(c) *Das Bild einer Kreislinie oder einer Geraden unter einer Möbiustransformation $T$ ist wieder eine Kreislinie oder eine Gerade.*

Wir überlassen den Beweis von (a) und (b) den Leserinnen. Aufgrund von (b) genügt es, Aussage (c) für $T(z) = 1/z$ nachzuprüfen. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 1.22**
*Eine Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann eine Kreislinie oder Gerade, wenn es $A, C \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{C}$ gibt mit $|B|^2 - AC > 0$ und*

$$K = \{z \in \mathbb{C} \,:\, Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0\}\,.$$

*Hierbei ist $K$ eine Gerade genau dann, wenn $A = 0$.*

**Beweis von Satz 1.21 (c) für $T(z) = z$.**
Sei $K$ eine Kreislinie oder Gerade. Nach Lemma 1.22 gibt es $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ mit $|B|^2 - AC > 0$ und $z \in K$ genau dann, wenn $Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$. Es folgt für $z \neq 0$ und $w = 1/z \neq 0$:

$$z \in K \Leftrightarrow Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0 \Leftrightarrow A + \overline{B}\overline{w} + Bw + Cw\overline{w} = 0\,.$$

Daraus kann man mit Hilfe von Lemma 1.22 folgendes entnehmen:

(i) Ist $K$ eine Kreislinie mit $0 \notin K$, so ist $T(K)$ eine Kreislinie.

(ii) Ist $K$ eine Kreislinie mit $0 \in K$, so ist $T(K \backslash \{0\})$ eine Gerade.

(iii) Ist $K$ eine Gerade mit $0 \notin K$, so ist $T(K) \cup \{0\}$ eine Kreislinie.

(iv) Ist $K$ eine Gerade mit $0 \in K$, so ist $T(K \backslash \{0\}) \cup \{0\}$ eine Gerade. ■

Im folgenden sei die Kreislinie mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ mit

$$C_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| = r\}$$

bezeichnet.

**Definition 1.23**
*Es sei $C = C_r(z_0)$ eine Kreislinie in $\mathbb{C}$. Dann heißt die Abbildung*

$$I_C(z) := \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} + z_0\,, \qquad z \in \mathbb{C} \backslash \{\overline{z_0}\}$$

*Inversion (oder Spiegelung) an $C$.*

Setzt man $T(z) = (z - z_0)/r$, so gilt $I_C(z) = T^{-1}(1/\overline{T(z)})$.

**Bemerkung 1.24**
Sei $I_C$ die Inversion an $C = C_r(z_0)$.

(a) Für alle $z \in C$ gilt $I_C(z) = z$.

