Mathematisches Institut
der Universität Würzburg
Prof. Dr. H. Pabel

WS 2003/04

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER I

0 Grundlagen

0.1 Grundbegriffe der Logik

0.2 Grundbegriffe der Mengenlehre

0.3 Relationen und Abbildungen

0.4 Natürliche Zahlenräume

$\mathbb{Z}$ ist bezüglich $+\ ,\ \cdot\ ,\ \leq$ eine totalgeordneter nullteilerfreier kommutativer Ring mit Einselement.

$\mathbb{Q}$ ist bezüglich $+\ ,\ \cdot\ ,\ \leq$ eine totalgeordneter Körper.

$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind *abzählbar* unendliche Mengen.

0.5 Die reellen Zahlen

Definition
$(M, \leq)$ sei eine linear geordnete Menge und $A \subset M$ eine Teilmenge.

1. A heißt *nach oben beschränkt*, wenn eine *obere Schranke* $s \in M$ existiert mit der Eigenschaft $\forall_{a\in A}\ a \leq s$. (Analog: *nach unten beschränkt*, *untere Schranke*, *beschränkt*).
2. Ein Element $s_0 \in M$ heißt *Supremum* (obere Grenze) von A, $s_0 = \sup A$, wenn es *kleinste obere Schranke* von A ist, d.h. wenn für jede andere obere Schranke s gilt: $s \geq s_0$.
   (Analog: *Infimum* ($\inf A$) = *größte untere Schranke*)

Definition
Ein linear geordneter Körper heißt (ordnungs-)*vollständig*, wenn er die Supremumseigenschaft besitzt d.h. wenn jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

Hauptsatz
Die Menge $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen* bildet einen (ordnungs-)vollständigen linear geordneten Körper.
Er ist der kleinste (ordnungs-)vollständige Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$.

Eigenschaften von $\mathbb{R}$

1. $\mathbb{R}$ ist *archimedisch angeordnet*, d.h. $\forall_{x,y\in\mathbb{R}^+}\ \exists_{n\in\mathbb{N}}\ n \cdot x > y$.
2. $\mathbb{Q}$ liegt *dicht* in $\mathbb{R}$, d.h. zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale:
   $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ (x < y \ \Rightarrow\ \exists_{p\in\mathbb{Q}}\ x < p < y)$.
3. (*Existenz von Wurzeln*)
   $\forall_{y>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists!_{x>0}\ x^n = y$. (Schreibweise: $x = \sqrt[n]{y}$ oder $x = y^{1/n}$.)
4. (*Prinzip der Intervallschachtelung*)
   Jede monoton fallende Folge von abgeschlossenen Intervallen besitzt einen nicht leeren Durchschnitt.
5. $\mathbb{R}$ ist *überabzählbar*.

0.6 Die komplexen Zahlen

$\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ ist ein Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, in dem die Gleichung $z^2 = -1$ genau die Lösungen $z = \pm i$ besitzt, der aber keine mit den arithmetischen Operationen verträgliche Ordnungsstruktur besitzt.

1 Konvergenz und Stetigkeit in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

1.1 Topologische Grundbegriffe

A. Die (reelle und komplexe) *Betragsfunktion* $x \in \mathbb{K} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ definiert eine *Norm* in $\mathbb{K}$, d.h. sie besitzt die Eigenschaften:

(N1)	Positive Definitheit	$\forall_{x\in\mathbb{K}}$	$\lvert x \rvert \geq 0 \ \wedge \ (\lvert x \rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
(N2)	Positive Homogenität	$\forall_{x\in\mathbb{K}} \ \forall_{\lambda\in\mathbb{R}}$	$\lvert \lambda \cdot x \rvert = \lvert \lambda \rvert \cdot \lvert x \rvert$
(N3)	Dreiecksungleichung	$\forall_{x\in\mathbb{K}} \ \forall_{y\in\mathbb{K}}$	$\lvert x + y \rvert \leq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$.

Durch $d(x,y) := |y - x|$ wird der *Abstand* zweier Elemente $x, y \in \mathbb{K}$ gemessen.

B. Eine Teilmenge der Gestalt $U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ heißt *ε-Umgebung* des Punktes $x_0 \in \mathbb{K}$. Obermengen von ε-Umgebungen heißen einfach nur *Umgebungen* von x_0 .

C. Eine Teilmenge Q in $\mathbb{K}$ heißt *offen*, wenn *jeder* Punkt $x \in Q$ eine ε-Umgebung von x mit $U_\varepsilon(x) \subset Q$ besitzt.

D. Eine Teilmenge A in $\mathbb{K}$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $\complement_{\mathbb{K}} A = \mathbb{K} \setminus A$ offen ist.

E. Eine Teilmenge A in $\mathbb{K}$ heißt *kompakt*, wenn sie *abgeschlossen* und *beschränkt* ist.
(Dabei heißt A *beschränkt*, wenn es ein $R > 0$ gibt mit $\forall_{x\in A} \ |x| \leq R$.)

1.2 Zahlenfolgen

Definition
Eine Zahlenfolge $(x_k \in \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn es eine Zahl $x \in \mathbb{K}$ gibt, so daß in *jeder* ε-Umgebung von x *fast alle* Folgenglieder liegen (d.h. alle bis auf endlich viele Ausnahmen).
(Präzisierung: $\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{m\in\mathbb{N}} \ \forall_{k\geq m} \ |x_k - x| < \varepsilon$.)
x heißt dann *Grenzwert* oder *Limes* der Zahlenfolge.
Schreibweise: $(x_k) \longrightarrow x$ oder $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.
Eine Zahlenfolge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist.

Satz 1.2.1
Jede konvergente Folge ist *beschränkt* (d.h. $\exists_{R>0} \ \forall_{k\in\mathbb{N}} \ |x_k| \leq R$), und ihr Grenzwert ist *eindeutig bestimmt*.

Folgerung: Jede unbeschränkte Zahlenfolge ist divergent!

Beispiele: $\forall_{p\in\mathbb{N}} \ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k^p} = 0$, $\forall_{p\in\mathbb{N}} \ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[p]{k}} = 0$.
Die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ $(x \in \mathbb{R})$ konvergiert für $|x| < 1$ gegen 0, für $x = 1$ gegen 1 und divergiert sonst.

