– Kapitel 1 –

Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen

1.0 Geometrie der komplexen Zahlen

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen,

$$\mathbb{C} := \{x + iy \, : \, x, y \in \mathbb{R}\} \, ,$$

lässt sich mithilfe der bijektiven Abbildung

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

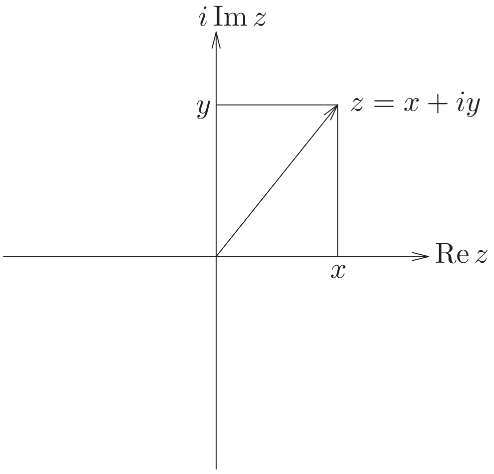
mit der Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Man nennt $\mathbb{C}$ daher die *komplexe Zahlenebene*.

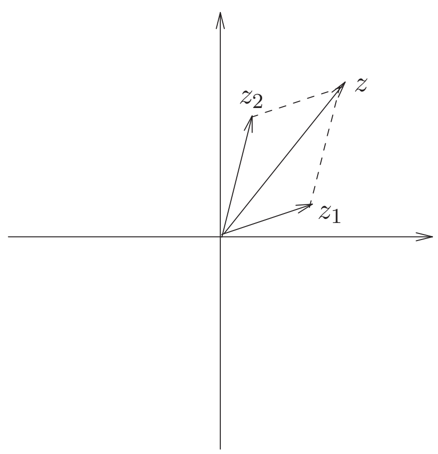
Für eine komplexe Zahl $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $\operatorname{Re} z := x$ *Realteil* von z und $\operatorname{Im} z := y$ *Imaginärteil* von z. Man identifiziert die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der Menge der komplexen Zahlen mit Imaginärteil Null. Die reellen Zahlen entsprechen also den Punkten der x–Achse des $\mathbb{R}^2$. Die komplexen Zahlen der Form iy, $y \in \mathbb{R}$, heißen *rein imaginäre Zahlen*; diese bilden die imaginäre Achse in der komplexen Ebene, die der y–Achse des $\mathbb{R}^2$ entspricht.

Die Addition von Punkten (Vektoren) des $\mathbb{R}^2$ überträgt sich auf komplexe Zahlen:

$$(x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v) \, .$$

Insbesondere gilt $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w$ und $\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w$.





Die komplexe Zahl $\overline{z} := x - iy$ heißt die zu $z = x + iy$ *konjugiert-komplexe* Zahl. Geometrisch entspricht $\overline{z}$ dem an der reellen Achse gespiegelten Punkt z. Man beachte die einfachen Rechenregeln $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Die nichtnegative Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt *Betrag* der komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Somit ist $|x + iy|$ die euklidische Länge des Vektors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Es gelten die Rechenregeln $|\operatorname{Re} z| = |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \leq |x| + |y|$ bzw. $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ und die Dreiecksungleichung

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \qquad \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|.$$

Man kann komplexe Zahlen multiplizieren. Formal ist diese Multiplikation durch

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

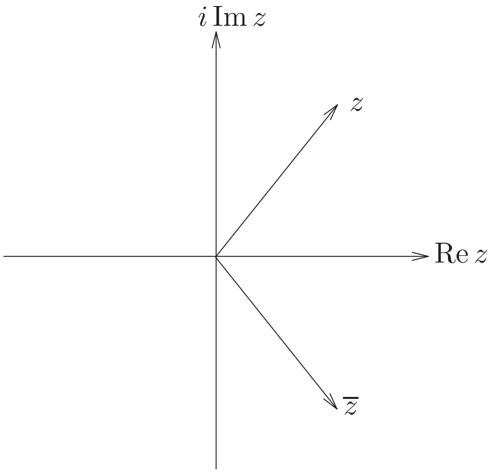
definiert. Insbesondere gilt $i^2 = -1$. Damit ist $1 = 1 + i0$ das neutrale Element der Multiplikation und jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt ein multiplikatives Inverses $1/z \in \mathbb{C}$, welches durch