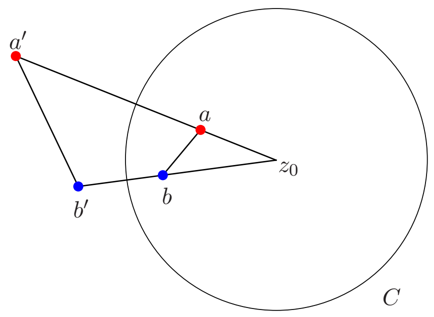


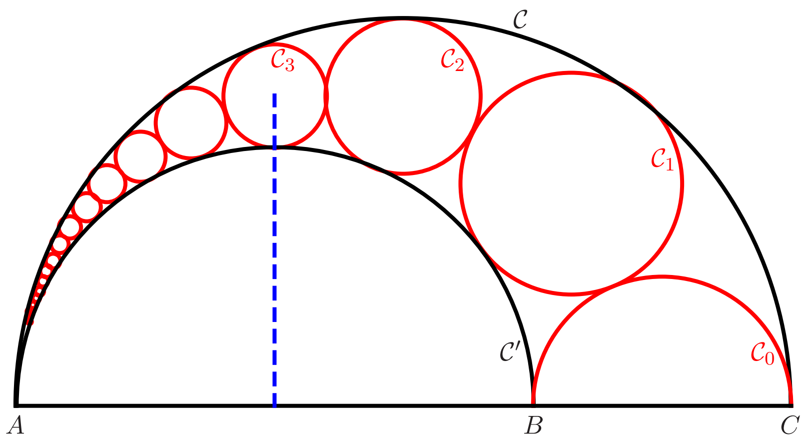

Abbildung 1.1: Inversion am Kreis: $a' = I_C(a)$, $b' = I_C(b)$

(b) (i) Ist $K$ eine Kreislinie mit $z_0 \notin K$, so ist $I_C(K)$ eine Kreislinie.
(ii) Ist $K$ eine Kreislinie mit $z_0 \in K$, so ist $I_C(K\backslash\{z_0\})$ eine Gerade.
(iii) Ist $K$ eine Gerade mit $z_0 \notin K$, so ist $I_C(K) \cup \{z_0\}$ eine Kreislinie.
(iv) Ist $K$ eine Gerade mit $z_0 \in K$, so ist $I_C(K\backslash\{z_0\}) \cup \{z_0\}$ eine Gerade.

(c) $T$ ist *antikonform*, d.h. der Winkel zwischen je zwei sich schneidenden differenzierbaren Wegen wechselt bei Anwendung von $T$ das Vorzeichen, ändert aber nicht den Betrag.

(d) Ist $K$ eine Kreislinie oder eine Gerade, die die Kreislinie $C$ senkrecht schneidet, so gilt $I_C(K) = K$.

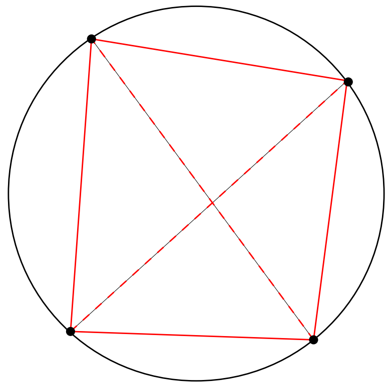
**Anwendung (Pappus, ca. 300 n. Chr.)**
*Es seien $\mathcal{C}$ ein Halbkreis mit Durchmesser $AC$ und zwei Halbkreise $\mathcal{C}'$ und $\mathcal{C}_0$ mit Durchmesser $AB$ bzw. $BC$ gegeben (siehe Skizze). Es seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$ Kreise tangential zu $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$, so dass $\mathcal{C}_n$ tangential zu $\mathcal{C}_{n-1}$ ist. Dann liegen die Berührpunkte $P_1, P_2, \ldots$ der Kreise $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$ alle auf einer gemeinsamen Kreislinie. Bezeichnet $r_n$ den Radius von $\mathcal{C}_n$ und $d_n$ den Abstand des Mittelpunktes von $\mathcal{C}_n$ zur Strecke $AB$, so gilt $d_n = 2nr_n$.*




**Bemerkung 1.25**
Seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a - z_0| < r$ und $|b - z_0| < r$. Dann gilt für $a' = I_C(a)$ und $b' = I_C(b)$:

$$|a' - b'| = \frac{r^2}{|z_0 - a| \cdot |z_0 - b|} |a - b|\,.$$

**Anwendung (Ptolemäus, ca. 100 n. Chr.)**
*Es sei $V$ ein Viereck, dessen Eckpunkte alle auf einer Kreislinie liegen. Dann ist die Summe der Produkte der Längen gegenüberliegender Seiten gleich dem Produkt der Längen der Diagonalen.*



Satz 1.21 (c) besitzt eine überraschende Umkehrung.

**Satz (Carathéodory 1937)**
*Es sei $f : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$ eine injektive Abbildung, so dass jede Kreislinie $K \subset K_r(z_0)$ auf eine Gerade oder eine Kreislinie abgebildet wird. Dann ist $f(z)$ oder $f(\overline{z})$ eine Möbiustransformation.*

**Beweis.** Siehe Seminar *Komplexe Geometrie*, Sommersemester 2009. ■

Man beachte, dass über $f$ nicht einmal die Stetigkeit vorausgesetzt wird. Sie folgt!