Satz 1.2.2 (Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen)
Falls $(x_k \in \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k \in \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren, so existiert auch

a) $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k + \lim\limits_{k\to\infty} y_k$,

b) $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k \cdot y_k) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k \cdot \lim\limits_{k\to\infty} y_k$,

c) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{x_k} = \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} x_k}$, falls $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \neq 0$,

d) $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = |\lim\limits_{k\to\infty} x_k|$.

Satz 1.2.3
$(x_k \in \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k \in \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ seien konvergente Zahlenfolgen.
a) Wenn für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $x_k \leq y_k$, dann ist auch $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \leq \lim\limits_{k\to\infty} y_k$.

b) **(Sandwich-Theorem)**
Ist $(a_k \in \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Zahlenfolge mit $x_k \leq a_k \leq y_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, und gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k = a$, so konvergiert auch $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$.

Beispiele: $\forall_{a>0} \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a} = 1 \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1 \quad .$

Definition
Eine Zahlenfolge $(x_k \in \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ x_k \leq x_{k+1}$, *streng monoton wachsend*, wenn $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ x_k < x_{k+1}$, entsprechend (*streng*) *monoton fallend*, und (*streng*) *monoton*, wenn sie (streng) monoton wächst oder fällt.

Satz 1.2.4 (Konvergenzkriterium für monotone Zahlenfolgen)
Eine monotone Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Beispiel

$$e := \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \in \ ]\,2,3\,]$$

Definition
Ein Punkt $x \in \mathbb{K}$ heißt *Häufungspunkt* der Zahlenfolge $(x_k \in \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$, wenn in jeder ε-Umgebung von x *unendlich viele* Folgenglieder liegen.

Definition
Ist $(x_k \in \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $l \in \mathbb{N} \to k_l \in \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge von Indizes, so heißt die Folge $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Satz 1.2.5 (Satz von BOLZANO–WEIERSTRASS)
1. Jede *beschränkte* Zahlenfolge in $\mathbb{K}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.
2. Jeder Häufungspunkt einer Zahlenfolge in $\mathbb{K}$ ist Grenzwert einer konvergenten Teilfolge.

Zusatz
Jede beschränkte reelle Zahlenfolge besitzt auch einen *größten* und einen *kleinsten* Häufungspunkt.
Bezeichnungen:
Limes superior $(x = \overline{\lim}\, x_k = \limsup x_k) :=$ *größter* Häufungspunkt von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$,
Limes inferior $(x = \underline{\lim}\, x_k = \liminf x_k) :=$ *kleinster* Häufungspunkt von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Definition
Eine Zahlenfolge $(x_k \in \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchyfolge*, wenn $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{k,l\geq m}\ |\,x_k - x_l\,| < \varepsilon$.
(Die Abstände zwischen den Folgengliedern werden beliebig klein.)

Satz 1.2.6 (CAUCHYsches Konvergenzkriterium für Folgen)
Eine Zahlenfolge in $\mathbb{K}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Definition
Eine Zahlenfolge $(x_k \in \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *uneigentlich konvergent* oder *bestimmt divergent* gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn gilt: $\forall_{r>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{k\geq m}\ x_k > r$ (bzw. $x_k < -r$).
Schreibweise: $(x_k) \longrightarrow +\infty$ (bzw. $-\infty$) oder $\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$ (bzw. $-\infty$) .

1.3 Zahlenreihen

Definition
1. Ist $(x_k \in \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge, so heißt die Folge $(s_n \in \mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen* $s_n := \sum_{k=1}^n x_k = x_1 + \cdots + x_n$ eine *unendliche Reihe*, bezeichnet mit $\sum_{k=1}^\infty x_k := \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Bei einer *konvergenten* unendliche Reihe $\left(\sum_{k=1}^l x_k\right)_{l\in\mathbb{N}}$ heißt der Grenzwert $\sum_{k=1}^\infty x_k := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n x_k$ die *Summe* der unendlichen Reihe.

Satz 1.3.1 (Notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen)
Die Glieder x_k einer konvergenten unendlichen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in $\mathbb{K}$ bilden eine Nullfolge.

Satz 1.3.2 (CAUCHYsches Konvergenzkriterium für Reihen)
Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in $\mathbb{K}$ konvergiert genau dann, wenn $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{l>j\geq m}\ \left|\ \sum_{k=j+1}^{l} x_k\ \right| < \varepsilon$.

Beispiele
1. Die *geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergiert für $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$ und divergiert sonst.
2. Die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, obwohl die Glieder eine Nullfolge bilden.

Definition
Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in $\mathbb{R}$, deren Glieder x_k abwechselnd positiv und negativ sind, heißt eine *alternierende Reihe.*

Satz 1.3.3 (LEIBNIZsche Regel)
Eine alternierende Reihe, bei der die Beträge der Glieder eine *monotone Nullfolge* bilden, ist konvergent.

Beispiel: Die *alternierende harmonische* Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert (gegen $\log 2 = \ln 2$).

Definition
Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in $\mathbb{K}$ heißt *absolut konvergent*, wenn die (reelle) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |\, x_k \,|$ der Beträge konvergiert.

Satz 1.3.4
Eine absolut konvergente Reihe konvergiert. Die Umkehrung ist i.a. nicht richtig.

Satz 1.3.5
Eine Reihe in $\mathbb{R}$ mit nicht negativen Gliedern konvergiert genau dann (absolut), wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert (gegen $\pi^2/6$).

Definition
Eine reelle Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit *nicht negativen Gliedern* heißt eine *Majorante* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in $\mathbb{K}$, wenn für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $|\, x_k \,| \leq c_k$.
Sie heißt eine *Minorante* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in $\mathbb{R}$, wenn für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $x_k \geq c_k$.

Satz 1.3.6 (Majoranten-/Minoranten-Kriterium)
Jede Reihe in $\mathbb{K}$ mit einer konvergenten Majorante konvergiert absolut.
Jede Reihe in $\mathbb{R}$ mit einer divergenten Minorante divergiert.

Satz 1.3.7 (Quotientenkriterium)
Eine reelle oder komplexe Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergiert absolut*, wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ gibt mit $\left| \dfrac{x_{k+1}}{x_k} \right| \leq q$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, und *divergiert*, wenn $\left| \dfrac{x_{k+1}}{x_k} \right| \geq 1$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$.

