Institut für Mathematik
Universität Würzburg

Wintersemester 2018/19
Stand: 8. Oktober 2018

Vorkurs

Grundbegriffe und Beweismethoden der Mathematik

Dmitri Nedrenco

Dieses Kurzskript zu Grundlagen der Mathematik hat keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern dient in erster Linie als eine Hinführung zur universitären Mathematik und mathematischen Arbeitsmethoden.

Es basiert wesentlich auf den Skripten von Dr. Jens Jordan und Dr. Florian Möller. Bei Beiden bedanke ich mich hiermit sehr herzlich für freundliche und umfassende Unterstützung. Ferner waren die Bücher »Das ist o.B.d.A. trivial!« von Albrecht Beutelspacher sowie »How to Solve It« von George Pólya wichtige Inspirationsquellen.

Dieses Kurzskript versteht sich als eine Hinführung zu Hochschulmathematik, ihrer typischer Ausdrucksweisen, Arbeitsmethoden sowie einigen grundlegenden mathematischen Begriffen wie »Zahl«, »Menge«, »Abbildung«, »Wahrheit«, »Beweis«.

Wir werden einige wenige Kerntechniken und Kenntnisse aus der Schulmathematik stillschweigend benutzen und erwarten, dass Sie diese sicher beherrschen, unter anderem:

(a) Umgang mit Brüchen. Sie können etwa mit $\frac{3}{7} + \frac{1}{2}$ sowie $\frac{1}{\frac{3}{17}}$ arbeiten.

(b) Sie kennen binomische Formeln und erkennen Sie problemlos im Kontext.

(c) Sie können lineare und quadratische Gleichungen routiniert lösen:
$x^2 - 7x + 2 = 0$, $3x - 5 = \frac{8}{17}$.

(d) Sie können mit Ungleichungen arbeiten, etwa können Sie die Ungleichungskette nachvollziehen und verifizieren:

$$\frac{3n-6}{n^2+2n+3} \leq \frac{3n}{n^2+2n+3} \leq \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}.$$

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Zahlbereiche

Wir fassen die Zahlen $1, 2, 3, \dots$ in einer Menge zusammen, für die wir kurz $\mathbb{N}$ schreiben. Dies notieren wir formal als $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$. Das Zeichen »$:=$« bedeutet, dass die linke Seite durch die rechte Seite **definiert** wird.

Wir nennen $\mathbb{N}$ die **Menge der natürlichen Zahlen**. Für die **Menge der ganzen Zahlen** setzen wir entsprechend $\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ und unter $\mathbb{N}_0$ verstehen wir die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit der Null: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Die Schreibweise $\{a, b, c, ...\}$ ist in der formalen Darstellung durchaus problematisch. Wir werden darüber in Kapitel 2 ausführlicher sprechen.

Das Zeichen »$:=$« soll nur verwendet werden, wenn das zu definierende Objekt (etwa $\mathbb{N}$) ausschließlich durch bereits definierte Objekte (etwa 1, 2, 3) erklärt wird. Sie merken, dass bereits hier »...« in der Definition der natürlichen Zahlen formal nicht sauber ist. Zu definieren, was eine gute Definition ist, ist gar nicht so einfach. Wir werden dieses Problem dadurch umgehen, dass wir viele Definition geben werden und Sie am Beispiel lernen werden, wie Definitionen gebaut sind.

Hier ist ein Beispiel dafür:

Definition 1.1 *Man sagt, dass die ganze Zahl a die ganze Zahl b **teilt**, wenn es eine ganze Zahl k gibt, so dass $ak = b$ gilt. In diesem Fall nennt man a einen **Teiler** von b und schreibt $a \mid b$. Andernfalls sagt man, dass a **kein Teiler** von b ist, und schreibt $a \nmid b$.*

So gilt $2 \nmid 3$, $2 \mid 4$, $0 \mid 0$ sowie etwa $0 \nmid z$ für alle ganzen Zahlen $z \neq 0$. Zwei weitere nützliche Definitionen sind

Definition 1.2 *Ganze Zahlen, die von 2 geteilt werden, heißen **gerade Zahlen**. Alle anderen ganzen Zahlen heißen **ungerade Zahlen**.*

Definition 1.3 *Eine natürliche Zahl n heiße **Primzahl**, wenn sie ungleich 1 ist und nur durch ± 1 und $\pm n$ teilbar ist. Die Menge der Primzahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{P}$.*

Beispiel 1.4

- Die Zahl 2 ist die einzige gerade Primzahl, denn für jede weitere gerade Zahl g gilt $2 \mid g$ und $2 \neq g$.
- Da $2 \nmid 3$, ist auch 3 eine Primzahl.
- Keine Primzahl ist 4, da $4 = 2 \cdot 2$. ⋆

Im Studium werden Sie viele verschiedene Zahlbereiche kennenlernen und präzise definieren: natürliche, ganze, rationale, reelle, komplexe Zahlen – sind nur einige Beispiele dafür.

1.2 Mathematische Arbeitsweise

Sie sehen, dass für die Definition einer Primzahl die Begriffe »natürliche Zahl« und »teilen« benutzt wurden, die bereits vorher erklärt wurden. Das ist eine typische Vorgehensweise in der Darstellung der Mathematik (jedoch nicht in der Entdeckung der Mathematik – dazu mehr in der Vorlesung): Man definiert Begriffe, formuliert Vermutungen mithilfe dieser Begriffe und beweist sie anschließend. Dann definiert man weitere Begriffe, formuliert weitere Vermutungen, beweist diese etc.

Diese Art und Weise mathematische Resultate und ganze Theorien (Analysis, Lineare Algebra, Differenzialgleichungen uvm.) im Studium zu präsentieren, ist für viele Lehrbücher und Lehrende sehr verlockend und weitgehend etabliert. Sie ermöglicht ein zusammenhängendes, formal sauberes und schnelles Vorgehen.

Man muss dabei verstehen, dass Mathematik so nicht entsteht. So wird mathematisches Wissen *gesichert* und *präsentiert*. Man darf nicht denken, dass die übliche Darstellung der Mathematik die Arbeitsweise der Mathematikerinnen und Mathematik nachahmt.

1.3 Mathematische Sprache

In der Mathematik werden viele Übersichtswörter benutzt, um schnell zu sehen, womit man zu tun hat, etwa wie oben *Definition* oder *Beispiel*. Mithilfe von **Sätzen** bzw. **Theoremen** formuliert man wichtige Aussagen, Erkenntnisse, die man beweisen kann. Ein **Beweis** ist eine schlüssige Argumentation, die lückenfrei den im Theorem formulierten Sachverhalt begründet. Über Beweise werden wir im späteren Verlauf noch mehr sprechen. Ist der Beweis zu lang oder technisch, so kann man Hilfsresultate extra hervorheben und separat beweisen. Eine solche Hilfsaussage wird **Lemma** genannt, Mehrzahl *Lemmata*. Leichte Folgerungen aus einem Theorem (die man ggf. begründen muss) werden **Korollare** genannt. So könnte das aussehen:

Definition 1.5 *Eine reelle Zahl heiße* irrational*, wenn sie keine rationale Zahl ist.*

Satz 1.6 *Die reelle Zahl* $\sqrt{2}$ *ist eine irrationale Zahl.*

Lemma 1.7 *Ist eine natürliche Zahl* n *gerade, so auch* n^2*. Ist eine natürliche Zahl* n *ungerade, so ist auch* n^2 *ungerade.*

Beweis. Hier wird das Lemma bewiesen. □

Beweis. Hier wird der Satz bewiesen. □

Korollar 1.8 *Es gibt reelle Zahlen, die keine Bruchzahlen sind.*

Ein weiteres Lemma sowie ihr Beweis haben Sie bereits in Beispiel 1.4 gesehen: 2 ist die einzige Primzahl, die zugleich eine gerade Zahl ist. Das mag offensichtlich erscheinen, aber auch dies muss man kurz begründen, siehe dort.

Mathematik bemüht sich insgesamt um eine eindeutige, interpretationsfreie Sprache. Statt »Primzahlen sind natürliche Zahlen« sagen wir lieber genauer »Alle Primzahlen sind natürliche Zahlen«. Aufgrund dessen kann ein mathematischer Text bisweilen trocken und wenig einladend zum Lesen erscheinen. Doch Sie werden die Eindeutigkeit und Präzision der Ausdrucksweise schätzen lernen (müssen).
In den Übungsaufgaben finden sich oft (u. a. zur Abwechslung!) unterschiedliche Formulierungen

- beweisen Sie, zeigen Sie, weisen Sie nach, begründen Sie,
- finden Sie, bestimmen Sie, geben Sie an,
- untersuchen Sie, charakterisieren Sie, entscheiden Sie, …

Zwar haben viele dieser Formulierungen eine leicht unterschiedliche Bedeutung, die aus dem Kontext klar wird, jedoch gilt grundsätzlich für alle solchen Formulierungen, dass Sie Ihre Lösung **immer** begründen, ausführen, verständlich machen sollen, es sei denn eine Begründung ist ausdrücklich nicht gefordert (»Geben Sie ohne Begründung alle reellen Lösungen von $x^2 - 2x = -1$ an.«).

Beispiel 1.9 »Entscheiden Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 6x^7 - 3x - 2$ eine Nullstelle hat.« Die Antwort auf diese Frage sollte nicht »hat se« oder »nö« sein, sondern sowas wie »da f eine Polynomfunktion ist, ist f stetig. Es ist ferner $f(0) = -2$ und $f(1) = 1$, daher folgt die Existenz einer reellen Nullstelle aus dem Satz von Bolzano.« ★

2 Zu Mengen

Ein fundamentaler Begriff der modernen Mathematik ist der einer Menge. Fast die ganze Mathematik fußt auf diesem Begriff. Mit Mengen kann man Zahlen, Funktionen, nahezu alle Objekte der Mathematik beschreiben. Das ist eine fundamentale wie weitreichende Einsicht der modernen Mathematik, möglichst alle Begrifflichkeiten auf die Mengenlehre und Logik zurückzuführen. Ein formaler Begriff einer Menge ist ebenso grundlegend wie kompliziert. Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts haben sich viele Mathematiker damit beschäftigt, die Beschreibung sowie den Umgang mit einer Menge widerspruchsfrei zu gestalten. Versuchen Sie selbst, aus dem Stand, den Begriff »Menge« zu definieren. Es ist sehr wahrscheinlich, dass jede Definition, die Sie finden, zu Problemen führen würde. Auch wir werden hier passen und keine formale Definition geben – weil das viel zu weit führte –, sondern uns lediglich mit einer anschaulichen Beschreibung[1] zufrieden geben müssen. Mit dieser Sichtweise auf eine Menge kann man im mathematischen Alltag trotzdem sehr gut arbeiten, man muss sich allerdings der nichtformalen Definition bewusst sein und zumindest wissen, dass es möglich ist, eine formal zufriedenstellende Definition zu geben (etwa vermöge des Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystems).

2.1 Definitionen und Paradoxa

Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Diese »Definition« geht auf einen der größten deutschen Mathematiker, Georg Cantor (1845–1918), zurück, der trotz vieler (mathematischer wie sozialer) Schwierigkeiten die Mengelehre beinahe eigenhändig erschaffen und weit voran getrieben hat.

An dieser »Definition« können Sie natürlich erkennen, dass sie keine ernsthafte Definition sein kann; Wörter wie »Anschauung«, »wohlunterschieden«, »Zusammenfassung« sind hier nicht mal annähernd definiert. Ausgehend von diesem natürlichen, aber salopp definierten Begriff der Menge (denken Sie an eine Menge der Äpfel, Matrikelnummer, Wassermoleküle etc.) können wir trotzdem vernüftige Mathematik betreiben. Man muss nur dafür sorgen, dass es eine präzise Definition gibt.

Definition 2.1 *Sei M eine Menge. Ist x ein Element von M, so schreiben wir $x \in M$ und sagen, dass x* ***in M liege*** *oder* ***zu M gehöre****. Andernfalls schreiben wir $x \notin M$.*

Ist M eine endliche Menge (das heißt M hat nur endlich viele Elemente), dann bezeichnen wir mit $|M|$ diese Anzahl. So ist etwa $|\{1, 2, 5\}| = 3$. Für unendliche Mengen M schreibt man oft $|M| = \infty$.