## 1.4 Holomorphe und harmonische Funktionen

**Definition 1.26**
*Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt holomorph in $G$, falls $f$ in jedem Punkt $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist.*

Tatsächlich gilt:

**Satz 1.27**
*Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $f$ beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^j \,, \qquad z \in K_r(z_0)$$

*für jede Kreisscheibe $K_r(z_0) \subseteq G$.*

**Korollar 1.28**
*Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $u(z) := \operatorname{Re} f(z)$. Dann ist $u \in C^2(G) := \{g : G \to \mathbb{R} \text{ zweimal stetig differenzierbar}\}$ und es gilt*

$$\Delta u(z) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) \equiv 0$$

*für alle $z \in G$.*

**Definition 1.29**
*Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch in $G$, falls $\Delta u(z) = 0$ für alle $z \in G$. Der Operator $\Delta : C^2(G) \to C(G)$ heißt Laplace Operator und man nennt $u$ auch Lösung der Laplace Gleichung.*

**Beispiel 1.30**
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $u(z) := \log|f(z)|$ harmonisch in $G' := \{z \in G \,:\, f(z) \neq 0\}$.

**Bemerkung 1.31 (Laplace Operator und lokale Extrema)**
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $u \in C^2(G)$. Hat die Funktion in $z_0 \in G$ ein lokales (oder globales) Maximum, so gilt $\Delta u(z_0) \leq 0$.

## Aufgaben

1. Es sei $f$ reell total differenzierbar in $z = z_0$. Zeigen Sie
$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(z_0 + he^{i\phi}) - f(z_0)}{he^{i\phi}} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) e^{2i\phi} .$$

2. Es sei $f(z) = z^5/|z|^4$ für $z \neq 0$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $f$ in $z = 0$ die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, dass aber $f$ in $z = 0$ nicht komplex differenzierbar ist,

3. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Ist $f' \equiv 0$, so ist $f$ lokal konstant.
   (b) Ist $|f|$ lokal konstant, so ist $f$ lokal konstant.

4. Zeigen Sie, dass durch $f(z) = 4/(z+1)^2$ eine konforme Abbildung der Einheitskreissscheibe $\mathbb{D}$ auf $D := \{u + iv \in \mathbb{C} \,:\, v^2 < 4(1-u)\}$ gegeben ist.

5. Zeigen Sie, dass die Funktion $g(z) = z^2$ die rechte Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z > 0\}$ konform auf $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ abbildet. Bestimmen Sie das Bild der Einheitskreisscheibe unter der Koebe Funktion
$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right] .$$

6. Beweisen Sie Satz 1.21.

7. Es sei $C$ eine Kreislinie und $z_1, z_2, z_3, z_4$ paarweise verschiedene Punkte der komplexen Ebene, so dass $z_2 = I_C(z_1)$ und $z_4 = I_C(z_3)$. Zeigen Sie: Liegen drei dieser Punkte auf einer Kreislinie $C'$, so liegt auch der vierte Punkt auf $C'$.

8. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.
   (a) $T$ ist eine Möbiustransformation mit $T(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$.
   (b) $T(z) = \eta \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$ mit $|\eta| = 1$ und $|z_0| \neq 1$.

9. Zeigen Sie, dass eine Möbiustransformation mit drei Fixpunkten die identische Abbildung sein muss.

10. Bestimmen Sie alle Möbiustransformationen, die die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ auf sich selbst abbilden.

11. Zeigen Sie
$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\,.$$
Folgern Sie, dass für eine harmonische Funktion $u$ die Funktion $\frac{\partial u}{\partial z}$ holomorph ist.

12. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $D := f(G)$ und $u \in C^2(D)$. Beweisen Sie die Kettenregel für den Laplace Operator $\Delta(u \circ f)(z) = \Delta u(f(z)) \cdot |f'(z)|^2$. Formulieren und beweisen Sie eine Kettenregel, falls $f$ lediglich zweimal (reell) stetig differenzierbar ist.

13. (Der Laplace Operator in Polarkoordinaten)

    Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $u \in C^2(G)$. Für $K_r(z_0) \subseteq G$ sei $v(r,\varphi) := u(z_0 + re^{i\varphi})$. Man zeige
$$\Delta u(z_0 + re^{i\varphi}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial v^2}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)\,.$$