Satz 1.3.8 (Wurzelkriterium)
Eine reelle oder komplexe Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergiert absolut*, wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ gibt mit $\sqrt[k]{|\, x_k \,|} \leq q$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, und *divergiert*, wenn $\sqrt[k]{|\, x_k \,|} \geq 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$.

Folgerung
Eine reelle oder komplexe Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$

konvergiert absolut, wenn $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left| \dfrac{x_{k+1}}{x_k} \right| < 1$, und divergiert, wenn $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left| \dfrac{x_{k+1}}{x_k} \right| > 1$, bzw.

konvergiert absolut, wenn $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\, x_k \,|} < 1$, und divergiert, wenn $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\, x_k \,|} > 1$.

1.4 Stetige Funktionen

Wir betrachten *Funktionen einer Veränderlichen* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}\ ,\ x \mapsto f(x)$. Ihr Definitionsbereich D sei stets ein (nichttriviales) Intervall oder eine Vereinigung solcher Intervalle.

Definition
Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $x_0 \in \overline{D}$. f *konvergiert* bei Annäherung von x an x_0 gegen den *Grenzwert* $c \in \mathbb{K}$, wenn für *jede* Folge $(x_k \in D)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ x_k \neq x_0\ ,\ \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ die zugehörige *Bildfolge* $(f(x_k) \in \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert, also $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = c$ gilt.
Schreibweise: $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} c$ oder $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

Analog
Konvergenz von links gegen den *linksseitigen Grenzwert* c : $f(x) \xrightarrow[x\to x_0^-]{} c$ oder $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = c$,
Konvergenz von rechts gegen den *rechtsseitigen Grenzwert* c : $f(x) \xrightarrow[x\to x_0^+]{} c$ oder $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = c$,
uneigentliche Konvergenz gegen den Grenzwert c : $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} c$ oder $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c$,
Konvergenz gegen den *uneigentlichen Grenzwert* $\pm\infty$: $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \pm\infty$ oder $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$
und weitere Varianten.

Definition
Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ heißt *im Punkte* $x_0 \in D$ *stetig*, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist. Sie heißt (auf D) *stetig*, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Analog: Linksseitige und rechtsseitige Stetigkeit.

Satz 1.4.1 (Folgenkriterium für Stetigkeit)
$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_k \in D)_{k\in\mathbb{N}}$ die Bildfolge $(f(x_k) \in \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert, also $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim\limits_{k\to\infty} x_k)$ gilt.

Satz 1.4.2
Summen, Produkte und Quotienten stetiger Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig, ebenso die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ sowie die reellen Wurzelfunktionen $x \mapsto \sqrt[q]{x}$ in $\mathbb{R}_0^+$.
Auch die Komposition (Verkettung) stetiger Funktionen ist stetig.

Folgerung
Polynome $x \in \mathbb{R} \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \in \mathbb{K}$ (vom *Grade* $m \in \mathbb{N}_0$, falls $a_m \neq 0$) sind auf $\mathbb{R}$ stetig, ebenso *rationale Funktionen* $x \mapsto \dfrac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen p, $q \not\equiv 0$ auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\}$.

Satz 1.4.3 (ε - δ - Kriterium für Stetigkeit)
Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn gilt

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}\ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\,,$$

also zu jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(f(x_0))$ eine δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$ existiert mit $f[U_\delta(x_0) \cap D] \subset U_\varepsilon(f(x_0))$.

Exotisches Beispiel
Die DIRICHLET-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ist überall unstetig.

Satz 1.4.4 (Permanenzprinzip)
Ist die Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetig und gilt $f(x_0) > 0$, so gibt es eine ganze ε-Umgebung von x_0 mit $f(x) > 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$.

Satz 1.4.5 (Kompaktheitssatz)
Bei einer stetigen Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ ist das Bild $f[K]$ einer kompakten Menge $K \subset D$ wieder kompakt (also abgeschlossen und beschränkt).

Satz 1.4.6 (Satz vom Maximum und Minimum)
Eine stetige Funktion $f : K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einer (nicht leeren) kompakten Menge K ist beschränkt und besitzt ein (globales) Maximum und Minimum.

Satz 1.4.7 (Zwischenwertsatz)
Die Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann existiert zu jedem Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.

Folgerung 1 (Nullstellensatz von BOLZANO)
Eine stetige Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$ besitzt in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle.

Folgerung 2
Das Bild eines beliebigen Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ unter einer stetigen Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $I \subset D$ ist wieder ein Intervall, insbesondere das Bild eines abgeschlossenen Intervalls wieder ein abgeschlossenes Intervall.

Satz 1.4.8
Eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem *Intervall* $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton (wachsend oder fallend) ist.

Satz 1.4.9
Die Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ sei auf dem *Intervall* I stetig und bijektiv. Dann ist auch die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : J \to I$ stetig.

1.5 Funktionenfolgen und -reihen, insbesondere Potenzreihen

Definition
Eine Funktionenfolge $(f_k : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K})_{k \in \mathbb{N}}$ heißt *(punktweise) konvergent*, wenn für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_k(x) \in \mathbb{K})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Die Funktion $f = \lim\limits_{k \to \infty} f_k : D \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x)$ heißt dann *Grenzfunktion* der Folge.
Entsprechend ist die (punktweise) Konvergenz einer Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ sowie ihre *Summenfunktion* $s = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f_k$ erklärt.

Definition
Eine Funktionenfolge $(f_k : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K})_{k \in \mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{K}$, wenn gilt

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{m \in \mathbb{N}} \; \forall_{k \geq m} \; \forall_{x \in D} \; |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \; .$$

Entsprechend für Funktionenreihen.

Veranschaulichung bei reellen Funktionenfolgen:
Die Graphen der Glieder f_k liegen für $k \geq m$ ganz in einem ε-Streifen um die Grenzfunktion f.

Bemerkung
Jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge (-reihe) konvergiert auch punktweise, und zwar gegen ihre Grenzfunktion (Summe). Die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Satz 1.5.1
Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ stetig. Dann gilt:

a) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent $\Rightarrow$ $f = \lim\limits_{k \to \infty} f_k$ stetig ,

b) $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent $\Rightarrow$ $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ stetig .

Satz 1.5.2 (Majoranten-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)
Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ mit $\forall_{k\in\mathbb{N}}\, f_k : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ besitze eine konvergente Majorante, d.h. eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ in $\mathbb{R}$ mit nicht negativen Gliedern c_k, für die gilt

$$|f_k(x)| \le c_k \quad \text{für alle } x \in D \text{ und fast alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (absolut und) gleichmäßig in D.