Mengen können folgendermaßen beschrieben werden:

Aufzählung Hier gibt man explizit die Elemente der Menge an, z. B. $M := \{a, b, c, d\}$ für die Menge, die die Elemente a, b, c, d enthält.

Auszeichnung Man fügt M nur die Elemente hinzu, die eine gewisse Eigenschaft haben, z. B. »Alle minderjährigen Studierenden« oder äquivalent »Alle Studierenden, die die Eigenschaft E haben, minderjährig zu sein«, in Zeichen

$$M := \{x \in \text{Studierende} \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}.$$

Beispiel 2.2 Wir haben bereits einige Beispiele gesehen:

[1] Die unweigerlich nicht ohne Widersprüche sein wird!

- Es ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ sowie $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- Die Menge der geraden natürlichen Zahlen lässt sich schreiben als

  $$2\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ ist ein Teiler von } x\} = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

- Die Menge der 3er-Potenzen ist gegeben durch

  $$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } r \in \mathbb{N}_0 : n = 3^r\}.$$

  Man könnte hierfür auch $\{3^r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$ und oben $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ schreiben. Meistens ist aus der Darstellung klar, was der Autor meint. ★

Die Angabe einer Menge durch Aufzählen ihrer Elemente ist bereits im Endlichen oft problematisch (alle Studierenden auflisten?!); im Unendlichen kommt naturgemäß ein weiteres Problem dazu – hier ist das gar nicht möglich, *alle* Elemente aufzulisten. Deswegen greift man oft zu einer ungenauen Darstellung und hofft, richtig verstanden zu werden. Im obigen Beispiel ist etwa die Menge der natürlichen Zahlen als $\{1, 2, 3, \dots\}$ beschrieben. Aber was bedeutet »…«? Nun, jeder wird sagen: Ist doch klar, ich soll mir diese Zahlenreihe fortgesetzt denken: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ und so weiter. Hier entstehen zwei Fragen: 1) Wie weit weiter? 2) Wie weiter? Schreibt jemand $\{1, 2, 4, 3, 6, 5, 7, 10, 8, 9, \dots\}$, sind Sie sich nicht mehr sicher, wie es »weiter gehen« soll, auch wenn das nach der Menge der natürlichen Zahlen *aussieht*. Welche Elemente enthält die Menge $\{1, 2^3, 3, 4^3, 5, \dots\}$? Ist das »nächste« Element der Aufzählung 6^3 oder 8^3? Es folgt, die Beschreibung einer Menge durch »…« mit Vorsicht verwenden!

Die Angabe einer Menge durch Charakterisierung ihrer Elemente mittels einer (oder mehreren) Eigenschaft ist häufiger formal besser, vgl. dazu die zwei Darstellungen von $2\mathbb{N}$ im obigen Beispiel. Doch auch hier kommt man zu Problemen. Betrachten Sie die Menge $\{x \mid x < 5\}$. Welche Elemente liegen in dieser Menge? Dazu muss man doch wissen, ob die x natürliche Zahlen oder reelle Zahlen oder etwas ganz anderes durchlaufen. Ansonsten macht diese Schreibweise wenig Sinn. Daher sollten wir immer klar machen, woher wir Elemente mit der uns interessierenden Eigenschaft nehmen: $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\{x \in \text{ Studierende} \mid x \text{ ist minderjährig}\}$. Leider ist es nicht immer ohne Weiteres möglich, die »Obermenge« anzugeben. Angenommen, ich möchte alle möglichen Bündnisse der Parteien A, B, C bilden, also unter anderem die Mengen $\{A\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$. Wie beschreibe ich die Menge dieser Bündnisse? $\{x \in ??? \mid x \text{ ist ein Bündnis}\}$ Dieses Problem werden wir weiter unten eher pragmatisch lösen. Aber eine recht naheliegende Lösung wäre zu sagen, es gibt eine All-Menge[2], in der alles-alles drin liegt (Hunde, Zahlen von 1 bis 17, meine Gedanken, Ihr Vorname). Dann könnte man aus ihr per Eigenschaftsbetrachtung Elemente aussondern. Hier stoßen wir aber auf ein Paradoxon, das zu seiner Zeit[3] deutlich aufgezeigt hat, dass ein zu naiver Umgang mit Mengen nicht sinnvoll möglich ist, und die Entwicklung der modernen Mengenlehre angestoßen hat. Betrachten wir die nicht ganz alltägliche Menge derjenigen Elemente, die sich selbst nicht enthalten[4]: $A := \{x \in \text{ All-Menge} \mid x \notin x\}$. Nun, ist A ein Element von A? Wenn A ein Element von A ist, dann per definitionem von A gilt $A \notin A$, Widerspruch. Wenn A kein Element von A ist, also $A \notin A$, dann ist doch nach Definition von A sofort $A \in A$, Widerspruch. Was tun? Das zeigt, dass der Begriff einer All-Menge nicht sinnvoll ist. Ferner zeigt dies, dass man nicht alles, was man will, als eine Menge bezeichnen sollte. Das stellt sofort die Frage: Wie darf man denn Mengen erzeugen, wobei wir dann wieder bei der Definition wären. Heutzutage (also seit etwa 100

[2] Diese könnte man über $\{x \mid x = x\}$ definieren.
[3] Russelsche Antinomie, 1903.
[4] Wenn Sie meinen, Mengen können sich doch nicht selber enthalten, müssen Sie erstmal genau erklären warum nicht.

Jahren) löst man das Problem axiomatisch: Man startet mit *einer* Menge und stellt genaue Regeln auf, wie daraus weitere Mengen gebaut werden dürfen. Außerdem unterscheidet man zwischen »Mengen» und »Klassen«, so gibt es etwa eine »All-Klasse«, aber eben keine »All-Menge«. Dabei belassen wir diese Diskussion.

2.2 Notationen

Sind die Mengen $\{2, 5, 17\}$ und $\{5, 2, 17, 2\}$ gleich? Ja, wir legen das so fest.

Definition 2.3 *Zwei Mengen M und N sind genau dann gleich, in Zeichen: $M = N$, wenn sie dieselben Elemente enthalten, in Zeichen $x \in M$ genau dann, wenn $x \in N$.*

Auf den ersten Blick mag diese Definition vielleicht verwundern, schließlich folgt daraus $\{1\} = \{1, 1\}$ oder $|\{1, 2, 2, 17\}| = 3$, aber es leuchtet ein, dass mehrmaliges Antreffen einer Person auf einer Party diese Person nicht vervielfacht. Insbesondere spielt die Reihenfolge der Elemente in der Mengendarstellung keine Rolle[5].

Definition 2.4 *Eine Menge M heißt* ***Teilmenge*** *einer Menge N, in Zeichen: $M \subseteq N$, wenn jedes Element aus M auch in N liegt. Gilt $M \subseteq N$ und ist zudem noch $M \neq N$, so nennt man M eine* ***echte*** *Teilmenge von N und schreibt $M \subsetneq N$.*

So ist etwa $\{2, 3, 2, 3\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$ und $\{\text{rote Autos}\} \subsetneq \{\text{Autos}\}$. Beachten Sie, dass direkt aus der Definition folgt, dass $M = N$ genau dann der Fall, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.

Eine überaus nützliche Menge ist das Gegenteil der All-Menge, nämlich die **leere Menge**.

Definition 2.5 *Für jede beliebige Menge M definieren wir*

$$\varnothing := \{\} := \{x \in M \mid x \neq x\}.$$

Da »$x = x$« für beliebige x gültig ist, ist »$x \neq x$« immer ein Widerspruch. Also wählen wir in der obigen Definition *kein* Element aus. Also hat $\varnothing$ keine Elemente. Beachten Sie in der Definition, dass die leere Menge nicht von M abhängig ist, denn die Eigenschaft, keine Elemente zu haben, legt die leere Menge eindeutig fest: Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält, vgl. Definition 2.3. Man spricht also zurecht von *der* leeren Menge.

Satz 2.6 *Für jede Menge M gilt $\varnothing \subseteq M$.*

Beweis. Wäre $\varnothing \subseteq M$ nicht richtig, dann gäbe es ein Element in $\varnothing$, das nicht in M läge. Aber solche Elemente gibt es gar nicht, da ja in $\varnothing$ gar keine Elemente liegen. Daher ist $\varnothing \subseteq M$ trivialerweise erfüllt. □

Weiter oben ist uns bereits die »Menge aller Teilmengen« – wir haben Bündnisse gebildet – begegnet. Diese Menge spielt eine wichtige Rolle, deswegen geben wir ihr einen Namen.

Definition 2.7 *Für jede Menge M nennen wir die Menge $\mathscr{P}(M)$ oder 2^M aller Teilmengen von M die[6]* ***Potenzmenge*** *von M.*

Leider können wir $\mathscr{P}(M) := \{A \in ??? \mid A \subseteq M\}$ nicht sinnvoll hinschreiben. Woraus sollen A kommen? Formal wird man die Existenz der Potenzmenge zu einem Axiom erheben.

Beispiel 2.8 Es ist etwa $\mathscr{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ sowie $2^\varnothing = \mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Warum ist $\varnothing \neq \{\varnothing\}$? Was ist $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$? ★

Den Beweis des nächsten Satzes verlagern wir in die Übungen.

Satz 2.9 *Sei M eine endliche Menge (sie habe also $|M| < \infty$ Elemente), dann hat ihre Potenzmenge 2^M genau $2^{|M|}$ Elemente[7].*

Dieser Satz legt nahe, warum die Potenzmenge oft mit 2^M bezeichnet wird.

[5] Was kann man machen, wenn man doch eine Reihenfolge braucht? Dazu kommen wir später.

[6] Wir werden in den Übungen klären, warum man von *der* Potenzmenge einer gegebenen Menge sprechen darf.

[7] Beachten Sie, dass 2^M eine Menge und $2^{|M|}$ eine Zahl ist.

2.3 Operationen mit Mengen

Wir haben bereits gesehen, wie man Mengen darstellen kann; wie man Teilmengen aus anderen Mengen durch Eigenschaftsüberprüfung erzeugt; haben die leere Menge und die Potenzmenge kennengelernt. Wir wollen nun weitere Möglichkeiten notieren, neue Mengen zu generieren.

2.3.1 Vereinigungen

Betrachten wir zwei Mengen, $\{1, 2, 9\}$ und $\{-1, 4, 9\}$. Welche Menge enthält alle Elemente der beiden Mengen? Die Vereinigungsmenge $\{-1, 1, 2, 4, 9\}$.

Definition 2.10 *Seien M und N zwei Mengen. Die Menge $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$ nennen wir **Vereinigung(smenge)** der Mengen M und N; sie[8] enthält sowohl Elemente aus M als auch die aus N.*

Analog lässt sich die obige Definition auf mehrere Menge erweitern: In der Menge $\bigcup_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cup M_2 \ldots \cup M_n$ liegen genau die Elemente, die sich in irgendeinem der M_i finden. Auch unendliche Vereinigung sind möglich. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M_n := \{1, 2n\}$. Möchte man die Vereinigung *aller* Mengen M_n bilden, also $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_n \cup \ldots$, so notiert man das wie folgt: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Diese Ergebnismenge ist genau die Menge $2\mathbb{N} \cup \{1\}$ (warum?). Dabei nennt man $\mathbb{N}$, aus dem die Indizes n kamen, die **Indexmenge**. Ist eine Indexmenge nicht erkennbar oder möchte man allgemein einen Haufen von Mengen vereinigen, so definiert man

Definition 2.11 *Sei S eine Menge von Mengen. Die Vereinigung aller Mengen in S ist die Menge*

$$\bigcup_{M \in S} M := \{x \mid \text{es gibt ein } M \in S \text{ mit } x \in M\},$$

die genau die Elemente enthält, die in irgendeinem $M \in S$ liegen.