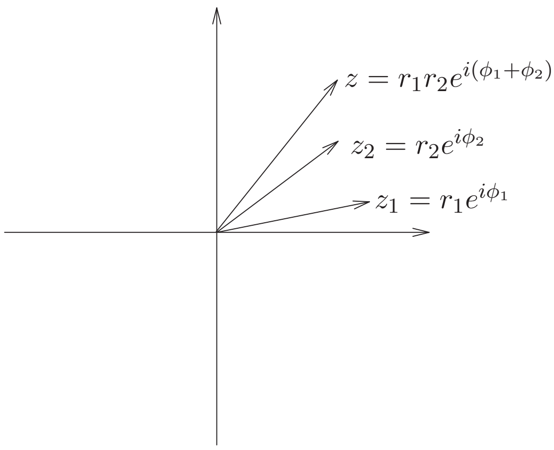
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

gegeben ist. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bildet einen Körper, d.h. es gelten die üblichen Rechenregeln. Die Multiplikation komplexer Zahlen verträgt sich mit dem Übergang zur komplex–konjugierten Zahl, denn

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \qquad z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2, \qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Jeder Punkt $z = x + iy \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung in Polarkoordinaten $z = re^{i\phi} = r\cos\phi + ir\sin\phi$ mit reellen Zahlen $r \geq 0$ und $\phi \in [0, 2\pi)$. Hierbei heißt ϕ das Argument von z und man setzt $\arg z = \phi$. Das Produkt zweier komplexer Zahlen $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$ ist dann durch $r_1 r_2 e^{i\phi}$ mit $\phi = \phi_1 + \phi_2 \mod 2\pi$ gegeben:





Multiplikation einer komplexen Zahl z mit $e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$, entspricht also einer Drehung des Punktes z um den Ursprung um den Winkel ϕ dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt. Man beachte

$$\overline{e^{i\phi}} = \frac{1}{e^{i\phi}} = e^{-i\phi}.$$

1.1 Der euklidische Abstand

Durch $\mathrm{d}_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$ definieren wir einen Abstand auf $\mathbb{C}$, der die drei Axiome einer Abstandsfunktion erfüllt:

- $\mathrm{d}_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $z_1 = z_2$;
- $\mathrm{d}_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) = \mathrm{d}_{\mathbb{C}}(z_2, z_1)$;
- $\mathrm{d}_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) \leq \mathrm{d}_{\mathbb{C}}(z_1, z_3) + \mathrm{d}_{\mathbb{C}}(z_3, z_2)$.

Jede Menge X, die eine Abstandsfunktion d_X mit diesen Eigenschaften besitzt, heißt *metrischer Raum*. Wir nennen den metrischen Raum $(\mathbb{C}, \mathrm{d}_{\mathbb{C}})$ die *euklidische Ebene*.

Definition 1.1
Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt Isometrie (oder starre Bewegung) von (X, d_X), falls f abstandstreu ist, d.h.

$$\mathrm{d}_X(f(z_1), f(z_2)) = \mathrm{d}_X(z_1, z_2) \qquad \textit{für alle } z_1, z_2 \in X$$

gilt.

Bemerkung 1.2
Jede Isometrie eines metrischen Raums (X, d_X) ist stetig und injektiv.

Beispiele 1.3
Die folgenden Abbildungen beschreiben Isometrien der euklidischen Ebene.

(a) Die Spiegelung $z \mapsto \overline{z}$ an der reellen Achse;

(b) Die Translationen $z \mapsto z + b$, $b \in \mathbb{C}$;

(c) Die Drehungen $z \mapsto az$, $|a|$;

Jede Isometrie der euklidischen Ebene setzt sich aus den eben genannten zusammen:

Satz 1.4
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent.

(a) f ist eine Isometrie der euklidschen Ebene.