Definition
Es sei $(a_k \in \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $x_0 \in \mathbb{K}$. Dann heißt eine Funktionenreihe der Form $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ mit $x \in \mathbb{K}$ eine *Potenzreihe* mit *Entwicklungspunkt* x_0 und *Koeffizienten* a_k.

Satz 1.5.3
Zu einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ in $\mathbb{K}$ gibt es genau ein $R \in [0, +\infty]$ mit den Eigenschaften:
1. Für alle x mit $|x-x_0| < R$ konvergiert die Potenzreihe absolut.
2. Für alle x mit $|x-x_0| > R$ divergiert die Potenzreihe.

R heißt *Konvergenzradius*, die Umgebung $U_R(x_0)$ *Konvergenzkreis* bzw. (in $\mathbb{R}$) *Konvergenzintervall* der Reihe.

Satz 1.5.4
Für den Konvergenzradius R einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ in $\mathbb{K}$ gilt
1. $R = 1/\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le \infty$ (falls dieser Grenzwert existiert),
2. $R = 1/\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ \sqrt[k]{|a_k|} \le \infty$ (Formel von HADAMARD).

(Man setzt dabei $\dfrac{1}{0} = +\infty$ und $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.)

Beispiele
1. Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$; $R = 1$.
2. Exponentialreihe: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,x^k = \exp x =: e^x$; $R = \infty$.
3. Binomialreihe: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}\,x^k = (1+x)^\alpha$; $R = \infty$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $R = 1$ sonst .

Satz 1.5.5
Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $R > 0$ konvergiert in jedem abgeschlossenen Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ mit $0 < r < R$ *gleichmäßig* und definiert somit eine im ganzen Konvergenzintervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ *stetige* Funktion.

Satz 1.5.6 (Multiplikation von Potenzreihen)
$x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $x \mapsto g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ seien zwei durch Potenzreihen dargestellte Funktionen in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradien $R_1 > 0$ und $R_2 > 0$. Dann wird das *Produkt* $x \mapsto f(x)\cdot g(x)$ für $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ durch die *Cauchy-Produktreihe* $\sum_{r=0}^{\infty}\big(\sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k}\big)x^r$ dargestellt.

Beispiele
1. $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,x^k \quad \Rightarrow \quad (\exp x)^2 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\,(2x)^r = \exp(2x)$
   und auch $\quad (\exp x)\cdot(\exp y) = \exp(x+y)$,
2. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)\,x^r \quad$ für $|x| < 1$.

Ergänzung
Man kann auch durch Potenzreihen dargestellte Funktionen

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k\ ,\ x \mapsto g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,x^k$$

mit $g(0) = b_0 \ne 0$ *dividieren* und erhält eine in der Umgebung von $x = 0$ definierte Potenzreihendarstellung von $x \mapsto f(x)/g(x)$.
Auch die *Komposition* $g \circ f$ solcher Funktionen läßt unter bestimmten Voraussetzungen wieder durch eine Potenzreihe darstellen. [Einsetzen, auspotenzieren und nach Potenzen von x ordnen.]

1.6 Spezielle Funktionen   [*Literatur:* Blatter, Christian: Analysis 1 (4. Auflage), S. 173 – 196]

1.6.1 Die Exponential- und die Logarithmus-Funktionen

$z \in \mathbb{C}$	$\mapsto$	$\exp z = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, z^k \in \mathbb{C}$	(Komplexe) Exponentialfunktion
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto$	$\exp x = e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k \in \mathbb{R}$	(Reelle) Exponentialfunktion
$x \in \mathbb{R}^+$	$\mapsto$	$\log x = \ln x := \exp^{-1} x \in \mathbb{R}$	(Natürlicher) Logarithmus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto$	$\exp_a x = a^x := \exp(x \cdot \log a) \in \mathbb{R}$	Allgemeine Potenz zur Basis $a \in \mathbb{R}^+$
$x \in \mathbb{R}^+$	$\mapsto$	$\log_a x := \log x / \log a \in \mathbb{R}$	Logarithmus zur Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

1.6.2 Die hyperbolischen und Area-Funktionen

$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto$	$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \in \mathbb{R}$	Sinus hyperbolicus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto$	$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k} \in \mathbb{R}$	Cosinus hyperbolicus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto$	$\tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \in \mathbb{R}$	Tangens hyperbolicus
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mapsto$	$\coth x := \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \in \mathbb{R}$	Cotangens hyperbolicus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto$	$\operatorname{Arsinh} x := \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \in \mathbb{R}$	Area - Sinus hyperb.
$x \in [1, \infty[$	$\mapsto$	$\operatorname{Arcosh} x := \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \in [0, \infty[$	Area - Cosinus hyperb.
$x \in \,]-1, +1[$	$\mapsto$	$\operatorname{Artanh} x := \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \in \mathbb{R}$	Area - Tangens hyperb.
$x \in \mathbb{R} \setminus [-1, +1]$	$\mapsto$	$\operatorname{Arcoth} x := \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Area - Cotangens hyperb.

1.6.3 Die Kreis- und die Argument-Funktion

$t \in \mathbb{R}$	$\mapsto$	$e^{it} = \cos t + i \sin t \in S^1 \subset \mathbb{C}$	Kreisfunktion
$z = re^{it} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\mapsto$	$t = \arg z \in \, [0, 2\pi[$	Argumentfunktion

1.6.4 Die trigonometrischen und Arcus-Funktionen

$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto$	$\sin x := \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$	
		$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \in \mathbb{R}$	Sinus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto$	$\cos x := \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$	
		$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k} \in \mathbb{R}$	Cosinus
$x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mapsto$	$\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x} \in \mathbb{R}$	Tangens
$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mapsto$	$\cot x := \dfrac{\cos x}{\sin x} \in \mathbb{R}$	Cotangens
$x \in [-1, +1]$	$\mapsto$	$\operatorname{Arcsin} x := \sin^{-1} x \in [-\pi/2, +\pi/2]$	Arcus - Sinus
$x \in [-1, +1]$	$\mapsto$	$\operatorname{Arccos} x := \cos^{-1} x \in [0, \pi]$	Arcus - Cosinus
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto$	$\operatorname{Arctan} x := \tan^{-1} x \in \,]-\pi/2, +\pi/2[$	Arcus - Tangens
$x \in \mathbb{R}$	$\mapsto$	$\operatorname{Arccot} x := \cot^{-1} x \in \,]0, \pi[$	Arcus - Cotangens

2 Differential- und Integralrechnung in $\mathbb{R}$

Wir betrachten Funktionen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}\ ,\ x \mapsto f(x)$ auf (nichttrivialen) Intervallen $I \subset \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

2.1 Differenzierbarkeit und Ableitung

Definition
Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ heißt *im Punkte* $x_0 \in I$ *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Er heißt *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f *in* x_0.
f heißt (auf I) *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt aus I differenzierbar ist. Dann ist die Ableitung als Funktion $\quad f' = \frac{df}{dx} : I \to \mathbb{K}\ ,\ x \mapsto f'(x) \quad$ definiert.