2.3.2 Durchschnitte

Ganz analog verfährt man, wenn man Elemente mehrerer Mengen nicht zusammenlegen möchte, sondern genau die Elemente haben will, die gleichzeitig in allen diesen Mengen liegen; man bildet eine Schnittmenge. Die Mengen $\{\emptyset, 3, 17\}$ und $\{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n \leq 100\}$ enthalten jeweils die Elemente 3 und 17.

Definition 2.12 *Der **Durchschnitt** zweier Mengen M und N sei bezeichnet durch*

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

Sei ferner S eine Menge von Mengen, dann bezeichne $\bigcap_{M \in S} M := \{x \mid \text{ für alle} M \in S \text{ gilt } x \in M\}$ die Menge derjenigen Elemente, die in jeder der Mengen $M \in S$ vorkommen.

Beispiel 2.13 Es gilt $\{1, 2\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2\}$ und $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} \cap \{1, 3\} = \emptyset$. Was ist $\mathbb{N} \cap \mathbb{P}$? Was ist $2\mathbb{N} \cap \mathbb{P}$? ⋆

2.3.3 Komplemente

Möchte man nur solche Elemente einer Menge M betrachten, die nicht in einer anderen Menge N liegen, dann kann man das offenbar mittels $\{x \in M \mid x \notin N\}$ erledigen. Da solche Konstruktionen oft auftreten, gibt man ihnen einen Namen: Komplemente[9]. Das **Komplement** einer Menge N in

[8] Beachten Sie »$\{x \mid \ldots\}$« in der Definition. Wie bei der Potenzmenge müssten wir formal die Existenz einer solchen Menge als ein Axiom nehmen.

[9] Nicht mit Komplimenten zu verwechseln.

einer Menge M definieren wir als $M \backslash N := \{x \in M \mid x \notin N\}$ und sagen dazu »M ohne N«. So ist etwa $\mathbb{N}\backslash 2\mathbb{N}$ genau die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Es ist $\{1, 5, 13\}\backslash\{2, 13\} = \{1, 5\}$.

Was ist $M\backslash\emptyset$ oder $M\backslash(M\backslash\{m\})$ für ein $m \in M$?

2.3.4 Kartesisches Produkt

Wir wissen, dass eine Menge weder Reihenfolge noch Häufigkeit vorsieht, es ist $\{1, 2\} = \{2, 1, 1\}$. Insbesondere ist es offenbar nicht ratsam aus $\{23, 100\} = \{100, 23\}$ die Identitäten $23 = 100$ und $100 = 23$ zu folgern. Doch ganz oft haben wir mit geordneten Ereignissen zu tun. Denken Sie an die Top10 der Tennisspielerinnen der Welt – da ist die Reihenfolge sehr wohl wichtig. Oder denken Sie an Koordinaten der Ebene: $(2, 1)$ ist ganz was anderes als $(1, 2)$. Wie modellieren wir also »Reihenfolge« allgemein? Wir können erstmal formulieren, was wir genau wollen.

Unter einem geordneten Paar zweier Objekte x, y verstehen wir ein Objekt (x, y) mit der Eigenschaft $(x, y) = (x', y')$ genau dann, wenn $x = x'$ und $y = y'$. Insbesondere ist $(x, y) \neq (y, x)$, falls $x \neq y$. Diese Darstellung dürfte unsere Vorstellung der »Ordnung« entsprechen. Doch was soll dieses Objekt (x, y) sein? Ich formuliere das obige Problem anders: Können wir Elemente eines Paars allein mittels des Mengenbegriffs modellieren? Das klingt paradox, doch das geht – wenn auch nicht ganz intuitiv.

Definition 2.14 (Kuratowski, 1921) *Unter einem* ***geordneten Paar*** *zweier Objekte x, y verstehen wir das Objekt*

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Nun haben wir (x, y) allein mittels Mengen definiert. Doch ist diese Definition sinnvoll? Erfüllt sie die oben dargestellte Eigenschaft der Ordnung? Klar ist, dass im Falle $x = y$ die Menge $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$ einelementig ist. In dem Fall passt diese Definition zu der oben dargestellten Vorstellung der Ordnung.

Seien nun x, y, x', y' Elemente einer Menge mit $x \neq y$ und $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$. Aus der Gleichheit zweier Mengen ergeben sich zwei Möglichkeiten:

- $\{x\} = \{x'\}$, dann gilt $x = x'$ und $\{x, y\} = \{x', y'\}$. Daraus folgt $y = y'$ und wir sind fertig.
- Ansonsten müsste $\{x\} = \{x', y'\}$ sein, was $x' = y'$ nach sich zieht. Daraus folgt aber sofort $x = y$ im Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq y$.

Also definiert $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ tatsächlich ein geordnetes Paar.

Das Konzept des geordneten Paares lässt sich auf mehrere Komponenten verallgemeinern, indem man rekursiv definiert

$$(x_1, \dots, x_n) := \big((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n\big).$$

Auch hier gilt wieder

$$(x_1, \dots, x_n) = (x_1', \dots, x_n') \text{ genau dann, wenn } x_1 = x_1' \text{ und } \cdots \text{ und } x_n = x_n'.$$

Ein solches Objekt $(x_1, \dots, x_n)$ heißt **n-Tupel**. Statt »2-, 3-, 4-Tupel« sagt man vornehmeer »Paar«, »Tripel«, »Quadrupel«.

Denken wir an Koordinaten in der Ebene oder im Raum, so lassen sie sich wie folgt mittels n-Tupeln beschreiben:

Definition 2.15 *Unter dem* ***kartesischen Produkt*** *der Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$ verstehen wir die Menge*

$$M_1 \times \cdots \times M_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in M_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}.$$

Sie besteht aus allen möglichen n-Tupeln, wobei in der i-ten Komponente des Tupels nur Elemente aus M_i auftreten dürfen. Gilt $M = M_1 = \cdots = M_n$, so schreibt man statt $M_1 \times \cdots \times M_n$ auch M^n.

Bemerkung 2.16

- Die Punkte des dreidimensionalen Raums lassen sich als Elemente der Menge $\mathbb{R}^3$ auffassen.
- Seien M, N Mengen, die m bzw. n Elemente enthalten. Dann enthält die Menge $M \times N$ genau mn Elemente.
- Auch wenn kein erkennbarer Sinn dahintersteckt, können wir mathematisch problemlos die Menge $\{\text{Bananen}\} \times \mathbb{P}$ hinschreiben und analysieren. ★

2.4 Wichtige Regeln

Beim Operieren mit Mengen gibt es zahlreiche Rechenregeln, die einem die Arbeit erleitern. Nicht alle von ihnen lassen sich leicht memorieren, aber man sollte sie möglichst beherrschen. Diese Regeln werden hier ohne Beweis angegeben, ihre Beweise sind elementar und eine gute, wenngleich langweilige Übung.

Satz 2.17 *Seien M, N, L Mengen und X sei irgendeine Obermenge von M und N. Dann gelten:*

(a) $M \backslash M = \emptyset,\ M \backslash \emptyset = M$.

(b) $M \cap M = M,\ M \cup M = M$.

(c) $X \backslash (X \backslash M) = M$.

(d) *Kommutativität:*
$$M \cup N = N \cup M,$$
$$M \cap N = N \cap M.$$

(e) *Assoziativität:*
$$(M \cup N) \cup L = M \cup (N \cup L),$$
$$(M \cap N) \cap L = M \cap (N \cap L).$$

(f) *Distributivität:*
$$(M \cap N) \cup L = (M \cup L) \cap (N \cup L),$$
$$(M \cup N) \cap L = (M \cap L) \cup (N \cap L).$$

(g) *de Morgansche Regeln*
$$X \backslash (M \cap N) = (X \backslash M) \cup (X \backslash N)$$
$$X \backslash (M \cup N) = (X \backslash M) \cap (X \backslash N).$$

Zu Übungszwecken beweisen wir eine der Aussagen. Den Rest kann man ohne große Mühe mit derselben Technik beweisen.

Beweis (von g)). Zunächst zeigen wir $X \backslash (M \cup N) \subseteq (X \backslash M) \cap (X \backslash N)$. Sei dazu $x \in X \backslash (M \cup N)$. Dann ist $x \in X$, aber $x \notin M \cup N$. Demnach ist x weder Element von N noch Element von M. Also ist x sowohl in $X \backslash M$ wie auch in $X \backslash N$ und damit auch im Durchschnitt dieser beiden.

Nun zeigen wir noch $X \backslash (M \cup N) \supseteq (X \backslash M) \cap (X \backslash N)$. Ist $x \in (X \backslash M) \cap (X \backslash N)$, dann ist x sowohl in $X \backslash M$ als auch in $X \backslash N$. Damit ist x weder in M noch in N und damit in $X \backslash (M \cup N)$.

Damit ist der Beweis erbracht. □

3 Zu Abbildungen

Eine weitere fundamentale Begrifflichkeit in der Mathematik ist »Abbildung« oder »Funktion«. Funktionen kennen Sie bereits recht gut aus der Schule. Dort werden Funktionen oft in der Form $y = x^2 + 7$ oder allgemeiner $y = f(x)$ angegeben. Dabei sind x und y typischerweise reelle Zahlen oder genauer: Unbekannte, für die reelle Zahlen eingesetzt werden. Das ist für die Mathematik eine zu eingeschränkte Sicht. Wir wollen allgemeinere Funktionen. Unter Funktionen werden wir mehr oder minder einfach Zuordnungen verstehen. So bekommt jede Studentin und jeder Student eine Matrikelnummer zugeordnet, jeder Mensch ein Geburtsdatum. Verkürzend kann man hier sagen: Die Menge S der Studierenden im gegebenen Hörsaal wird abgebildet in die Menge aller Matrikelnummern. Analog mit dem Geburtstag. Nicht jede Zuordnung wollen wir als eine Funktion bezeichnen. So würden Viele in der folgenden Darstellung keine Funktion sehen (was spricht dagegen?!):

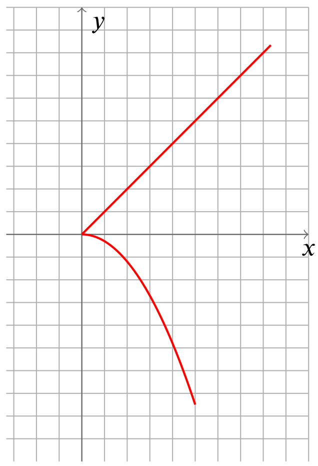

Bild 1: Wohl keine Funktion?!

Also, warum nicht? Nun, »weil ein x mehrere y hat«. Wir wollen exakt sagen können, worauf unsere Elemente gehen sollen. Jeder Mensch sollte nicht mehr als ein Geburtstag haben. Interessant ist etwa, dass die Zuordnung $\{\text{Menschen}\} \to \{\text{Vornamen}\}$ im üblichen Sinne keine Funktion darstellt.

Welche Eigenschaften brauchen wir noch? Das war es, im Grunde. Wir sollten nur noch eine sinnvolle Darstellung für die Definition einer Abbildung[10] wählen. Betrachten wir dazu die folgende Zuordnung: $n \mapsto \frac{n}{2}$. Warum ist das noch keine Funktion? Weil nicht klar ist, was n ist. Man könnte spekulieren, dass n eine natürliche Zahl ist. Was ist dann $\frac{n}{2}$ für etwa $n = 3$? Keine natürliche Zahl. Das heißt, damit diese Zuordnung eine Funktion ist, könnten wir hier sagen, dass Elementen der Menge der natürlichen Zahlen rationale Zahlen zugeordnet werden. Anders gesagt betrachten wir Paare $(n, \frac{n}{2})$ aus der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$. Dabei ist in diesem einfachen Beispiel sofort ersichtlich, dass einer natürlichen Zahl n nicht mehr als eine rationale Zahl, nämlich $\frac{n}{2}$, zugeordnet wird.