(b) Es gilt $f(z) = az + b$ oder $f(z) = a\overline{z} + b$ für gewisse Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Die Isometrien der euklidischen Ebene sind also genau die *Kongruenzabbildungen*, d.h. Zusammensetzungen von Parallelverschiebungen, Drehungen und Spiegelungen (an Geraden).

Korollar 1.5
Die Menge $\mathrm{Iso}(\mathbb{C})$ *aller Isometrien der euklidischen Ebene bildet bzgl. Hintereinanderschaltung eine Gruppe.*

1.2 Winkeltreue Abbildungen

Differenzierbare Funktionen in der komplexen Ebene

Definition 1.6
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ mit $u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy)$ und $v(x,y) := \operatorname{Im} f(x,y)$. Dann heißt f reell differenzierbar im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, falls die Funktion

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

total differenzierbar im Punkt (x_0, y_0) ist.

Definition 1.7
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f komplex differenzierbar in $z_0 \in G$, falls der Limes

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.

Um diese beiden Differenzierbarkeitsbegriffe miteinander in Beziehung zu setzen, erweist es sich als außerordentlich zweckmäßig die folgenden Abkürzungen für eine Funktion $f = u + iv$ einzuführen (sog. Wirtinger–Ableitungen):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) := \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \, , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(z) := \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right) , \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right) .$$

Dabei hängt die Ableitung nach z mit der Ableitung nach $\overline{z}$ wie folgt zusammen

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}} \, , \qquad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \, .$$

Die Determinante der Jacobi–Matrix von $(x,y) \mapsto (\operatorname{Re} f(x+iy), \operatorname{Im} f(x+iy))$ ist dann durch

$$\det J_f(z) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z)\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\right|^2$$

gegeben.

Beispiel 1.8
Es sei $f(z) = |z|^2 z$. Dann gilt $f(x+iy) = x^3 + xy^2 + i(x^2y + y^3)$, also $u(x,y) = x^3 + xy^2$ und $v(x,y) = x^2y + y^3$. Es folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = 3x^2 + y^2 + 2xyi \, , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = 2xy + i(x^2 + 3y^2)$$

und daher

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\left(3x^2 + y^2 + x^2 + 3y^2 + i(2xy - 2xy)\right) = 2(x^2 + y^2) \, .$$

Differenziert man $f(z) = \overline{z}z^2$ nach z und hält dabei $\overline{z}$ fest, so erhält man dasselbe Ergebnis!
Merkregel: *Man berechnet $\frac{\partial f}{\partial z}$ indem man f als Funktion der beiden unabhängigen Variablen z und $\overline{z}$ auffasst und formal nach z differenziert. Analog für $\overline{z}$.*

Lemma 1.9 (Komplexe Taylor–Formel)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion, derart, dass die beiden Funktionen $u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy)$ und $v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+iy)$ im Punkt (x_0,y_0) partiell differenzierbar sind. Dann ist f in $z = z_0$ genau dann reell differenzierbar, wenn

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z-z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{(z-z_0)} + r(z)(z-z_0)$$

mit einer in $z = z_0$ stetigen Funktion $r : G \to \mathbb{C}$ mit $r(z_0) = 0$.

Beweis. f ist in z_0 reell total differenzierbar, genau dann wenn

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(x,y) \\ r_2(x,y) \end{pmatrix}$$

mit “Restfunktionen” $r_1(x,y)$ und $r_2(x,y)$ die

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r_j(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0\,, \qquad j = 1,2\,,$$

erfüllen. Setzt man $z = x+iy$, $z_0 = x_0+iy_0$ und

$$r(z) := \frac{r_1(x,y) + ir_2(x,y)}{z-z_0}\,,$$

so ist dies äquivalent mit

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(x-x_0) \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(y-y_0) \qquad (*) \\ &\qquad\qquad + r(z)\,(z-z_0) \\ &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y-y_0) + r(z)\,(z-z_0) \end{aligned}$$

mit der in $z = z_0$ stetigen Funktion $r : G \to \mathbb{C}$ mit $r(z_0) = 0$. Wegen

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z-z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y-y_0) + i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(y-y_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(x-x_0) \\ 2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{(z-z_0)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y-y_0) - i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(y-y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(x-x_0)\,, \end{aligned}$$

ist (*) gleichbedeutend mit

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z-z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{(z-z_0)} + r(z)(z-z_0)$$

mit einer in $z = z_0$ stetigen Funktion $r : G \to \mathbb{C}$ mit $r(z_0) = 0$. ∎

Satz 1.10
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist komplex differenzierbar in z_0.