Kennzeichnung
$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ ist genau dann in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn eine *in* x_0 *stetige* Funktion $\Delta : I \to \mathbb{K}$ existiert mit $\quad \forall_{x \in I}\ f(x) = f(x_0) + \Delta(x) \cdot (x - x_0)$. Es ist dann $f'(x_0) = \Delta(x_0)$.

Interpretation
von $f'(x_0)$ in $\mathbb{R}$: Steigung der Tangente $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$ in x_0 ,
von $f'(t_0)$ in $\mathbb{C}$: Geschwindigkeitsvektor der Bahnkurve $t \mapsto f(t)$ in t_0 .

Satz 2.1.1 (Rechenregeln für differenzierbare Funktionen)

1. $f,\ g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ seien (in $x_0 \in I$) differenzierbar. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und $\dfrac{f}{g}$ (falls definiert) (in $x_0 \in I$) differenzierbar mit
   a) $(f+g)' = f' + g'$ (in x_0)
   b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (in x_0) (Produktregel)
   c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ (in x_0) (Quotientenregel) .
2. $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ sei (in $x_0 \in I$) differenzierbar, und ebenso $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ (in $f(x_0) \in J$). Dann ist auch $g \circ f$ (in $x_0 \in I$) differenzierbar mit
   d) $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$ (in x_0) (Kettenregel) .

Anwendungen

$$\exp' = \exp \ \Rightarrow \ \begin{cases} \cosh' = \sinh\ , & \sinh' = \cosh\ , \quad \tanh' = 1/\cosh^2 = 1 - \tanh^2\ ; \\ \cos' = -\sin\ , & \sin' = \cos\ , \quad \tan' = 1/\cos^2 = 1 + \tan^2\ . \end{cases}$$

Satz 2.1.2
$f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ sei eine stetige Bijektion, die in $x_0 \in I$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar mit $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$, d.h. es gilt
e) $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$ in y_0 .

Anwendungen
$\log' x = 1/x$ für $x > 0$, $\mathrm{Arsinh}' x = 1/\sqrt{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arcsin}' x = 1/\sqrt{1-x^2}$ für $|x| < 1$.

Einteilung der Funktionen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$:

$$\mathcal{C}^0(I) \supsetneqq \mathcal{D}^1(I) \supsetneqq \mathcal{C}^1(I) \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathcal{D}^r(I) \supsetneqq \mathcal{C}^r(I) \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathcal{D}^\infty(I) = \mathcal{C}^\infty(I)$$

mit $\mathcal{C}^0(I) := \{f : I \to \mathbb{K} \mid f \text{ } \textit{stetig}\}$, $\mathcal{D}^r(I) := \{f : I \to \mathbb{K} \mid f \ r\text{-mal differenzierbar}\}$ und
$\mathcal{C}^r(I) := \{f : I \to \mathbb{K} \mid f \ r\text{-mal } \textit{stetig} \text{ differenzierbar}\}$.

2.2 Stammfunktionen

Definition
Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *unbestimmt integrierbar*, wenn eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ existiert. F heißt dann eine *Stammfunktion* oder ein *unbestimmtes Integral* von f.
Schreibweise (mathematisch inkorrekt): $\int f = F + c$ bzw. $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ mit einer Integrationskonstanten $c \in \mathbb{R}$.

Beispiele
1. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x > 0$, $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$ für $x \neq 0$,
2. $\int e^x\,dx = e^x + c$, $\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$, $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ usw.
3. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arcsin} x + c$ für $|x| < 1$, ... usw.

Triviale Eigenschaft
Sind $f,\, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unbestimmt integrierbar, so auch $f + g$ und $\lambda \cdot f$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, und es gilt

$$\int (f+g) = \int f + \int g \qquad , \qquad \int (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \int f\,.$$

Satz 2.2.1 (Regel über die partielle Integration)
$f,\, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar und $f \cdot g'$ unbestimmt integrierbar. Dann ist auch $f' \cdot g$ unbestimmt integrierbar, und es gilt

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g') \quad \text{bzw.} \quad \forall_{x\in I} \int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx\,.$$

Beispiele
1. $\int xe^x\,dx = \int (e^x)'\,x\,dx = e^x\,x - \int e^x\,1\,dx = (x-1)\,e^x + c$.
2. $\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x(-\cos x)'\,dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\,dx$
   $\Rightarrow \quad \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,(x - \sin x \cos x) + c$.
3. $\int \log x\,dx = \int 1 \cdot \log x\,dx = x\,\log x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\,\log x - x + c$.

Satz 2.2.2 (Substitutionsregeln)
a) $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei unbestimmt integrierbar und $\varphi : J \subset \mathbb{R} \to I$ differenzierbar. Dann ist auch $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ unbestimmt integrierbar, und es gilt

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \left(\int f\right) \circ \varphi \quad \text{bzw.} \quad \forall_{x\in J} \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \left[\int f(y)\,dy\right]_{y=\varphi(x)}.$$

b) Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\varphi : J \subset \mathbb{R} \to I$ eine differenzierbare Bijektion mit $\forall_{t\in J}\ \varphi'(t) \neq 0$, sowie $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ unbestimmt integrierbar. Dann ist auch f unbestimmt integrierbar, und es gilt

$$\int f = \left(\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi'\right) \circ \varphi^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \forall_{x\in I} \int f(x)\,dx = \left[\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Beispiele
1. $\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} \int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} \left[\int e^y\,dy\right]_{y=x^2} = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + c$.
2. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2} \left[\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\right]_{y=1-x^2} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$.
3. $\int \log x\,dx = \left[\int t\,e^t\,dt\right]_{t=\log x} = \left[(t-1)\,e^t\right]_{t=\log x} + c = x\,(\log x - 1) + c$.

