

# Übungen zur Einführung in die Algebra

Wintersemester 2014/15, Prof. Grundhöfer

## Blatt 10

28. (a) Sei  $K$  ein Körper und  $f \in K[x]$  sei ein Polynom mit Grad 2 oder 3. Man zeige, dass  $f$  genau dann irreduzibel in  $K[x]$  ist, wenn  $f$  keine Nullstelle in  $K$  hat. Gilt diese Aussage auch für Polynome vom Grad 4 ?
- (b) Sei  $f \in \mathbb{Z}[x]$  ein normiertes Polynom und  $r \in \mathbb{Q}$  eine Nullstelle von  $f$ . Man zeige, dass  $r$  eine ganze Zahl ist, welche den Koeffizienten  $a_0 = f(0)$  von  $f$  teilt.
- (c) Man zeige, dass die drei Polynome  $2x^4 + 5x^3 - 4x + 2$ ,  $x^4 + x + 1$  und  $x^4 + x^3 + x^2 + 1$  in  $\mathbb{Q}[x]$  irreduzibel sind.
29. Man schreibe das Polynom  $x^{10} - 1$  als Produkt von normierten irreduziblen Polynomen in den drei Polynomringen  $\mathbb{Q}[x]$ ,  $\mathbb{Z}_2[x]$  und  $\mathbb{Z}_5[x]$ .
30. Man zeige: das Polynom  $x^4 + 1$  ist irreduzibel in  $\mathbb{Z}[x]$ , aber reduzibel in  $\mathbb{Z}_p[x]$  für jede Primzahl  $p$ .  
Hinweis für den Fall endlicher Körper:  $x^4 + 1 = (x^2)^2 - (-1) = (x^2 \pm 1)^2 - (\pm 2x^2)$ .

*Die Übungsgruppen werden geleitet von Dr. Matthias Grüninger und Dmitri Nedrenco (Mathematik West, Raum 03.013, E-Mail: [dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de](mailto:dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de)).*

*Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 15. Dezember 2014, 13.30 Uhr (im richtigen Briefkasten im Fachschaftsraum S0.105 im Bibliotheks- und Seminarzentrum BSZ). Es dürfen maximal zwei Übungsteilnehmer zusammen abgeben. Bitte schreiben Sie Ihren Namen (bzw. die beiden Namen Ihrer Zweier-Gruppe) und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Lösungsblatt. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.*

*Die Klausur wird am Montag, dem 2. Februar 2015 von 10-12 Uhr stattfinden (im Turing- und Zuse-Hörsaal im Informatikgebäude).*

*Dieses Übungsblatt, sowie weitere Informationen zur Veranstaltung, finden Sie auch unter <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco>*

\* \* \*

Die Fachschaft lädt herzlich ein zur Weihnachtsfeier unserer Fakultät am Mittwoch, dem 17. 12. 2014. Ab 17 Uhr findet im Zuse-Hörsaal im Informatikgebäude das Weihnachtskolloquium statt: Prof. Klaus Schilling hält einen Vortrag mit dem Titel "Die Raumsonde ROSETTA: Über einen Kometen zum Ursprung unseres Sonnensystems". Anschließend gibt es Glühwein und Plätzchen im Foyer des Informatikgebäudes.