(b) f ist reell differenzierbar in z_0 und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0\,.$$

In beiden Fällen gilt

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,.$$

Beweis. f ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn es eine komplexe Zahl a und eine in $z = z_0$ stetige Funktion $r : G \to \mathbb{C}$ gibt mit $r(z_0) = 0$ und

$$f(z) = f(z_0) + a \cdot (z - z_0) + 0 \cdot \overline{(z - z_0)} + r(z)(z - z_0)\,. \tag{*}$$

(Dies ist lediglich eine andere Art und Weise, die Existenz des komplexen Differentialquotienten von f in z_0 zu beschreiben!) Die Zahl a ist dann gerade $= f'(z_0)$. Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) folgt damit unmittelbar aus Lemma 1.9. Gilt umgekehrt (a), so folgt aus (*) zunächst, dass die Ableitungen nach z und $\overline{z}$ existieren mit $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = a$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$. Benutzt man jetzt (*) und Lemma 1.9, so ergibt sich unmittelbar (b). ∎

Für $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ schreibt sich Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ als

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\,.$$

Diese beiden Gleichungen heißen Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen.

Beispiel 1.11
Die Konjugationsabbildung $f(z) = \overline{z}$ ist in jedem Punkt reell differenzierbar, aber in keinem Punkt komplex differenzierbar, denn $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 1$.

Bemerkung 1.12
Es gelten die üblichen Ableitungsregeln (unter den üblichen Voraussetzungen):

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)\,, \quad (cf)'(z) = cf'(z)\,, \quad (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}\,, \quad (f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)\,.$$

Beispiel 1.13
Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_n z^n + \cdots a_1 z + a_0$ ist in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Winkeltreue Abbildungen

In der Geometrie spielt neben der Bestimmung von Abständen die Bestimmung von Richtungen, also die Winkelmessung eine wichtige Rolle.

Definition 1.14
Ein Weg (in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$) ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Falls $\gamma(a) = z_0$ und $\gamma(b) = z_1$, so nennen wir z_0 and z_1 die Endpunkte von γ und sagen, dass γ die Punkte z_0 und z_1 verbindet. Es seien $\gamma_1 : [a,b] \to G$ und $\gamma_2 : [c,d] \to G$ zwei differenzierbare Wege in einer offenen Menge G, die sich im Punkt $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ schneiden. Es seien ferner

$$\dot\gamma_1(t_1) := \lim_{t\to t_1} \frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_1)}{t - t_1} \neq 0\,, \qquad \dot\gamma_2(t_2) := \lim_{t\to t_2} \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(t_2)}{t - t_2} \neq 0$$

die Tangentialvektoren an γ_1 bzw. γ_2 in z_0. Dann heißt der Winkel $\alpha \in (-\pi, \pi]$ von $\dot\gamma_1(t_1)$ nach $\dot\gamma_2(t_2)$, der Winkel zwischen γ_1 und γ_2 im Punkt z_0.

Der Winkel zwischen γ_1 und γ_2 im Punkt z_0 ist also die (eindeutig bestimmte) Zahl $\alpha \in (-\pi, \pi]$, so dass $\arg\dot\gamma_2(t_2) - \arg\dot\gamma_1(t_1) = \alpha + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Man beachte, dass für $\alpha \neq \pi$, der Winkel zwischen γ_2 und γ_1 im Punkte z_0 durch $-\alpha$ gegeben ist!

Definition 1.15 (Winkeltreue Abbildungen)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar in $z = z_0$. f heißt winkeltreu in z_0, falls für je zwei differenzierbare Wege γ_1 und γ_2 in G, die sich in z_0 schneiden, der Winkel zwischen $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ in $f(z_0)$ gleich dem Winkel zwischen γ_1 und γ_2 in z_0 ist.