2.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und seine Anwendungen

Definition
Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt im Punkte $x_0 \in I^\circ$ *lokal maximal* bzw. $f(x_0)$ ein *lokales Maximum* von f, wenn eine Umgebung $U \subset I$ von x_0 existiert mit $\forall_{x \in U}\ f(x) \leq f(x_0)$.
Analog: *lokal minimal* bzw. *lokales Minimum*.
f heißt in x_0 *lokal extremal*, wenn dort ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, also ein *lokales Extremum* vorliegt.

Satz 2.3.1 (Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum)
$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf dem offenen Intervall I differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ in } x_0 \in I \text{ lokal extremal} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0\,.$$

Satz 2.3.2 (Satz von ROLLE)
Sei $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists_{\overline{x} \in]a,b[}\ f'(\overline{x}) = 0\,.$$

Satz 2.3.3 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Sei $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert ein Punkt $\overline{x} \in]a, b[$ mit

$$f'(\overline{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Satz 2.3.4 (Monotoniekriterium)
Für eine auf dem Intervall I stetige und im Inneren I° differenzierbare Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:
a) f ist monoton wachsend (fallend) $\iff \forall_{x \in I^\circ}\ f'(x) \geq 0\ (\leq 0)$
b) f ist konstant $\iff \forall_{x \in I^\circ}\ f'(x) = 0$

Satz 2.3.5 (Erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Seien $f,\ g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar, und weiter $\forall_{x \in]a,b[}\ g'(x) \neq 0$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es existiert ein Punkt $\overline{x} \in]a, b[$ mit

$$\frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Satz 2.3.6 (Regeln von l'HOSPITAL)
$f,\ g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien zwei differenzierbare Funktionen mit $\forall_{x \in I}\ g'(x) \neq 0$ sowie $x_0 \in \overline{I}$. Dann gilt:

a) Falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ ist und $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (möglicherweise uneigentlich) existiert, so existiert auch

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

(1. Regel von l'Hospital)

b) Falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ ist und $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (möglicherweise uneigentlich) existiert, so existiert auch

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

(2. Regel von l'Hospital)

Zusatz: Die Regeln gelten auch bei uneigentlicher Annäherung $x \to \pm\infty$.

Satz 2.3.7
$(f_k : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge *differenzierbarer* Funktionen mit den Eigenschaften

(1) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert (punktweise) $\big[$ bzw. $(\sum_{k=1}^{l} f_k)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert (punktweise) $\big]$

(2) $(f'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* $\big[$ bzw. $(\sum_{k=1}^{l} f'_k)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* $\big]$.

Dann ist die Grenzfunktion $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ $\big[$ bzw. die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ $\big]$ differenzierbar mit

$$(\lim_{k\to\infty} f_k)' = \lim_{k\to\infty} f'_k \qquad \Big[\text{ bzw. } (\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k \Big] .$$

Satz 2.3.8
Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $R > 0$ ist in ihrem Konvergenzintervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ beliebig oft differenzierbar, und ihre Ableitungen erhält man durch gliedweise Differentiation, wobei sich der Konvergenzradius nicht ändert.

Anwendung: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\,x^k = \log(1+x)$ für $|x| < 1$ (Logarithmusreihe)

Folgerung
Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $R > 0$ ist in ihrem Konvergenzintervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ gliedweise unbestimmt integrierbar, wobei sich der Konvergenzradius nicht ändert.

2.4 Taylorapproximation und Anwendungen

Satz 2.4.1
$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei in der Umgebung von $x_0 \in I$ p-mal differenzierbar ($p \in \mathbb{N}_0$). Dann gibt es genau ein Polynom $x \mapsto T_p(x)$ höchstens vom Grade p mit $\forall_{k=0}^{p}\; T_p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, nämlich

$$x \mapsto T_p(x) := \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k ,$$

genannt *p-tes Taylorpolynom von f im Punkte x_0*.

Satz 2.4.2 (TAYLORscher Satz, 1.Form)
$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei p-mal differenzierbar ($p \in \mathbb{N}_0$) und es existiere auch $f^{(p+1)}(x_0)$ für ein $x_0 \in I$. Dann gibt es (genau) eine *in x_0 stetige* Funktion $\Delta_{p+1} : I \to \mathbb{R}$ mit

(1) $\forall_{x\in I}\; f(x) = T_p|_{x_0}(x) + \frac{1}{(p+1)!}\,\Delta_{p+1}(x)\,(x-x_0)^{p+1}$

(2) $\Delta_{p+1}(x_0) = f^{(p+1)}(x_0)$

Folgerung $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in I$ p-mal differenzierbar ($p \in \mathbb{N}$). Dann gilt

$$f(x) = T_p|_{x_0}(x) + o\big((x-x_0)^p\big) \quad \text{für } x \to x_0 ,$$

d.h. $f(x) = T_p|_{x_0}(x) + R_p|_{x_0}(x)$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R_p|_{x_0}(x)}{(x-x_0)^p} = 0$.

Satz 2.4.3 (TAYLORscher Satz, 2.Form)
$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $(p+1)$-mal differenzierbar ($p \in \mathbb{N}_0$) und $x_0 \in I$ beliebig. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ mit $x \neq x_0$ ein $\overline{x} \in \overline{x\,x_0}$ mit

$$f(x) = T_p|_{x_0}(x) + \frac{1}{(p+1)!}\, f^{(p+1)}(\overline{x})\,(x-x_0)^{p+1}.$$

(*LAGRANGEsche Form* des Restgliedes der Taylorentwicklung.)

Satz 2.4.4
$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei im Punkte x_0 des offenen Intervalls I p-mal differenzierbar ($p \geq 2$) mit

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(p-1)}(x_0) = 0 \quad , \quad f^{(p)}(x_0) \neq 0 .$$

Dann gilt:

p gerade $\Rightarrow$ f besitzt in x_0 ein lokales Extremum, und zwar
ein lokales Minimum (Maximum), falls $f^{(p)}(x_0) > 0$ (< 0) .

p ungerade $\Rightarrow$ f besitzt in x_0 *kein* lokales Extremum .