Klar ist aber auch, dass n auch etwas völlig anderes sein könnte, zum Beispiel die Nachnamen der Studierenden im Hörsaal. Dann ergibt $\frac{n}{2}$ erstmal gar keinen Sinn. Das legt nahe, dass für eine Funktion vernünftigerweise gesagt werden muss, woher die abzubildenden Elemente kommen

[10] Ob man »Abbildung« sagt oder »Funktion«, ist egal. Nach meinem Gefühl sagt man zu allgemeinen Zuordnungen »Abbildung« und zu solchen, bei denen Zahlen involviert sind »Funktionen«, aber das ist sicherlich keine Konvention.

und wohin sie gehen sollen. Wir bestimmen also letzlich zwei Mengen A und B und drücken die Beziehungen »a nach b« mittels »(a, b)« aus. Das ist: Wir geben eine Teilmenge von $A \times B$ an.

3.1 Abbildungsdefinition

Also definieren wir:

Definition 3.1 *Seien A, B Mengen und $R \subseteq A \times B$. Das Tripel*

$$f = (A, B, R)$$

nennt man ***Abbildung*** *oder* ***Funktion*** *von A nach B, wenn es zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ mit $(x, y) \in R$ gibt.*

Bemerkung 3.2 Sei $f = (A, B, R)$ eine Funktion.

- Statt $(x, y) \in R$ schreibt man üblicherweise $y = f(x)$ und nennt y das **Bild von** x unter der Abbildung f. Mit dieser Vereinbarung gibt man f typischerweise in der Form

  $$f : A \to B, \quad x \mapsto f(x)$$

  an, die man auch aus der Schule kennt.

- Die Menge A nennt man **Definitionsbereich** und B **Ziel- oder Wertebereich**.

- Die Menge R nennt man **Graph von f**. Betrachten wir etwa Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist der Graph eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Dieses Beispiel erklärt die Namensgebung »Graph«, vgl. auch Bild 1. ★

Beispiel 3.3
- Ist $\{1, 2\} \to \{3, 7\}$ mit $1 \mapsto 7$ und $2 \mapsto 3$ eine Abbildung?
- Das Tripel $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \{(z, z^2)\})$ ist eine Abbildung, die man lesbarer als $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto z^2$ notiert.
- Sind $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2+17x+93}{x+1}$ sowie $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto \sqrt{x}$ Funktionen? ★

Direkt aus der Definition 3.1 folgt wegen der Gleichheit von Tripeln der folgende Satz.

Satz 3.4 *Seien $f = (A_1, B_1, R_1)$ und $g = (A_2, B_2, R_2)$ Abbildungen. Genau dann ist $f = g$, wenn $A_1 = A_2$ und $B_1 = B_2$ und $R_1 = R_2$ gilt, wenn also f und g denselben Definitions- und Zielbereich haben und für alle $x \in A_1 = A_2$ gilt $f(x) = g(x)$.*

Wir halten noch einmal fest: Um eine Abbildung eindeutig festzulegen, werden immer **drei** Angaben benötigt: Definitionsbereich, Zielbereich und die im Graphen codierte Abbildungsvorschrift. So haben die Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^3$ und $\mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n^3$ zwar dieselbe Abbildungsvorschrift, als Abbildungen sind sie aber nicht gleich. Was können Sie über Graphen dieser Abbildungen sagen?

3.2 Bilder und Urbilder

Für eine Funktion $f : A \to B$ haben wir bereits festgelegt, was das Bild eines Elementes $x \in A$ sein soll, nämlich $f(x)$. Sehr häufig fasst man die Menge aller Bilder zu einer Menge zusammen durch $\operatorname{Bild} f := f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$ und nennt sie **Bild von f**.

Offenbar muss das Bild von $f : A \to B$ nicht mit B übereinstimmen, etwa für die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto 2n$ besteht das Bild von f genau aus geraden natürlichen Zahlen. Darüber sprechen wir gleich mehr.

Eine weitere sehr häufig benutzte Menge ist die Menge der Urbilder eines Elements aus dem Wertebereichs. In der Abbildung $\{\text{Studierende im Hörsaal}\} \to \{\text{Datum}\}$, $x \mapsto \text{Geburtstag}(x)$ könnte es interessant sein zu erfahren, welche Studierende denselben Geburtstag haben. Für eine Funktion $f : A \to B$ und ein $b \in B$ bezeichnet man die Menge $f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}$ als das **Urbild** von b unter f. Es ist ganz wesentlich festzustellen, dass zwar das Bild eines Elements aus dem Definitionsbereich ein einzelnes Element ist, das Urbild eines Elementes aus dem Wertebereich durchaus eine Menge mit mehreren Elementen sein kann. Das verletzt die Definition der Funktion keinesfalls.

Analog definiert man für $X \subseteq A$ das Bild von X unter $f : A \to B$ als $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$ sowie für $Y \subseteq B$ das Urbild von Y als $f^{-1}(Y) := \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A$.

Beispiel 3.5 Sei

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } n \geq 4, \\ n^2 & \text{falls } n < 4. \end{cases}$$

- Es ist $f(\mathbb{P}) = \{1, 4, 9\}$.
- Es gilt $f^{-1}(\mathbb{P}) = \emptyset$.
- Man hat $f^{-1}(\mathbb{N}\backslash 2\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 4\} \cup \{1, 3\} = \mathbb{N}\backslash\{2\}$. ★

3.3 Eigenschaften von Abbildungen

Wir untersuchen oft spezielle Funktionsklassen, etwa $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ usw., und studieren ihre Eigenschaften. So gibt es stetige, differenzierbare, integrierbare, konvexe Abbildungen und noch viele mehr. Doch es gibt drei sehr wichtige Eigenschaften, die praktisch überall auftauchen, wo Sie mit Abbildungen zu tun haben. Diese drei Eigenschaften: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, machen allgemeine Aussagen über das Abbildungsverhalten. All diese Eigenschaften haben wir bereits in Beispielen gesehen.

3.3.1 Injektivität

Betrachten Sie etwa die Funktion $\{\text{Studierende}\} \to \mathbb{N}$, die einer Person ihr Alter zuordnet. Eine solche könnte zum Beispiel für statistische Erhebungen interessant sein, bei denen nur das Alter der jeweiligen Person interessant ist. Betrachtet man also die Bilder dieser Funktion, so sieht man nur natürliche Zahlen. Das Urbild der Zahl 21 besteht aus ganz vielen Elementen – allen Studierenden, die gerade 21 Jahre alt sind. Bekommen Sie etwa nur das Bild von f überliefert, so können Sie nicht darauf schließen, welche Person wie alt ist. Diese starke Vergröberung der Information ist natürlich nicht immer von Vorteil. Möchte man klar stellen, dass die gegebene Funktion $f : X \to Y$ die Eigenschaft hat, die Information beim Abbilden nicht zu vergröbern, also zwei beliebigen Elementen x_1, x_2 aus dem Definitionsbereich, zwei *verschiedene* Elemente $f(x_1), f(x_2)$ zuzuordnen, so nennt man eine solche Funktion **injektiv**. Gibt es dagegen zwei verschiedene Elemente $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, dann nennt man f **nicht injektiv**.

Beispiel 3.6 Viele Funktionen sind injektiv, etwa

- $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$; $n \mapsto n^2$.
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto x$.
- $\{\text{Studierende}\} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \text{Matrikelnummer}(x)$.

Ganz viele Funktionen sind nicht injektiv, etwa

- $\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto 1;\ n \mapsto \text{Quersumme}(n)$.
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2; x \mapsto \sin x;$.
- $\{\text{Studierende}\} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \text{Alter}(x)$. ⋆

Je nach Situation wählt man zwischen äquivalenten Formulierungen, um eine gegebene Funktionen auf Injektivität zu untersuchen.

Satz 3.7 *Für eine Funktion $f : X \to Y$ sind äquivalent:*

- *f ist injektiv.*
- *Für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
- *Für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.*
- *Für jedes $y \in Y$ besteht sein Urbild $f^{-1}(y)$ aus höchstens[11] einem Element.*

Wie viele Funktionen $\{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ gibt es? Wie viele davon sind injektiv? Probieren Sie es mit anderen Mengen. Wagen Sie eine Vermutung über das Verhältnis von injektiven zu allen Abbildungen der Form $f : A \to B$ mit $|A| = n = |B|$.

3.3.2 Surjektivität

Bei Abbildungen wie $\{\text{Studierende}\} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \text{Alter}(x)$ überrascht, dass man die ganze unendliche Menge $\mathbb{N}$ »mitschleppt«, wo man doch nur höchstens zweistellige Zahlen braucht[12]. Diese »Ineffizienz« ist oft nachteilig. Untersuchen Sie etwa in einem Beweis Elemente des Wertebereichs, so ist es unter Umständen hilfreich zu wissen, ob diese im Bild liegen, also tatsächlich Urbilder besitzen. Funktionen $f : X \to Y$, die zu jedem Element im Wertebereich mindestens ein Urbild haben, also für jedes $y \in Y$ existiert mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, nennt man **surjektiv**. Gibt es hingegen ein Element $y \in Y$ mit $f^{-1}(y) = \emptyset$, dann nennt man die Funktion f **nicht surjektiv**.

Beispiel 3.8

- Die Abbildung $\{\text{Studierende}\} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \text{Matrikelnummer}(x)$ ist nicht surjektiv
- $\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^2$ ist nicht surjektiv
- $\mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \text{Ganzteil}(x)$ ist surjektiv.
- Erklären Sie nun den Ausdruck »aus höchstens einem Element« in Satz 3.7. ⋆

Bereits aus der Beschreibung folgt, dass für surjektive Funktionen das Bild mit dem Wertebereich übereinstimmen. Äquivalente Formulierungen der Surjektivität sind:

Satz 3.9 *Für eine Funktion $f : X \to Y$ sind äquivalent:*

- *f ist surjektiv.*
- *$f(X) = Y$.*

[11] Warum sagt man hier nicht »aus genau einem«? Was denken Sie?

[12] Ausnahmen wie Methusalem mit seinen 969 Jahren sind hier uninteressant, da er ziemlich sicher kein Student nach deutschem Recht war.

- *Zielbereich und Bild der Funktion stimmen überein.*
- *Jedes Element y des Zielbereichs Y hat mindestens ein*[13] *Urbild unter f, also $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.*

Es ist fundamental wichtig zu verstehen, dass Injektivität und Surjektivität völlig unabhängig voneinander sind:

Beispiel 3.10

- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv und nicht surjektiv
- $\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^0,\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, aber surjektiv
- $\{1,2,3\} \to \{1,4,9\},\ x \mapsto x^2$ ist injektiv und surjektiv. ⋆

Bemerkung 3.11 Ab und an sagt man abkürzend, dass »die Funktion f die Menge A *auf* B abbildet«, und meint damit, dass $f : A \to B$ surjektiv ist. Achten Sie darauf! Wenn Sie nichts über die Surjektivität von f aussagen möchten, sagen Sie besser »f bildet A *nach* B ab«. ⋆

3.3.3 Bijektivität und Invertierbarkeit

Was kann man über die Urbilder eines jeden Elements im Zielbereich einer Funktion sagen, wenn die Funktion surjektiv *und* injektiv, wie im letzten Beispiel, ist? Die Surjektivität verlangt, dass die Menge der Urbilder nicht leer ist, also mindestens ein Element enthält. Zugleich verlangt die Injektivität, dass die Menge der Urbilder höchstens ein Element enthält. Das bedeutet, dass für jedes Element $y \in Y$ *genau ein* $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$ oder äquivalent $f^{-1}(y) = \{x\}$. Solche Funktionen nennt man **bijektiv**.

Genau dann ist eine Funktion bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Bijektive Funktionen spielen eine ganz wichtige Rolle in der Mathematik; das sind genau die Abbildungen, die sich invertieren lassen – das Bild codiert eindeutig das Urbild. So könnte etwa die Polizei die Invertierbarkeit der Abbildung {User} → {IP-Adressen} gut gebrauchen.

Definition 3.12 *Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Dann ist die Zuordnung*

$$Y \to X, \quad y \mapsto f^{-1}(y)$$

eine Abbildung, die man als **Umkehrabbildung** *von f bezeichnet und als f^{-1} notiert.*

Es ist wichtig, dass Sie den Unterschied zwischen der *Abbildung* f^{-1} und der *Menge* $f^{-1}(Y)$ der Urbilder sehen.

