Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. H. Pabel

WS 2007/08

DIFFERENTIALGEOMETRIE

2.3 Abbildungen von Flächen, Kartographie

Definition
$x : G \to M$, $\overline{x} : G \to \overline{M}$ seien *injektive* Parametrisierungen zweier C^1-Flächen. Dann heißt die durch $\Psi = \overline{x} \circ x^{-1} : M \to \overline{M}$ definierte *Flächenabbildung*

a) *längentreu*, wenn zugeordnete Kurvenstücke stets gleiche Länge besitzen,

b) *winkeltreu* (konform), wenn zugeordnete Kurvenstückpaare in zugeordneten Schnittpunkten stets gleiche Winkel einschließen,

c) *flächentreu* (arealtreu), wenn zugeordnete Flächenstücke stets den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Diese Eigenschaften kann man an den 1. Grundformen $(g_{\rho\sigma})$ und $(\overline{g}_{\rho\sigma})$ erkennen:

Satz 2.4
Für eine Abbildung $\Psi = \overline{x} \circ x^{-1} : M \to \overline{M}$ zwischen injektiven C^1-Flächen in Parametrisierungen $x : G \to M$, $\overline{x} : G \to \overline{M}$ gilt

a) Ψ *längentreu* $\iff \forall_{u\in G}\ (g_{\rho\sigma})(u) = (\overline{g}_{\rho\sigma})(u) \iff \Psi$ Isometrie

b) Ψ *winkeltreu* $\iff \forall_{u\in G}\ (g_{\rho\sigma})(u) = \lambda(u)\cdot(\overline{g}_{\rho\sigma})(u)$ mit einer C^0-Funktion $\lambda > 0$

c) Ψ *flächentreu* $\iff \forall_{u\in G} \det(g_{\rho\sigma})(u) = \det(\overline{g}_{\rho\sigma})(u)$

Beweis:

a) $\int\limits_a^b \sqrt{\sum g_{\rho\sigma}(u(t))\dot{u}^\rho(t)\dot{u}^\sigma(t)}\,dt = \int\limits_a^b \sqrt{\sum \overline{g}_{\rho\sigma}(u(t))\dot{u}^\rho(t)\dot{u}^\sigma(t)}\,dt$ für alle Kurven $t \mapsto u(t)$ in dem Parametergebiet $G \quad \Rightarrow \quad \forall_{u\in G}\ (g_{\rho\sigma})(u) = (\overline{g}_{\rho\sigma})(u)$, sonst ließen sich Gegenbeispiele konstruieren.

c) $\int\limits_B \sqrt{g(u)}\,du = \int\limits_B \sqrt{\overline{g}(u)}\,du$ für alle Bereiche B in $G \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{u\in G}\ \sqrt{g(u)} = \sqrt{\overline{g}(u)}$

b) Für den Winkel δ zwischen zwei Flächenkurven $t \mapsto c_1(t) = x(u_1(t))$, $t \mapsto c_2(t) = x(u_2(t))$ gilt zunächst $\cos\delta = \frac{<\dot{c}_1,\dot{c}_2>}{|\dot{c}_1|\,|\dot{c}_2|}$, also $\sin\delta = \pm\frac{\sqrt{|\dot{c}_1|^2\,|\dot{c}_2|^2 - <\dot{c}_1,\dot{c}_2>^2}}{|\dot{c}_1|\,|\dot{c}_2|} = \pm\frac{|\dot{c}_1\times\dot{c}_2|}{|\dot{c}_1|\,|\dot{c}_2|}$, und folglich

$$\cot\delta = \pm\frac{<\dot{c}_1,\dot{c}_2>}{|\dot{c}_1\times\dot{c}_2|} = \pm\frac{\sum g_{\rho\sigma}(u)\dot{u}_1^\rho\dot{u}_2^\sigma}{\det(\dot{u}_1^\rho,\dot{u}_2^\sigma)\sqrt{g(u)}}\ .$$

Bei einer winkeltreuen Flächenabbildung ist also $\frac{\sum g_{\rho\sigma}(u)\dot{u}_1^\rho\dot{u}_2^\sigma}{\sqrt{g(u)}} = \frac{\sum \overline{g}_{\rho\sigma}(u)\dot{u}_1^\rho\dot{u}_2^\sigma}{\sqrt{\overline{g}(u)}}$ für alle Kurven $t \mapsto u_1(t)$, $t \mapsto u_2(t)$ im Parametergebiet $G \quad \Rightarrow \quad \forall_{u\in G}\ (\frac{g_{\rho\sigma}}{\sqrt{g}})(u) = (\frac{\overline{g}_{\rho\sigma}}{\sqrt{\overline{g}}})(u) \quad \Rightarrow$ $\forall_{u\in G}\ (g_{\rho\sigma})(u) = \lambda(u)\cdot(\overline{g}_{\rho\sigma})(u)$ mit einer Funktion $u \mapsto \lambda(u) > 0$. Diese Bedingung ist auch hinreichend für Winkeltreue. #

Folgerung $\quad \Psi$ längentreu $\quad\Leftrightarrow\quad \Psi$ winkeltreu *und* Ψ flächentreu.

Anwendung: Es gibt keine Karte der Erdkugel, die gleichzeitig winkel- und flächentreu ist!

Beispiele für Abbildungen eines Kugelstücks

$$(u,v) \mapsto x(u,v) = r \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (g_{\rho\sigma}(u,v)) = r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in die Ebene:

a) *Winkeltreue Abbildung* durch *stereographische Projektion* vom Nordpol $N = (0,0,r)^\top$ auf die Äquatorebene $x^3 = 0$.

Der Ansatz $N + \lambda(x(u,v) - N) = (\overline{x}^1(u,v), \overline{x}^2(u,v), 0)^\top$ liefert $r + \lambda r(\sin v - 1) = 0$, also $\lambda = 1/(1 - \sin v)$.

Ergebnis: $\quad \overline{x}(u,v) = \dfrac{r \cos v}{1 - \sin v} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \quad$ mit

$$(\overline{g}_{\rho\sigma}(u,v)) = \frac{1}{(1-\sin v)^2} \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-\sin v)^2}\,(g_{\rho\sigma}(u,v)) \ .$$

b) *Flächentreue Abbildung* durch den *Kartenentwurf von Archimedes / Lambert*.

Prinzip: Projektion eines Kugelpunktes auf einen am Äquator berührenden Kreiszylinder und Abwicklung dieses Zylinders in die Ebene.

Der Ansatz $\overline{x} = x_0 + \lambda(x - x_0)$ mit $x_0 = r\,(0,0,\sin v)^\top$ liefert $\lambda = \frac{|\overline{x}-x_0|}{|x-x_0|} = \frac{r}{|x-x_0|} = 1/\cos v$.

Ergebnis: $\quad \overline{x}(u,v) = r \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ \sin v \end{pmatrix} \quad$ (auf dem Zylinder) bzw.

$\quad \overline{\overline{x}}(u,v) = r \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ \sin v \end{pmatrix} \quad$ (in der Ebene) mit

$$(\overline{g}_{\rho\sigma}(u,v)) = (\overline{\overline{g}}_{\rho\sigma}(u,v)) = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 v \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \overline{g}(u,v) = \overline{\overline{g}}(u,v) = g(u,v) \ .$$

Literatur:

Hoschek, J.: *Mathematische Grundlagen der Kartographie.* B.I. 1984
Strubecker, K.: *Differentialgeometrie II.* Göschen 1964