Definition
Eine differenzierbare Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in I^\circ$ einen *Wendepunkt*, wenn eine Umgebung $U \subset I$ von x_0 existiert mit

$$\forall_{x \in U} \Big(x < x_0 \;\Rightarrow\; f(x) \geq T(x) \quad \wedge \quad x > x_0 \;\Rightarrow\; f(x) \leq T(x) \Big) \quad \text{(oder umgekehrt)}$$

mit der *Tangente* $\;x \mapsto T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\;$ in x_0.

Satz 2.4.5 (Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt)
$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf dem offenen Intervall I zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ besitzt in } x_0 \in I \text{ einen Wendepunkt} \quad \Rightarrow \quad f''(x_0) = 0\,.$$

Satz 2.4.6
$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei im Punkte x_0 des offenen Intervalls I p-mal differenzierbar ($p \geq 3$) mit

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(p-1)}(x_0) = 0 \quad , \quad f^{(p)}(x_0) \neq 0\,.$$

Dann gilt:
p ungerade $\Rightarrow f$ besitzt in x_0 einen Wendepunkt.
p gerade $\Rightarrow f$ besitzt in x_0 *keinen* Wendepunkt.

Definition
Bei einer C^∞-Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt die Folge der Taylorpolynome in $x_0 \in I$

$$x \mapsto (T_p(x))_{p \in \mathbb{N}_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)\,(x - x_0)^k$$

die *Taylorreihe* von f im Punkte x_0.

Bemerkung
Bezüglich des Konvergenzverhaltens der Taylorreihe einer C^∞-Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ sind, wenn $(R_p|_{x_0})_{p \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Restglieder bezeichnet, folgende drei Fälle möglich:

1. *Idealfall:* $\;(R_p|_{x_0})_{p \in \mathbb{N}_0} \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{p \to \infty} T_p|_{x_0} = f\,.$
   Die Taylorreihe konvergiert in der Umgebung von x_0 und stellt dort die Funktion f dar.
   Beispiele: Alle Funktionen, die eine Potenzreihendarstellung um x_0 besitzen.
2. *Schlechter:* $\;(R_p|_{x_0})_{p \in \mathbb{N}_0} \to R \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{p \to \infty} T_p|_{x_0} = f - R \neq f\,.$
   Die Taylorreihe konvergiert in der Umgebung von x_0, stellt aber (außerhalb von x_0) nicht die Funktion f dar.
   Beispiel: Die „Glockenfunktion" $x \mapsto f(x) = e^{-1/x^2}$ ist (auch in $x = 0$) C^∞-differenzierbar mit $\forall_{p \in \mathbb{N}_0}\; f^{(p)}(0) = 0$. Ihre Taylorreihe um $x = 0$ ist die Nullreihe.
3. *Ganz schlecht:* $\;(R_p|_{x_0})_{p \in \mathbb{N}_0}$ divergiert $\quad \Longleftrightarrow \quad (T_p|_{x_0})_{p \in \mathbb{N}_0}$ divergiert (für $x \neq x_0$) .
   Hier gibt es nur komplizierte *Beispiele*.

Definition
Eine auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt (reell) *analytisch*, wenn sie in der Umgebung *jedes* Punktes $x_0 \in I$ eine Potenzreihendarstellung $x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ besitzt. (Diese Reihe ist natürlich jeweils ihre Taylorreihe in x_0.)

Satz 2.4.7
Jede durch eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R dargestellte Funktion $x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist in ihrem Konvergenzintervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ analytisch.

Bemerkung
Nach Transformation auf einen neuen Entwicklungspunkt kann der Konvergenzbereich der neuen Potenzreihe über den Konvergenzbereich der alten hinausgehen.

2.5 Das RIEMANNsche Integral und die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

Definition
Es sei $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *beschränkte* Funktion.

a) Eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ ist eine $(N+1)$-elementige Teilmenge $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ von $[a, b]$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ $(N \geq 1)$. Sie liefert N Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ mit Längen $|I_k| := \Delta x_k := x_k - x_{k-1}$. Die *Feinheit* der Zerlegung sei $||Z|| := \max_{k=1,\ldots,N} |I_k|$.

b) Die *Riemannsche Obersumme* von f bzgl. der Zerlegung Z sei

$\overline{R}_f(Z) := \sum_{k=1}^{N} M_k \, \Delta x_k \quad \text{mit} \quad M_k := \sup_{x \in I_k} f(x)$,

die *Riemannsche Untersumme* entsprechend

$\underline{R}_f(Z) := \sum_{k=1}^{N} m_k \, \Delta x_k \quad \text{mit} \quad m_k := \inf_{x \in I_k} f(x)$

sowie die *Variation* (Schwankungssumme) von f bzgl. Z

$V_f(Z) := \overline{R}_f(Z) - \underline{R}_f(Z) = \sum_{k=1}^{N} |\Delta f|_{I_k} \, \Delta x_k$,

wenn $|\Delta f|_{I_k} := \sup\{|f(x) - f(x')| \mid x, x' \in I_k\}$ die Schwankung von f im Intervall I_k bezeichnet.

Beispiele sind *äquidistante Zerlegungen* $Z_N = \{a, a+h, a+2h, \ldots, a+Nh = b\}$ in N Teilintervalle der Länge $|I_k| = \Delta I_k = (b-a)/N =: h$ mit Feinheit $||Z|| = (b-a)/N$.

Definition
$\overline{R}_f := \inf\limits_Z \overline{R}_f(Z)$ heißt das *Riemannsche Oberintegral* , $\underline{R}_f := \sup\limits_Z \underline{R}_f(Z)$ das *Riemannsche Unterintegral* der beschränkten Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, wobei Infimum und Supremum bzgl. aller möglichen Zerlegungen Z des Intervalls $[a, b]$ zu bilden sind.

Definition
Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *(Riemann-) integrierbar*, wenn Riemannsches Ober- und Unterintegral übereinstimmen. Der gemeinsame Wert $R_f := \overline{R}_f = \underline{R}_f$ heißt dann *(R-) Integral* von f über $[a, b]$, bezeichnet mit $\int_a^b f(x)\, dx$.

Satz 2.5.1
Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann (R-)integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt mit Variation $V_f(Z) = \overline{R}_f(Z) - \underline{R}_f(Z) < \varepsilon$.