Beispiel 3.13 Die Funktion $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N},\ n \mapsto 2n$ ist bijektiv. Ihre Umkehrabbildung ist gegeben durch $f^{-1} : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \frac{1}{2}n$. Auch $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N}),\ A \mapsto \mathbb{N} \setminus A$ ist bijektiv. Was ist ihre Umkehrabbildung? ⋆

[13] Warum sagt man hier nicht »genau ein«?

3.4 Komposition von Abbildungen

Ganz oft möchte man zwei Funktionen nach einander ausführen/anwenden. Man formalisiert es folgendermaßen:

Definition 3.14 *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Unter $g \circ f$ (gelesen: »g nach f«) versteht man die Abbildung*

$$g \circ f : X \to Z, \qquad x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

*Man nennt $g \circ f$ die **Komposition** oder **Verknüpfung** oder **Hintereinanderausführung** von g mit f.*

Bemerkung 3.15 Die Hintereinanderausführung $g \circ f$ zweier Funktionen f und g ist nur definiert, wenn der Zielbereich von f eine Teilmenge des Definitionsbereichs von g ist.

Ist $f : X \to X$ gegeben, so ist $\underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ Mal}}$ sinnvoll und wird als f^n abgekürzt. In diesem Fall schreibt man $f^n(x)$ für $x \in X$. Das ist jedoch *nicht* dasselbe wie $(f(x))^n$; dieser letzte Ausdruck muss nicht einmal definiert sein. ★

Beispiel 3.16 Gegeben seien die Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) := 3n \text{ und } g(n) := n^2.$$

Dann sind sowohl $g \circ f$ als auch $f \circ g$ definiert, und es gelten

$$(g \circ f)(n) = g\big(f(n)\big) = g(3n) = (3n)^2 = 9n^2$$

sowie

$$(f \circ g)(n) = f\big(g(n)\big) = f(n^2) = 3n^2.$$

Dies zeigt, dass »∘« i. A. nicht kommutativ ist.

Sei $f : X \to Y$ bijektiv mit Umkehrfunktion g. Dann gelten für alle $x \in X$ bzw. alle $y \in Y$

$$(g \circ f)(x) = x \text{ bzw. } (f \circ g)(y) = y.$$

★

Eine wichtige Abbildung, die »nichts tut«, ist die identische Abbildung.

Definition 3.17 *Sei X eine Menge. Die Funktion*

$$\mathrm{id}_X : X \to X,\ x \mapsto x$$

*heißt **identische Abbildung** oder **Identität** auf X. Sie ist bijektiv und selbstinvers, d. h. es ist $\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X$.*

Satz 3.18 *Eine Funktion $f : X \to Y$ ist bijektiv genau dann, wenn eine Funktion $g : Y \to X$ existiert mit*

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y .$$

Beweis. Die Funktion g stellt gerade die Umkehrfunktion von f dar. □

Um die gelernten Begriffe noch mehr zu üben, betrachten Sie die folgenden Aussagen.

Satz 3.19 *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.*

- *Sind f und g beide injektiv, so auch $g \circ f$.*
- *Sind f und g beide surjektiv, so auch $g \circ f$.*

- *Sind f und g beide bijektiv, so auch $g \circ f$, und es gilt*
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Beweis. Wir beweisen nur die zweite Aussage.

Es gilt: Für jedes $z \in Z$ gibt es ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$, da g surjektiv ist. Außerdem gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, da f surjektiv ist. Es folgt insgesamt, dass zu jedem $z \in Z$ mindestens ein $x \in X$ mit $g(f(x)) = z$ existiert. □

4 Zu Logik

4.1 Über Aussagen

Das Wort *Aussage* ist uns schon mal begegnet und wir haben es ohne Bedenken verwendet. Doch sollten wir – wie alles in der Mathematik – genau erklären, wovon wir sprechen. Eine Aussage zu definieren, ist leider ohne einige Erfahrungen mit formaler Logik nicht sinnvoll möglich. Daher geben wir eine nicht formale Definition, die für eine Weile ausreichen wird.[14]

Definition 4.1 (nach Aristoteles) *Eine **mathematische Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, bei dem es sinnvoll ist, zu fragen, ob es wahr oder falsch ist.*

Dabei ist nicht erforderlich, sagen zu können, welcher Wahrheitswert dem sprachlichen Gebilde[15] zukommt.

Der Wahrheitsgehalt einer Aussage kann daher per definitionem nur aus zwei Werten, »wahr« und »falsch«, auswählen. Man nennt dies auch das **Prinzip der Zweiwertigkeit** mathematischer Logik. Es gibt durchaus auch andere Logiken, die wir jedoch nicht behandeln werden: Mehrwertige Logiken, Fuzzy-Logiken und mehr.

Beispiel 4.2 Welche der nachfolgenden sprachlichen Gebilde sind im obigen Sinne Aussagen?

(a) Wie ist das Wetter heute?

(b) Das Wetter ist heute schlecht

(c) Jede natürliche Zahl

(d) $2 \nmid 7$

(e) Heute ist Montag

(f) Jede gerade Zahl größer oder gleich 4 lässt sich als Summe aus zwei Primzahlen schreiben

(g) Dieser Satz ist eine falsche Aussage ★

Wir bekommen ein gutes Gefühl dafür, was eine Aussage ist. Fast die ganze Mathematik besteht aus Definitionen (die keine Aussagen sind!) und Aussagen.

Wir werden hier nicht in die Tiefe gehen und über die Definition von »Wahrheit« sprechen. Dies ist ein Faß ohne Boden und verdient eine seriöse Logik-Vorlesung. Es sei nur so viel gesagt: Einen adäquaten und widerspruchsfreien Begriff der Wahrheit zu definieren ist recht diffizil[16]; wir sprechen in der Vorlesung mehr darüber.

Wenn Sie langsam das Gefühl bekommen, dass wir nicht präzise arbeiten und trotzdem höchste Präzision verlangen, haben Sie ganz Recht. Die Grundlagen der Mathematik vernünftig zu formulieren und zu formalisieren, hat vieler Menschen und Jahrzehnte bedurft. Was Sie aus diesem Disput mitnehmen sollten: Selbst banal erscheinende Fragen können zu gravierenden Schwierigkeiten

[14] Definitionen sind nie richtig oder falsch; sie können nur sinnvoll oder nicht sinnvoll sein. Definitionen sind lediglich abkürzende Festlegungen.

[15] Sie merken, warum diese Definition formal nicht genügen kann: Was ist ein »sprachliches Gebilde«? Was soll »sinnvoll« bedeuten? Diese Definitionsprobleme zu beseitigen wird uns hier nicht gelingen; Formulierungen wie »Eine Aussage ist eine Aussagenform ohne freie Variablen« führte uns zu weit.

[16] Vergleichen Sie dazu den Versuch von Aristoteles, »Wahrheit« zu definieren:

> Von dem, was ist, zu sagen, es sei nicht, oder von dem, was nicht ist, es sei, ist falsch, hingegen von dem, was ist, zu sagen, es sei, oder von dem, was nicht ist, es sei nicht, ist wahr.

Das kann sicherlich nicht zufriedenstellen.

führen. Und: Mathematik ist vernünftig formalisierbar; es ist nur nicht ratsam, Anfängerinnen und Anfängern gleich zu Beginn die technischen Tiefen zu offenbaren.

Übrigens, Wörter der Alltagssprache wie »Liebe« oder »Stuhl« sind auch nicht eindeutig definiert. Wenn man so darüber nachdenkt, dann sind kaum Wörter der alltäglichen Sprache hinreichend definiert, so dass man davon ausgehen könnte, von jedem Menschen eindeutig verstanden zu werden. Probieren Sie es aus und fragen Sie einen ihrer Freunde, was er unter »Freundschaft« versteht und vergleichen Sie es mit Ihrer Definition. Eine eindeutige Definition von »Stuhl« ist vermutlich nicht notwendig (was ist mit »Liebe«?!), aber in der Mathematik benötigen wir Transparenz und Klarheit, daher sollen mathematische Definitionen interpretationsunabhängig sein.

4.2 Über Verknüpfungen von Aussagen

Die charakterisierende Eigenschaft des modernen Aufbaus mathematischer Theorien ist Zusammensetzung komplexer Sachverhalte – Aussagen – aus einfachen, bereits studierten Sachverhalten, Atomen oder Axiomen[17], wenn Sie so wollen. So können wir bereits darüber diskutieren, ob »101 ist eine Primzahl« und »101 ist eine 3er-Potenz« jeweils Aussagen sind. Das sind offenbar Aussagen und wir können sogar ihren Wahrheitsgehalt sehr einfach entscheiden (wahr bzw. falsch). Aber was ist mit dem Satz »101 ist eine Primzahl, die eine 3er-Potenz ist«? Oder etwa »Eine der Zahlen 1226 oder 101 ist eine 2er-Potenz« oder »weil 101 eine Primzahl ist, ist $2 = 3$«? Zwar können wir direkt die Definition 4.1 anwenden und sehen, dass diese zusammengesetzten Konstrukte tatsächlich Aussagen sind. Doch wir haben bereits diskutiert, dass die Definition 4.1 formal nicht befriedigen kann. Daher – warum Probleme auf höhere Etagen mitnehmen?! – versuchen wir, diese Definition möglichst zu vermeiden.

4.2.1 $\wedge$ und $\vee$

Betrachten wir nochmal »101 ist eine Primzahl, die eine 3er-Potenz ist«. Eine gleichbedeutende Formulierung ist »101 ist eine Primzahl *und* 101 ist eine 3er-Potenz«. Wir werden daher sagen, dass Sätze, die mittels der »und«-Verknüpfung aus Aussagen gebildet werden, selbst Aussagen sind. Wir werden gleich weitere Verknüpfungen (wie »oder«, »nicht«, »daher« etc.) kennenlernen, denen wir ebenfalls eine aussagenbildende Kraft zusprechen wollen.

Eine Frage entsteht unmittelbar: Was ist mit dem Wahrheitsgehalt? Wir bestimmt man den Wahrheitsgehalt zusammengesetzter Aussagen? Wir modellieren dies zum Teil mittels unserer intuitiver Vorstellung. Wann sagen wir, dass die Aussage »A und B« wahr ist? Wenn A wahr ist und B wahr ist. Sonst nicht. Daher definieren wir

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Dabei bezeichnen »w« bzw. »f« sinngemäß »wahr« oder »falsch«. Damit haben wir die **und**-Verknüpfung, die man durch »$\wedge$« abkürzt, aussagenlogisch definiert.

Analog definieren wir die **oder**-Verknüpfung, die wir durch »$\vee$« abkürzen, über ihre möglichen Wahrheitswerte:

[17] Über Axiome reden wir ein bisschen in der Vorlesung.

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beachten Sie, dass »A oder B« nur falsch ist, falls A und B falsch sind. Das ist kein Exklusiv-Oder, das wir alltäglich verwenden (»Er starb 1981 oder 1980«, »Onkel Horst oder Onkel Eberhard ist mein Vater«). In der Alltagssprache sind wir aber nicht konsistent: »Mein Vorname ist Waltraud oder Irmgard«. Das kann, muss aber kein Exklusiv-Oder sein.

Eine weitere Operation ist fundamental wichtig: Die Möglichkeit Aussagen zu negieren. Ist A eine Aussage, dann sagen wir $\neg A$ sei auch eine Aussage, die **Negation** von A. Verständlicherweise ist $\neg A$ genau dann wahr, wenn A falsch ist und umgekehrt.

Beispiel 4.3 Seien A, B, C Aussagen, dann ist $(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee B)$ auch eine Aussage. Können wir irgendwie algorithmisch bestimmen, wann diese wahr und wann falsch ist? Das macht man üblicherweise mittels der Methode, die wir für die Definitionen der Verknüpfungen verwendet haben. Die Tabellen dort heißen **Wahrheitstafeln**[18]. Da der Wahrheitsgehalt jeder Aussage nur »wahr« oder »falsch« sein kann, brauchen wir bei drei Variablen 8 Zeilen!