Die Konjugationsabbildung $f(z) = \overline{z}$ ist in keinem Punkt winkeltreu, denn bei der Abbildung durch f wechselt der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Kurven das Vorzeichen.

Satz 1.16
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar in $z = z_0$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist winkeltreu in $z_0 \in G$.

(b) f ist komplex differenzierbar in $z_0 \in G$ mit $f'(z_0) \neq 0$.

Beweis. Es gilt für einen differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to G$ mit $\gamma(t_0) = z_0$ aufgrund der komplexen Taylor–Formel

$$(f \circ \gamma)(t) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(\gamma(t) - \gamma(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{(\gamma(t) - \gamma(t_0))} + r(\gamma(t))(\gamma(t) - \gamma(t_0))\,,$$

d.h.

$$(f \circ \gamma)^{\dot{}}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\dot\gamma(t_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{\dot\gamma(t_0)}\,.$$

Ist also f in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar, so gilt

$$(f \circ \gamma_1)^{\dot{}}(t_1) = f'(z_0)\dot\gamma_1(t_1) \;\text{ und }\; (f \circ \gamma_2)^{\dot{}}(t_2) = f'(z_0)\dot\gamma_2(t_2)\,.$$

Aus $f'(z_0) \neq 0$ folgt somit, dass f in $z_0 \in G$ winkeltreu ist.

Für „(a) $\Rightarrow$ (b)" betrachten wir $\gamma_\eta(t) := z_0 + t\eta$ für $|\eta| = 1$. Dann gilt

$$(f \circ \gamma_\eta)^{\dot{}}(0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,\eta + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\,\overline{\eta}\,.$$

Aus der Winkeltreue von f in z_0, folgt, dass das Argument von

$$\frac{(f \circ \gamma_\eta)^{\dot{}}(0)}{\dot{\gamma}_\eta(0)} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\,\overline{\eta}^2$$

unabhängig von $\eta \in \partial\mathbb{D}$ sein muss. Dies impliziert $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ und auch $f'(z_0) \neq 0$. ■

Beispiel 1.17
Die Funktion $f(z) = z + |z|^2$ ist komplex differenzierbar in $z = 0$ mit $f'(0) = 1$, d.h. f ist in $z = 0$ winkeltreu.

Definition 1.18
Es seien G und D offene Mengen in $\mathbb{C}$. Eine bijektive und in jedem Punkt $z_0 \in G$ winkeltreue Abbildung f von G auf D heißt konforme Abbildung von G auf D.

Beispiel 1.19
Die Funktion $f(z) = 1/z$ vermittelt eine konforme Abbildung von $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ auf $D = G$.

1.3 Möbiustransformationen und Inversionen

Definition 1.20
Eine Möbiustransformation ist eine Abbildung der Form

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$.

Bemerkung
Für $c = 0$ ist $T(z) = a/d \cdot z + b/d$ eine konforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$. Für $c \neq 0$ bildet T die Menge $\mathbb{C}\backslash\{-d/c\}$ konform auf $\mathbb{C}\backslash\{a/c\}$ ab. Möbiustransformationen spielen eine ubiquitäre Rolle in vielen Bereichen der Mathematik (z.B. Geometrie, Funktionentheorie, Gruppentheorie) und Physik (z.B. in Pauli's Theorie des Elektronenspins). Besonders wichtig sind Möbiustransformationen in der Speziellen Relativitätstheorie, da sich jede Lorentztransformation als Möbiustransformation auffassen lässt und umgekehrt. Wir kommen später auf diesen Zusammenhang zu sprechen.

Satz 1.21 (Eigenschaften von Möbiustransformationen)

(a) Die Menge aller Möbiustransformationen bildet bzgl. Komposition eine Gruppe.

(b) Es gilt

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \begin{cases} \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d} & \text{falls } c = 0 \\[2ex] -\dfrac{ad - bc}{c}\dfrac{1}{cz + d} + \dfrac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0\,. \end{cases}$$