Satz 2.5.2
Jede *monotone* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist (R-)integrierbar.

Hilfssatz
Eine *stetige* Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einem *kompakten* Intervall $I = [a, b]$ ist dort sogar *gleichmäßig stetig*, d.h. es gilt

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{\delta > 0} \; \forall_{x, x' \in I} \, (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon) \, .$$

Satz 2.5.3
Jede *stetige* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist (R-)integrierbar.

Definition
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$.

a) Ein *Zwischenpunktvektor* zur Zerlegung Z ist ein $N-$tupel $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N)$ mit $\overline{x}_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, \ldots, N$.

b) Die *Riemannsche Summe* von f bzgl. der Zerlegung Z und des Zwischenpunktvektors $\overline{x}$ sei

$R_f(Z, \overline{x}) := \sum_{k=1}^{N} f(\overline{x}_k) \, \Delta x_k$.

Satz 2.5.4
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (R-)integrierbar. Dann gilt für eine *beliebige* Folge $(Z_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen von $[a,b]$ und für *jede* Wahl von zugehörigen Zwischenpunktvektoren $\overline{x}_l$ $(l \in \mathbb{N})$:

$$\lim_{l\to\infty} ||Z_l|| = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} R_f(Z_l, \overline{x}_l)\ .$$

Korollar
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für *jede* Zerlegung Z von $[a,b]$ und für *jede* Wahl von zugehörigen Zwischenpunktvektoren $\overline{x}$ gilt:

$$||Z|| < \delta \quad \Rightarrow \quad |R_f(Z,\overline{x}) - \int_a^b f(x)\,dx| < \varepsilon\ .$$

Kurzschreibweise hierfür: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{||Z||\to 0} R_f(Z,\overline{x})$

Satz 2.5.5 (Rechenregeln für R-integrierbare Funktionen)
$f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien integrierbar. Dann sind auch $f+g$, $\lambda\cdot f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $f\cdot g$ und $|f|$ über $[a,b]$ integrierbar mit
a) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ b) $\int_a^b (\lambda\cdot f)(x)\,dx = \lambda\cdot\int_a^b f(x)\,dx$
c) $|\int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$
Weiter gilt
d) $\forall_{x\in[a,b]}\ f(x) \le g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

Folgerung
Für eine integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:
$\forall_{x\in[a,b]}\ |f(x)| \le M \quad \Rightarrow \quad |\int_a^b f(x)\,dx| \le M\cdot(b-a)\,.$

Satz 2.5.6 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei *stetig*. Dann gibt es ein $\overline{x} \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = f(\overline{x})\cdot(b-a)\,.$

Definition
Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn sie über jedem kompakten Teilintervall $[a,b] \subset I$ R-integrierbar ist. In diesem Fall heißt (mit $c \in I$ festgewählt) die Funktion

$$x \in I \mapsto F_c(x) := \left\{ \begin{array}{cl} \int_c^x f(t)\,dt & \text{für } x > c \\ 0 & \text{für } x = c \\ -\int_x^c f(t)\,dt & \text{für } x < c \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

eine *Integralfunktion* von f. Schreibweise: $F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,.$

Satz 2.5.7 (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei *lokal integrierbar* und $c \in I$ beliebig. Dann gilt für die Integralfunktion $x \in I \mapsto F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}$:
a) F_c ist stetig. [„Integrieren macht stetig."]
b) Ist f in $x_0 \in I$ stetig, so ist F_c in x_0 sogar differenzierbar mit $F_c'(x_0) = f(x_0)$.
[„Integrieren stetiger Funktionen macht glatt."]

Folgerung
Ist $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig*, so liefert jede Integralfunktion $x \mapsto F_c(x)$ eine *Stammfunktion* von f:

$$\forall_{x\in I}\ F_c'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_c^x f(t)\,dt\right] = f(x)\ .$$

Jede stetige Funktion auf einem Intervall besitzt also dort eine Stammfunktion.

Satz 2.5.8 (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar, und besitzt f eine Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$, so gilt für alle $a,\ b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

Das Riemann-Integral läßt sich also mit Hilfe einer Stammfunktion ausrechnen.

Folgerung
Bei stetigem Integranden können die Regel über die partielle Integration und die Substitutionsregeln (siehe Satz 2.2.1 und 2.2.2) zur Berechnung bestimmter Integrale verwendet werden:

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy \quad , \quad \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a')}^{\varphi^{-1}(b')} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Anhang: Uneigentliche Riemann-Integrale

Definition
Eine lokal integrierbare Funktion $f : [a,b[\ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $a < b \leq +\infty$ heißt *über* $[a,b[$ *uneigentlich integrierbar*, wenn $\int_a^b f(t)\,dt := \lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt$ existiert.
Man sagt dann auch, das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ *konvergiert.*
Analog für uneigentliche Integrale der Form $\int_a^b f(t)\,dt := \lim\limits_{x\to a} \int_x^b f(t)\,dt$ (mit $-\infty \leq a < b$) und $\int_a^b f(t)\,dt := \lim\limits_{x\to a} \int_x^c f(t)\,dt + \lim\limits_{x\to b} \int_c^x f(t)\,dt$ (mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und einem $c \in\ ]a,b[$).

Beispiele
$\int_{-\infty}^0 e^t\,dt = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^x) = 1 \quad , \quad \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim\limits_{x\to 0}(-\log x) = +\infty$

Satz 2.5.9 (Integralkriterium für unendliche Reihen)
Sei $f : [1,\infty[\ \to \mathbb{R}$ nicht negativ und monoton fallend. Dann existiert

$$c := \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)\,dt \Big) \qquad \text{mit } 0 \leq c \leq f(1) \ .$$

Insbesondere gilt $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ konvergiert $\iff \int_1^\infty f(t)\,dt$ konvergiert
und man hat die Abschätzung $\int_1^{n+1} f(t)\,dt \ \leq\ \sum_{k=1}^n f(k) \ \leq\ \int_1^n f(t)\,dt + f(1)$.

Beispiel
Für $f(x) := 1/x$ erhält man die Existenz der *EULERschen Konstanten*

$$C := \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_1^n \frac{1}{k} - \log n \Big) = 0.577\ldots$$

sowie die Abschätzung $\log(n+1) \ \leq\ \sum\limits_1^n \frac{1}{k} \ \leq\ \log n + 1$.