A	B	C	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg C$	$\neg C \vee B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee B)$
w	w	w	f	f	f	w	w
w	w	f	f	f	w	w	w
w	f	w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	f	f	f	w	w
f	w	f	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	w	f	w	w	w

★

Bemerkung 4.4 Technisch gesehen haben wir bereits alle grundlegenden Verknüpfungen von Aussagen definiert (wenn man unbedingt will, kann man sich sogar auf eine einzige beschränken). Alle weiteren Verknüpfungen, die wir uns vorstellen können, lassen sich mittels dieser drei modellieren[19]. Trotzdem gibt es noch zwei Verknüpfungen, die man extra definiert. ★

4.2.2 Implikation, Äquivalenz, Tautologie

Aussagen wie

$$\text{weil 101 eine Primzahl ist, ist } 2 = 3$$

oder

$$2 + 3 = 5 \text{ ist wahr genau dann, wenn } (2 + 3) \cdot 4 = 20 \text{ wahr ist}^{20}$$

sind in unserer Sprache offenbar formulierbar und wollen ebenfalls behandelt werden. Wie modellieren wir sie? Was soll »aus A folgt B« bedeuten? Üblicherweise würden wir eine solche Folgerung

[18] Diese können wir bei Bedarf mittels Abbildungen definieren. Etwa die Wahrheitstafel t der Aussage $A \wedge B$ ist die Abbildung

$$t : \{w, f\}^2 \to \{w, f\}, \quad (w, w) \mapsto w, \ (w, f) \mapsto f, \ (f, w) \mapsto f, \ (f, f) \mapsto f.$$

[19] Definieren Sie zur Übung allein mittels »$\vee$«, »$\wedge$« und »$\neg$« das Exklusiv-Oder, aka Entweder-Oder.

[20] Den Satz »$2 + 3 = 5$ ist wahr genau dann, wenn $(2 + 3) \cdot 4 = 20$ wahr ist« kann man verschiedentlich notieren, ohne das Wort »wahr« zu benutzen: »$2 + 3 = 5$ gilt genau dann, wenn $(2 + 3) \cdot 4 = 20$ gültig ist« oder einfacher »$2 + 3 = 5$ genau dann, wenn $(2 + 3) \cdot 4 = 20$«. Das sind allesamt gleichbedeutende Aussagen, das Wort »wahr« steckt implizit drin.

nur dann als wahr betrachten, wenn ein kausaler Zusammenhang zwischen A und B besteht und A in der Tat B »nach sich zieht«: »weil du ihn umgebracht hast, musst du ins Gefängnis«. In der Aussagenlogik hat man sich – das führt zu langen Diskussionen – für einen anderen Zugang entschieden, den wir erstmal einfach so hinnehmen[21]. Die Folgerung oder **Implikation**, in Zeichen $A \implies B$, definieren wir durch

A	B	$A \implies B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Das ist eine gewöhnungsbedürftige Definition, doch sie ist in der Mathematik sinnvoll und etabliert. So werden wir Aussagen wie »$(2+2=5) \implies$ (Ich bin der Papst)« als wahre Aussagen betrachten. Im mathematischen Volksmund heißt es auch lakonisch: »Aus was Falschem folgt alles«. In der Vorlesung diskutieren wir das ein bisschen.

Haben wir nicht vorher gesagt, dass alle aussagenlogischen Verknüpfungen mittels »$\wedge$«, »$\vee$«, »$\neg$« entstehen? Wie sieht es mit »$\implies$« aus? Wir werden den folgenden Satz in den Übungen beweisen.

Satz 4.5 *$A \implies B$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$.*

Wollen wir sagen, dass zwei Aussagen A und B äquivalent sind, also den gleichen Wahrheitsgehalt besitzen, so sagen wir einfach, dass A aus B folgt und umgekehrt, in Zeichen

$$(A \iff B) \text{ ist per definitionem äquivalent mit } (A \implies B \wedge B \implies A).$$

Wie sieht die Wahrheitstafel dazu aus?

Man kann sich fragen, wozu man Äquivalenzen $A \iff B$ überhaupt betrachtet, wenn sie scheinbar keine neue Information liefern. Aussagen, die immer wahr sind – wir nennen sie **Tautologien** – nutzt man dazu, Rechenregeln zu formulieren, und somit ggf. komplizierte Terme zu vereinfachen.

Wir listen folgende wichtige Tautologien ohne Beweis auf. Der Beweis erfolgt problemlos wie in Beispiel 4.3.

Satz 4.6

(a) *Doppelte Negation:* $\neg(\neg A) \iff A$,

(b) *Kommutativität:* $A \wedge B \iff B \wedge A$ *sowie* $A \vee B \iff B \vee A$,

(c) *Assoziativität:* $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$ *sowie* $A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$,

(d) *Distributivität:* $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *sowie* $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

(e) *Kontraposition:* $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$,

(f) *Regeln von de Morgan:* $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$ *sowie* $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$,

(g) *Modus Ponens:* $\big(A \wedge (A \implies B)\big) \implies B$,

(h) *Transitivität:* $\big((A \implies B) \wedge (B \implies C)\big) \implies (A \implies C)$.

[21] Wer es genauer wissen will, muss etwas über Aussagenformen und Prädikate lernen; dort ergibt diese Festlegung Sinn.

Bemerkung 4.7 Für die Aussage »$A \implies B$« pflegt man zu sagen, dass A eine **hinreichende** Bedingung für B ist und B eine **notwendige** Bedingung für A ist. Denken Sie nicht zu tief über die Bedeutung dieser Wörter nach und benutzen Sie diese ggf. mit Vorsicht. Man begegnet diesen Wörtern etwa in Texten, in denen man »$A \implies B$« aus diversen Gründen nicht schreiben will. Dann sagt man statt »aus $2 < n \in \mathbb{P}$ folgt n ungerade« etwa »damit eine natürliche Zahl größer 2 prim ist, muss sie notwendigerweise ungerade sein«. Sie merken vermutlich, dass es sich zwar besser anhört, dafür aber ist der mathematische Inhalt nicht sofort verständlich. ⋆

4.3 Über Quantoren

Die bisher entwickelte Theorie ist nicht reichhaltig genug. Wir können zwar Aussagen über einzelne oder sogar mehrere natürliche Zahlen treffen: »101 ist eine Primzahl und 102 ist keine Primzahl und 103…«, doch wir können bisher keine Aussage über eine unendliche Anzahl von natürlichen Zahlen auf einmal machen: »natürliche Zahlen der Form $n^3 - n$ sind durch 3 teilbar«. Klar, wir haben gerade diese Aussage gemacht, aber wie schreibt man das formal auf? Sicher ist die unendliche Kette »$3 \mid 1^3 - 1 \ \wedge\ 3 \mid 2^3 - 2 \wedge$ etc.« nicht sinnvoll.

Wir wollen Aussagen über ganze Mengen von Elementen machen[22]. Dazu führen wir neue Symbole ein. Betrachten wir nochmal die Aussage

$$\text{natürliche Zahlen der Form } n^3 - n \text{ sind durch 3 teilbar.}$$

Was wir hier eigentlich sagen ist: Für jede natürliche Zahl n ist 3 ein Teiler von $n^3 - n$. Wir haben also eine Eigenschaft $A(n)$, die von n abhängt, nämlich »$A(n) : 3 \mid n^3 - n$«, die wir für alle natürlichen Zahlen überprüfen sollen. Wir machen eine Aussage über eine ganze Menge von Elementen gleichzeitig. Statt »für alle natürlichen Zahlen« schreibt man abkürzend »$\forall n \in \mathbb{N}$«. Das Zeichen $\forall$ spricht man »für alle« aus und nennt es den **All-Quantor**[23]. Damit haben wir nun ein starkes Mittel, viele der wünschenswerten Aussagen formal darzustellen:

Beispiel 4.8 »Jede Primzahl, die größer als 2 ist, ist eine ungerade Zahl« kann man nun kürzer schreiben: »$\forall p \in \mathbb{P}, p > 2 : 2 \nmid p$«.

»Jeder Mensch ist ein Säugetier«, also »für jedes Element der Menge der Menschen gilt die Eigenschaft ein Säugetier zu sein«, könnte man bei Bedarf durch »$\forall m \in M : m \in S$« abkürzen.⋆

Ferner benutzen wir den **Existenz-Quantor**[24] $\exists$, der es uns ermöglicht, Aussagen über die Existenz zu machen: »Es gibt eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist« wird zu »$\exists r \in \mathbb{R} : r \notin \mathbb{Q}$«.

Bemerkung 4.9 Die allgemeine Form für quantisierte Aussagen, die wir benutzen, ist

$$\forall m \in M : A(m) \qquad \text{sowie}$$

$$\exists m \in M : A(m)$$

für irgendeine Menge M und irgendeine Aussage A, die für Elemente m aus M definiert ist. Dabei ist die All-Aussage genau dann wahr, wenn sie für jedes einzelne Element wahr ist und die Existenz-Aussage, falls sie in mindestens einem Fall wahr ist. ⋆

Interessanter und schwieriger wird es, wenn wir beide Quantoren kombinieren. So verbirgt sich hinter »jede natürliche Zahl größer als 1 hat Primteiler« die formalisierte Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > 1\ \exists p \in \mathbb{P} : p \mid n.$$

[22] Technisch gesehen beginnen wir nun mit der Prädikatenlogik. Davor haben wir uns mit der Aussagenlogik beschäftigt.

[23] Der Quantor führt uns durch die ganze Menge, quantisiert sie also, zählt sie durch.

[24] Sie haben vermutlich gemerkt, dass $\forall$ ein umgekehrtes A und $\exists$ ein umgekehrtes E sind.

Aus »jeder Mensch hat eine Mutter« kann man bei Bedarf folgendes machen:

$$\forall x \in \{\text{Menschen}\}\ \exists y \in \{\text{Menschen}\} : y \text{ Mutter von } x.$$

Bemerkung 4.10 Es ist wichtig sich klarzumachen, dass die Reihenfolge der Quantoren essentiell wichtig ist!

Die Aussagen $\forall x \in X\ \exists y \in Y : A(x, y)$ und $\exists y \in Y\ \forall x \in X : A(x, y)$ sind im Allgemeinen völlig verschieden. So ist etwa die Aussage »für jedes Schloss gibt es einen Schlüssel, der das Schloss aufmacht« offenbar nicht dasselbe wie »es gibt einen Schlüssel, der jedes Schloss aufmacht« (schreiben Sie das mittels Quantoren). ⋆

Formalisierte oder quantisierte Aussagen machen mathematische Texte in der Regel wesentlich kürzer, präziser und effektiver. Versuchen Sie die Negation von

> In jeder Stadt gibt es mindestens ein Gymnasium, in dem jedes Jahr irgendein Abiturient im Abi 1,0 bekommt,

zu bilden, ohne die Aussage zu quantisieren! In der quantisierten Form ist die Negation ganz einfach. Sei dazu $A(x)$ eine Eigenschaft, die für jedes Element x einer Menge definiert ist. Dann ist die Negation der Gesamtaussage

$$\forall x \in X : A(x)$$

einfach

$$\neg(\forall x \in X : A(x)) \iff \exists x \in X : \neg A(x).$$

Analog gilt

$$\neg(\exists x \in X : A(x)) \iff \forall x \in X : \neg A(x).$$

In diesem Sinne sind $\forall$ und $\exists$ komplementär.

Bemerkung 4.11 Beachten Sie die Implikationen dieser Regelung: Die Negation der Aussage »Alle Studierenden haben Abitur« ist keineswegs »Keine Studierenden haben Abitur«, sondern »Es gibt Studierende, die kein Abitur haben«. ⋆

Keinesfalls sollen Quantoren im Sinne stenographischer Abkürzungen in einem mathematischen Text verwendet werden. Ein mathematischer Text sollte immer aus vollständigen Sätzen bestehen. So sieht zwar der String

$$\forall (a_n) \subseteq \mathbb{R}\ \exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$$

cool und kompetent aus[25], aber ebensogut kann man sagen »Alle reellen Folgen sind beschränkt«.

