|^{\frac{1}{3}})^3(1+|z-1|^{\frac{1}{3}})} + \frac{|z|^{5/3}}{(1+|z|^{\frac{1}{3}})(1+|z-1|^{\frac{1}{3}})^3}\right].$$

Der Ausdruck $h(z)$ in eckigen Klammern hat eine positive untere Schranke γ auf ganz $\mathbb{C}$, denn

$$\lim_{z\to 0} h(z) = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{z\to 1} h(z) = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{|z|\to+\infty} h(z) = +\infty\,.$$

Also gilt $\kappa_\lambda(z) \leq -\gamma/(18\varepsilon^2) \leq -1$, falls $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist.

(b) Falls $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$, so liefert der Pullback der Metrik $\lambda(w)\,|dw|$ aus (a) unter $T(z) = (z-a)/(b-a)$ eine reguläre konforme Metrik auf $\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ mit Krümmung ≤ -1.

(c) Ist G ein Gebiet mit $\mathbb{C}$ mit zwei Punkten $a \neq b$ in $\mathbb{C}\backslash G$, so ist $G \subset \mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ und die Metrik aus (b) ist dann auch eine reguläre konforme Metrik auf G mit Krümmung ≤ -1. ∎