Übungen zur Einführung in die Algebra

Wintersemester 2014/15, Prof. Grundhöfer

Blatt 11

31. (a) Sei K ein Körper, der nicht die Charakteristik 2 hat, und $L|K$ eine quadratische Körpererweiterung. Man zeige, dass ein Element $a \in L$ existiert mit $L = K(a)$ und $b := a^2 \in K$. (Man schreibt dann $L = K(\sqrt{b})$.)

    (b) Für welche Zahlenpaare $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ sind die zwei Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ isomorph?

32. Eine Körpererweiterung $L|K$ heißt *algebraisch*, wenn jedes Element von L algebraisch über K ist. Man zeige:

    (a) Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.

    (b) Für jede Körpererweiterung $L|K$ ist $\{a \in L \mid a \text{ ist algebraisch über } K\}$ ein Zwischenkörper von $L|K$.

    (c) Es gibt algebraische Körpererweiterungen, die nicht endlich sind.

33. (Aus dem Staatsexamen 2001) Sei $a = \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}} \in \mathbb{R}$.

    (a) Man bestimme das Minimalpolynom f von a über $\mathbb{Q}$ und den Grad $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$.

    (b) Man gebe alle Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ an. Liegen diese alle im Körper $\mathbb{Q}(a)$?

34. (a) Man finde drei verschiedene Nullstellen a_1, a_2, a_3 von $x^4 - 2$ in $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass die beiden Körper $\mathbb{Q}(a_1, a_2)$ und $\mathbb{Q}(a_1, a_3)$ nicht isomorph sind.

    (b) Man zeige, dass $L = \mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3)$ ein Zerfällungskörper von $x^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$ ist.

    (c) Man gebe drei Teilkörper von L an, welche quadratisch über $\mathbb{Q}$ sind.

    (d) Man finde ein Element $a \in L$ mit $L = \mathbb{Q}(a)$.

Die Übungsgruppen werden geleitet von Dr. Matthias Grüninger und Dmitri Nedrenco (Mathematik West, Raum 03.013, E-Mail: dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de).

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen zu diesem Blatt bis **Montag, den 12. Januar 2015, 13.30 Uhr** *(im richtigen Briefkasten im Fachschaftsraum S0.105 im Bibliotheks- und Seminarzentrum BSZ). Es dürfen maximal zwei Übungsteilnehmer zusammen abgeben. Bitte schreiben Sie Ihren Namen (bzw. die beiden Namen Ihrer Zweier-Gruppe)* **und die Nummer Ihrer Übungsgruppe** *auf Ihr Lösungsblatt. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.*

Die Klausur wird am Montag, dem 2. Februar 2015 von 10-12 Uhr stattfinden (im Turing- und Zuse-Hörsaal im Informatikgebäude).

Dieses Übungsblatt, sowie weitere Informationen zur Veranstaltung, finden Sie auch unter
`http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`

Richtig oder falsch? 33 dreist vermischte Einzeiler

1. Jede unendliche Gruppe hat unendlich viele Untergruppen.
2. Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ hat keine maximale Untergruppe.
3. Die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ hat keine maximale Untergruppe.
4. Die alternierende Gruppe A_5 enthält eine zu S_3 isomorphe Untergruppe.
5. Die symmetrische Gruppe S_n ist isomorph zum direkten Produkt $A_n \times C_2$.
6. Jedes Element von S_n ist das Produkt von zwei Involutionen aus S_n.
7. Die Diedergruppe D_{12} ist isomorph zum direkten Produkt $D_6 \times C_2$.
8. Es gibt einen Gruppen-Epimorphismus $C_2 \times C_2 \times C_2 \to C_4$.
9. Es gibt eine Gruppe der Ordnung 100, deren Zentrum die Ordnung 10 hat.
10. Jede Gruppe der Ordnung 16 wird von 3 Elementen erzeugt.
11. Wenn eine endliche Gruppe nicht abelsch ist, so enthält sie ein Element der Ordnung 2.
12. Es gibt bis auf Isomorphie genau 5 Gruppen der Ordnung 12.
13. Es gibt bis auf Isomorphie genau 4 Gruppen der Ordnung 28.
14. Jede Gruppe der Ordnung 2015 ist abelsch.
15. Die Automorphismengruppe jeder endlichen abelschen Gruppe ist abelsch.
16. Die Automorphismengruppe jeder zyklischen Gruppe ist zyklisch.
17. Jede endliche Gruppe G mit $|G| > 2$ hat einen nicht-trivialen Automorphismus.
18. Jede unendliche Gruppe hat einen nicht-trivialen Automorphismus.
19. Es gibt unendliche Gruppen G mit $G \cong G \times G$.
20. Alle Elemente der Einheitengruppe $E(\mathbb{Z}_{24})$ haben die Ordnung 1 oder 2.
21. Jeder unendliche Ring hat mindestens zwei Einheiten.
22. Es gibt einen Ring mit genau 5 Einheiten.
23. Sind R und S isomorphe Ringe, so ist jeder Ring-Homomorphismus $f : R \to S$ bijektiv.
24. Jeder endliche Ring R mit $|R| = 9$ ist kommutativ.
25. Jeder endliche Ring R mit $|R| = 2015$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_{2015}$.
26. Das Polynom $x^{10} + x^4 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}_2[x]$.
27. Das Polynom $\Phi_5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ist reduzibel in $\mathbb{Z}_{19}[x]$.
28. Das Polynom $x^5 + 16$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.
29. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist das Kreisteilungspolynom Φ_{mn} ein Teiler von $\Phi_n(x^m)$ in $\mathbb{Z}[x]$.
30. Sind $m, n \in \mathbb{N}$ und ist $x^{mn} - a$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$, so ist auch $x^n - a$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.
31. Ist $z \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, so ist auch der Realteil von z algebraisch über $\mathbb{Q}$.
32. Jeder algebraische Erweiterungskörper eines endlichen Körpers ist endlich.
33. Die Automorphismengruppe des Körpers $\mathbb{R}$ ist trivial.

*****

Schöne Feiertage und ein Gutes Neues Jahr!