Beispiel 4.12 Negieren Sie nun die formalisierte Version des obigen Satzes und übersetzen Sie das Resultat wieder ins Deutsche:

$$\forall s \in S\ \exists g \in G\ \forall j \in J\ \exists a \in A : \text{Abiturnote}(a) = 1{,}0.$$ ⋆

> »Die reine Mathematik ist eine Disziplin, bei der man weder weiß, worüber man spricht, noch ob das, was man sagt, wahr ist.« Bertrand Russell

[25] Hierbei wir »:« als »so dass« ausgesprochen.

5 Zu Beweisverfahren

Wir haben bereits mehrere Beweise geführt, ohne uns mit der Struktur oder gar der Definition eines Beweises zu beschäftigen. Was bedeutet das genau, eine Aussage B aus einer anderen Aussage A herzuleiten?

Seien zwei Aussagen A und B gegeben und angenommen wir wüssten, dass A wahr bzw. bereits bewiesen ist. Wir wollen nun die Implikation $A \implies B$ beweisen. Gelingt das, dann erhalten wir mit dem modus ponens, dass B wahr ist.

Wie beweist man nun $A \implies B$? Es haben sich mehrere Techniken entwickelt, die Sie alle gut beherrschen sollten.

5.1 Direkte Beweise

Wenn wir uns frühere Argumentationen anschauen, dann laufen sie recht analog ab: Man startet mit einer Aussage und versucht, unter Zuhilfenahme weiterer bereits bewiesener Aussagen, die gewünschte Aussage zu begründen. Das fassen wir zu einer Definition zusammen:

Definition 5.1 *Ein Beweis ist eine endliche Folge von Aussagen[26], von denen jede entweder ein Axiom ist oder aus den in der Folge vorhergehenden Aussagen mit Hilfe der Umformungsregeln aus Satz 4.6 abgeleitet werden kann.*

Beispiel 5.2 Angenommen wir wollen zeigen, dass die Aussage A : *q ist gerade und prim* die Aussage $B : q < 5$ nach sich zieht. Dann geht ein direkter Beweis so:

Sei q gerade und prim. Da q gerade ist, existiert eine natürliche Zahl x, so dass $q = 2x$. Daher ist $2 \mid q$. Da q prim ist, folgt $q = 2$. Also ist $q = 2 < 5$.

Mittels einer direkten Argumentation konnten wir so viele Informationen aus A ziehen, dass es gereicht hat, die Aussage B aus diesen Informationen herzuleiten. ⋆

5.2 Indirekte Beweise

Oft klappt ein direkter Beweis nicht. Bei einem direkten Beweis müssen Sie die Aussage A verarbeiten. Doch oft ist sie schwer zugänglich. Was tun? Es gibt zwei typische Möglichkeiten, diese Schwierigkeit zu umgehen.

5.2.1 Kontraposition

Hier profitiert man von der Tautologie $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$ und beweist statt $A \implies B$ die Aussage $\neg B \implies \neg A$. Man kann sich fragen, was das bringen sollte, wenn die beiden Implikationen äquivalent sind. Der wesentliche Vorteil ist, dass die Aussage $\neg B$ unter Umständen leichter zu verarbeiten ist als A.

Zum Beispiel die Aussage: »Ist $2^k - 1$ eine Primzahl, dann ist k eine Primzahl«. Hier wird man nicht gleich sehen können, wie man die Information, $2^k - 1$ sei eine Primzahl verwerten soll. (Probieren Sie es.) Deutlich zugänglicher scheint jedoch die Aussage $\neg B$ zu sein: k sei keine Primzahl. Damit kann man gut arbeiten und aus dieser Annahme eine Zerlegung von $2^k - 1$ in nicht triviale Faktoren herleiten.

Der Algorithmus vom Beweis per Kontraposition läuft daher wie folgt:

(a) Starte mit $\neg B$.

(b) Zeige mit der Technik des direkten Beweises die Aussage $\neg A$.

[26] Auf einem höheren Niveau sollten wir hier lieber über Formeln sprechen.

Beispiel 5.3 Angenommen wir wollen zeigen, dass die Aussage A : *q ist gerade und prim* die Aussage B : $q < 5$ nach sich zieht. Dann geht ein Beweis per Kontraposition so:
Zu zeigen ist

$$q \geq 5 \implies q \text{ ist ungerade oder } q \text{ nicht prim.}$$

Sei $q \geq 5$. Ist q ungerade, so ist $\neg A$ erfüllt. Ist q aber gerade, so ist $2 \mid q$. Da nach Voraussetzung aber $q \neq 2$, folgt, dass q nicht prim ist. Wieder ist $\neg A$ erfüllt. ⋆

5.2.2 Widerspruchsbeweis

Kann man weder A noch $\neg B$ einzeln gut verarbeiten, versucht man vielleicht beide zu kombinieren. Was wäre, wenn wir von $A \wedge \neg B$ ausgehen und zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt? Dann bedeutet es, dass die Aussage $\neg(A \wedge \neg B)$ gilt. Aber mit den bekannten Regeln sehen wir:

$$\neg(A \wedge \neg B) \iff (\neg A \vee \neg\neg B) \iff (\neg A \vee B) \iff (A \implies B).$$

Das ist genau, was wir beweisen wollten! Der Algorithmus ist hier wie folgt:

(a) Starte mit A und $\neg B$.

(b) Führe die Annahme $A \wedge \neg B$ zu einem Widerspruch.

Beispiel 5.4 Angenommen wir wollen zeigen, dass die Aussage A : *q ist gerade und prim* die Aussage B : $q < 5$ nach sich zieht. Dann geht ein Widerspruchsbeweis so:

Wir nehmen an, dass $A \wedge (\neg B)$ gilt: Sei also q gerade, prim und ≥ 5. Dann ist $2 \mid q$, und es gilt $2 \neq q$, da $q \geq 5$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass q prim ist. ⋆

Beide Beweisarten, die Kontraposition sowie ein Beweis per Widerspruch, gehören zu der Klasse der indirekten Beweise.

5.3 Typische Anwendung

Übungsaufgaben lassen sich oft mit einer Kombination der drei folgenden Fragetypen formulieren.

Beweisen Sie, dass aus A folgt B Dies ist die Standardsituation und wird direkt oder indirekt bewiesen, wie oben dargestellt.

Beweisen Sie, dass A und B äquivalent sind Um eine Äquivalenz zu zeigen, muss man beide Implikationen $A \implies B$ und $B \implies A$ zeigen.

Beispiel 5.5 Wir beweisen, dass die Aussagen A: *n ist gerade* und die Aussage B: *n^2 ist gerade* äquivalent sind. Zunächst zeigen wir $A \implies B$ direkt:

Ist n gerade, dann gibt es definitionsgemäß eine natürliche Zahl k, so dass $n = 2k$. Damit ist auch $n^2 = 4 \cdot k^2 = 2 \cdot 2k^2$ gerade.

Nun zeigen wir $B \implies A$. Hier probieren wir einen indirekten Beweis:

Wir nehmen an, n sei nicht gerade, also ungerade. Dann gibt es eine natürliche Zahl k, so dass $n = 2k - 1$. Dann ist $n^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1$ ungerade. Wir haben damit $\neg A \implies \neg B$ gezeigt. Wir wissen aber schon, dass das äquivalent zu $B \implies A$ ist. ⋆

Beweisen oder widerlegen Sie A In Übungsblättern und Klausuren werden Sie häufig mit einer Aussage konfrontiert, von der Sie zunächst nicht wissen, ob sie wahr oder falsch ist.

Falls Sie ein Gegenbeispiel zur Aussage finden, ist die Aufgabe gelöst, denn ein Gegenbeispiel ist ein Beweis und Sie haben mit diesem Gegenbeispiel gezeigt, dass die Gesamtaussage falsch ist.[27] Das besagte Gegenbeispiel müssen sie aber genau ausführen, das heißt begründen, warum dieses Beispiel die zu untersuchende Aussage widerlegt.

Falls die Aussage wahr ist, müssen sie einen Beweis finden. In der Regel sind solche Aufgaben so konzipiert, dass Studierende mit etwas Überblick schnell erkennen, ob die Aussage zu beweisen oder zu widerlegen ist. Etwa

> Beweisen oder widerlegen Sie:
> »Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl n mit $n + m = nm$.«

Wer es probiert, wird schnell ein Gegenbeispiel finden. Zum Beispiel für $m = 1$ gibt es kein solches n, denn für jede natürliche Zahl n gilt $n+1 > n \cdot 1$. Damit ist die ganze Aussage bereits falsch! Auch wenn für gewisse natürliche Zahlen m doch ein passendes n mit $n + m = nm$ existiert. So könnte man etwa für $m = 2$ die Zahl $n = 2$ wählen. Dieses Beispiel liefert aber keinerlei Erkenntnis darüber, ob obige Aussage insgesamt wahr oder falsch ist.

Daraus gewinnen wir die (fundamental wichtige) Erkenntnis: Beispiele sind keine Beweise!

Witz Schauen Sie den Film »Life of Brian« bis zur Stelle

> Brian: “You’re all individuals!”
> Crowd: “Yes, we’re all individuals!”
> Brian: “You’re all different!”
> Crowd: “Yes, we’re all different!”
> Man in crowd: “I’m not.”

Denken Sie darüber nach, was dies mit obigen Ausführungen zu tun hat, und schauen Sie den Film bis zum Ende! ⋆

5.4 Vollständige Induktion

Es gibt einen Typ von Aufgaben, der eine besondere Technik erfordert, und sehr häufig vorkommt. Das sind Aufgaben vom Typ

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n),$$

für eine Aussage $A(n)$, die für jede natürliche Zahl definiert ist. Natürlich kann man versuchen, $A(n)$ direkt zu beweisen (dabei lässt man n unbestimmt). Das wird aber nicht immer gelingen. Für jedes konkrete n die Aussage $A(n)$ zu beweisen, wird uns leider nicht gelingen – dafür müssten wir im Allgemeinen unendlich viele einzelne, verschiedene Beweise führen. Abhilfe schafft das sog. »Prinzip der vollständigen Induktion«.

Die Argumentation läuft wie folgt ab:

(a) Man zeigt, dass die Aussage $A(1)$ wahr ist. Dies nennt man den **Induktionsanfang**.

(b) Man zeigt dann die Implikation
$$A(n) \Longrightarrow A(n+1)$$
für jede natürlichen Zahl n. Hierzu kann jede der Techniken aus dem vorherigen Abschnitt benutzt werden.

[27] Das ist zwar die häufigste Situation, aber gelegentlich finden Sie folgende Aufgaben: »Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt ein Objekt, das die und die Eigenschaft hat.« Hier genügt es zur Widerlegung nicht, ein Beispiel anzugeben, sondern hier muss ein Beweis geführt werden, der zeigt, dass solche Objekte grundsätzlich nicht existieren. Zusammengefasst: All-Aussagen widerlegt man mit einem Gegenbeispiel; Existenz-Aussagen widerlegt man mit einem Beweis.

Wie zeigt man (b) konkret? Man nimmt an, dass die Aussage $A(n)$ bereits bewiesen wäre (das nennt man **Induktionsannahme** oder **Induktionsvoraussetzung**), für irgendein abstraktes n. Dann folgert man aus ihr formal, ohne für n irgendwelche konkrete Werte einzusetzen, die Aussage $A(n+1)$. Dabei müssen wir lediglich zwei Beweise führen: $A(1)$ (das ist meistens geschenkt) und die Implikation $A(n) \implies A(n+1)$ (dies nennt man **Induktionsschluss**). Im Induktionsschluss steckt die meiste Arbeit.

Sind jedoch der Induktionsanfang und der Induktionsschluss gezeigt, dann gilt nach diesem Prinzip die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wichtig ist: Das Prinzip der vollständigen Induktion muss man nicht einfach so glauben. Dieses kann man formal beweisen. Dazu braucht man allerdings eine formale Beschreibung der natürlichen Zahlen (und nicht $\{1, 2, 3, \dots\}$). Das machen Sie in der Analysis-Vorlesung genauer.

