Institut für Mathematik
der Universität Würzburg
Prof. Dr. H. Pabel

SS 2013

8. Übungsblatt zur Differentialgeometrie

(Besprechung am Donnerstag, den 27. Juni 2013, in der Übungsstunde)

21. M sei eine C^∞-Mannigfaltigkeit und X, $Y : M \to TM$ zwei tangentiale C^∞-Vektorfelder.

    a) Zeigen Sie, dass für jede C^∞-Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ durch $(Xf)|_x := X|_x(\overline{f})$ wieder eine C^∞-Funktion $Xf : M \to \mathbb{R}$ definiert wird mit der lokalen Darstellung

    $$(Xf)|_x = \sum_i X^i(x^j) \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x^i}(x^j) \ .$$

    b) Iterieren Sie dies, indem Sie das Vektorfeld Y wie unter a) jetzt auf die Funktion $Xf : M \to \mathbb{R}$ anwenden. Wie sieht $Y(Xf)|_x$ in lokalen Koordinaten aus ?

    c) Zeigen Sie, dass durch

    $$[X,Y](f) := Y(Xf) - X(Yf) \quad \text{für alle } C^\infty\text{-Funktion } f : M \to \mathbb{R}$$

    ein tangentiales C^∞-Vektorfeld $[X,Y] : M \to TM$ definiert wird (genannt *Kommutator* oder *Lie-Klammer* von X und Y).

    d) Beweisen Sie möglichst *ohne Verwendung von lokalen Darstellungen*:
    Der *Kommutator* von X und Y verhält sich *derivativ* in beiden Argumenten, d.h. es gilt

    $$[g \cdot X \ , \ Y] = Y(g) \cdot X + g \cdot [X,Y] \quad \text{sowie} \quad [X \ , \ g \cdot Y] = -X(g) \cdot Y + g \cdot [X,Y]$$

    für alle C^∞-Funktionen g auf M.