Intuitiv ist das Prinzip jedoch leicht zu glauben: Haben wir $A(1)$ und $A(n) \implies A(n+1)$ für *jedes beliebige n* bewiesen[28], dann können wir mittels des modus ponens folgern:

$$A(1) \wedge \big(A(1) \implies A(2)\big) \implies A(2),$$

das heißt jetzt wissen wir, dass $A(2)$ bewiesen ist. Dann analog

$$A(2) \wedge \big(A(2) \implies A(3)\big) \implies A(3)$$

und so weiter! Das Prinzip der vollständigen Induktion garantiert uns, dass »und so weiter« im mathematischen Sinne für alle natürlichen Zahlen tatsächlich richtig ist.

Bemerkung 5.6 Gewöhnen Sie es sich gleich an, die drei Schritte: Induktionsanfang, -annahme, -schluss, kenntlich zu machen. ⋆

Beispiel 5.7 Wir beweisen die Aussage

$$A(n) \,:\, 3 \mid n^3 - n$$

für alle natürlichen Zahlen.

Induktionsanfang Die Aussage $A(1)$ ist »3 teilt die Zahl $1^3 - 1 = 0$«. Sie ist natürlich wahr.

Induktionsannahme Sei 3 ein Teiler von $n^3 - n$ für eine natürliche Zahl n (wir nehmen also die Gültigkeit von $A(n)$ an).

Induktionsschluss Wir zeigen nun, dass $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgt: $A(n+1)$ ist die Aussage: »3 teilt $(n+1)^3 - (n+1)$«. Wir sehen

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3(n^2 + n)$$

und nach der Induktionsannahme ist $n^3 - n$ bereits durch 3 teilbar. Außerdem ist natürlich $3(n^2+n)$ durch 3 teilbar. Wie gewünscht schließen wir daraus, dass $(n+1)^3 - (n+1)$ durch 3 teilbar ist. Damit ist $A(n) \implies A(n+1)$ für jedes n gezeigt und wir schließen mit dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahl gilt. ⋆

Möglicherweise erscheint Ihnen der Beweis unnötig viel »Gelaber« zu beinhalten. Das kann schon sein. Aber besser Sie schreiben mehr als zu wenig. Vor allem am Anfang des Studiums sollten Sie die genannten drei Schritte sorgfältig aufschreiben.

Bevor wir weiter gehen, brauchen wir zwei Bezeichnungen, die wir häufig brauchen werden.

[28] Das heißt alle Implikationen $A(1) \implies A(2)$, $A(2) \implies A(3)$ etc. sind wahr!

Definition 5.8 *Für ganze Zahlen i und j verstehen wir unter $\sum_{k=i}^{j} a_k$ die Summe $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{j-1} + a_j$. Dabei ist der Wert der (leeren) Summe gleich 0, falls $j < i$ ist. Das Zeichen »k« nennt man auch* Index *oder* Laufvariable *der Summe. Ferner steht a_k für irgendeine Zahl. Im Wesentlichen summieren wir über Komponenten des $(j - i)$-Tupels $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_l)$.*

Analog definiert man das Produkt der Elemente a_k. Wir setzen $\prod_{k=i}^{j} a_k := a_i \cdot a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_{j-1} \cdot a_j$. Das leere Produkt (falls $j < i$) hat den Wert 1.

Beispiel 5.9 Es ist $\sum\limits_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ und $\sum\limits_{k=-2}^{3} x^k = x^{-2} + x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2 + x^3$ und $\prod\limits_{k=17}^{18} (2k - 30) = (2 \cdot 17 - 30) \cdot (2 \cdot 18 - 30) = 4 \cdot 6 = 24$. ⋆

Satz 5.10 (Gaußsche Summenformel) *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. In der Vorlesung mittels Induktion. Können Sie den Satz ohne Induktion beweisen? □

Mit der vollständigen Induktion lassen sich auch Aussagen vom Typ »$\forall z \in \mathbb{Z}, z \geq z_0 : A(z)$« für ein festes $z_0 \in \mathbb{Z}$ beweisen. Um uns von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen, müssen wir lediglich die Aussage $B(z) := A(z_0 - z + 1)$ betrachten und auf sie die Induktion anwenden. Die Aussage $A(z)$ beweisen wir nun, indem wir $A(z_0)$ und $A(z) \implies A(z+1)$ für alle $z \geq z_0$ nachweisen. Insbesondere können wir damit Aussagen beweisen, die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten. Diese Überlegung ist sinnvoll, weil nicht alle interessanten Aussagen gültig ab $n = 1$ sind, so etwa $2^n < n!$.

Beispiel 5.11 Für alle $n \geq 4$ gilt die Aussage $2^n < n!$. ⋆

Es gibt noch weitere wichtige Varianten der Induktion: So braucht man oft die Induktionsannahme nicht für ein n, sondern für alle kleineren natürlichen Zahlen, um daraus $A(n + 1)$ zu folgern. Das ist nur scheinbar eine stärkere Voraussetzung (wenngleich oft bequemere): Man kann zeigen, dass beide Varianten äquivalent sind.

Auch interessant: Sie schließen auf $A(n + 1)$ von $A(n - 1)$ und $A(n)$. Alle möglichen Varianten werden sie noch öfter in Ihrem Studium sehen.

6 Ausblick

6.1 Einige »wichtige« mathematische Wörter

6.1.1 Trivial!

In der Vorlesung: »Herr Professor, warum genau ist der Satz 1.12 trivial?«. Professor nach zwei Minuten Nachdenken: »Ja, klar, das ist trivial!«

Die Wörter »trivial« wie auch »offenbar«, »offensichtlich«, »klar« gehören nicht zur Mathematik. Das sind allesamt keine mathematischen Begriffe. Sie besitzen keine eindeutige Bedeutung. Denn was für mich oder meinen Chef trivial erscheint, muss mitnichten allen trivial erscheinen. Das sind Wörter, die keinen mathematischen Inhalt tragen und somit keinen Beweis oder keine Begründung ersetzen. Sie suggerieren höchstens den Grad der Überzeugung des Autors, dass er diese Aussage schnell wieder nachvollziehen könnte. Vor allem für Anfängerinnen und Anfänger sollten diese Wörter keine Bedeutung in ihren Beweisen haben. Erst recht sollten diese Wörter keine Platzhalter sein für fehlende Lust, etwas genauer über gemachte Aussagen nachzudenken.

6.1.2 o.B.d.A., o.E., wlog

Ab und zu möchten Sie in Ihrer Argumentation einen trivialen Fall ausschließen, wie etwa in

> Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt einen Primteiler. Sei dazu n keine Primzahl,

weil es Ihnen klar erscheint, dass die Behauptung für eine Primzahl gültig ist und keine zusätzliche Begründung braucht. Um anzudeuten, dass Sie sich dieser Tatsache bewusst sind, und um dem eventuellen Verdacht, Sie haben einen Spezialfall vergessen, vorzubeugen, können Sie schreiben

> Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt einen Primteiler. Sei dazu ohne Beschränkung der Allgemeinheit n keine Primzahl.

Das heißt: Betrachten wir diesen Fall nicht, so suggerieren wir den Lesenden, dass es trivialerweise die Allgemgültigkeit der Aussage nicht verletzt. Abkürzend schreibt man dann »o.B.d.A.« oder »o.E.« – »ohne Einschränkung«. Im Englischen liest man dann »wlog« – »without loss of generality«. Doch Vorsicht! Benutzen Sie solche Kürzel nur dann, wenn Sie sich sehr sicher sind, dass jeder Leser und jede Leserin diesen Fall sofort als trivial ansehen wird, und beachten Sie den vorigen Abschnitt. Übertreiben Sie mit dieser Verwendung auf keinen Fall, vor allem zu Beginn des Studiums.

Ferner nutzt man »o.E.« sinnvollerweise dann, wenn man eine Bezeichnung wählen möchte und die Bezeichnung selbst keine Rolle spielt. Etwa so:

> … wir färben die Ecken des Würfels in zwei Farben; seien diese Farben ohne Einschränkung »blau« und »rot«.

6.2 Wie löst man eine Aufgabe?

Nach Richard Feynman (Physiknobelpreisträger und ein sehr interessanter Mensch) löst man eine Aufgabe so:

(a) Man nimmt ein weißes Blatt Papier und schreibt darauf die Aufgabe.

(b) Man denkt gründlich über das Problem nach.

(c) Man schreibt die Lösung des Problems auf.

Obwohl sehr amüsant, ist das natürlich keine hilfreiche Anweisung für Menschen, die noch keine ausreichende Erfahrung[29] mit Problemlösen haben.[30] Eine sehr gute Lektüre in diesem Fall ist das Buch von George Pólya mit dem programmatischen Titel »How To Solve It«.

Das Lösen von Aufgaben ist i. A. sicherlich eher Kunst denn Handwerk. In typischen Situationen in der Schule oder im Studium benötigt man zum Lösen von Aufgaben jedoch außer Kreativität eine gewisse Routine und Erfahrung, die kumulativ aufgebaut wird: Um Aufgaben lösen zu lernen, muss man Aufgaben lösen. Wenn das noch nicht hilfreich klingt, hier noch einige gezielte Tipps:

(a) Schreiben Sie Ihr Problem genau auf. Studieren Sie alle in der Aufgabe vorkommenden Begriffe und machen Sie sie sich klar. *Man kann keine Aufgabe lösen, die man nicht versteht!* Denken Sie mal darüber nach.

(b) Überlegen Sie welche Techniken und Verfahren zum Lösen der Aufgabe angebracht wären. Ist das eine Aussage über natürliche Zahlen? Vielleicht Induktion dann?

(c) Studieren Sie alle Voraussetzungen, die in der Aufgabe vorkommen. »Sei eine monoton fallende Nullfolge gegeben.« Was ist eine Nullfolge? Wann kann man sagen, dass eine solche monoton fällt? Kommt diese Voraussetzung in Ihnen bekannten Verfahren und vergleichbaren Aufgaben vor?

    Eine nicht ganz ernst zu nehmende Lösungsstrategie aus meinem Studium besagte: Schreib alle Voraussetzungen oben aufs Blatt genau auf und schreibe drunter, was das bedeutet. Schreibe unten aufs Blatt, was zu zeigen ist. Oft muss man das Wort »daher« in die Mitte des Blattes schreiben und die Lösung steht da.

(d) Erklären Sie Ihr Problem jemand anderem. Beim Formulieren und Aussprechen des Problems fällt Ihnen möglicherweise bereits eine Lösung ein.

(e) Bleiben Sie dran. Spielen Sie mit dem Problem. Betrachten Sie es von allen Seiten und lassen Sie sich dann Zeit. Am nächsten morgen haben Sie möglicherweise eine Idee!

(f) Lassen Sie sich mehr Zeit. Einige Probleme wandern oft durch den Kopf und suchen nach einem geeigneten Platz. Sobald sie angekommen sind, erscheint Ihnen das Problem völlig trivial und Sie wundern sich, warum Andere das Problem nicht genauso trivial finden.

6.3 Wie schreibt man die Lösung auf?

Lesbar. Schreiben Sie Ihre Lösungen so auf, dass das Zielpublikum sie mit vertretbarem Aufwand nachvollziehen kann.

Sie sind in der Bringschuld, Beweispflicht, Erklärungsnot. Machen Sie Ihre Gedanken verständlich. Es ist nicht die Aufgabe der Lesenden zu erraten, was Sie wohl meinen könnten.

Versuchen Sie auf keinen Fall Ihre Leserinnen und Leser dadurch einzuschüchtern und Ihre Überlegenheit zu demonstrieren, dass sie statt komplizierten Begründungen »trivial« hinschreiben.

> »Es ist das Schicksal des Genies, unverstanden zu bleiben.
> Aber nicht jeder Unverstandene ist ein Genie.« Ralph Waldo Emerson

[29] Natürlich haben Sie viele Aufgaben in der Schule gelöst und Erfahrungen gesammelt; doch unterscheidet sich die Art und das Niveau der universitären Mathematik von der schulischen zum Teil erheblich.

[30] Es wäre nicht richtig zu schreiben: »… für Menschen, die Schwierigkeiten mit Problemlösen haben.« Alle haben Probleme mit dem Lösen von Problemen; die Probleme unterscheiden sich lediglich in ihrer Schwierigkeit von Mensch zu Mensch.