Übungen zur Einführung in die Algebra

Wintersemester 2014/15, Prof. Grundhöfer

Blatt 9

25. Sei R ein Ring. Man zeige:
    (a) Es existiert genau ein Ringhomomorphismus $f : \mathbb{Z} \to R$.
    (b) Es existiert genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{-1}(0) = n\mathbb{Z}$.
    (Man nennt n die *Charakteristik* von R und schreibt $n = \operatorname{char} R$.)
    (c) Ist R nullteilerfrei, so ist $\operatorname{char} R$ eine Primzahl oder $\operatorname{char} R = 0$.
    (d) Es gilt $\operatorname{char} \mathbb{Z}_n = n$ und $\operatorname{char} \mathbb{Z} = 0 = \operatorname{char} \mathbb{Q}$.

26. Betrachte $f = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 8x + 8$ und $g = x^2 - x + 1$ als Polynome über dem endlichen Ring $\mathbb{Z}_n$, wobei $n \geq 2$. Für welche n ist g ein Teiler von f ?

27. Sei $R = \mathbb{Z}[[x]]$ der Ring der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$. Man zeige:
    (a) R hat die Einheitengruppe $E(R) = \{\pm(1 + xf) \mid f \in R\} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \mid a_0 \in \{1, -1\}$ und $a_j \in \mathbb{Z}$ für alle $j\}$.
    (b) Für jedes echte Ideal I von R ist auch $I + xR$ ein echtes Ideal von R.
    (c) Die maximalen Ideale von R sind genau die Ideale $pR + xR = p\mathbb{Z} + xR$, wobei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist, und es gilt $R/(pR + xR) \cong \mathbb{Z}_p$.
    (d) R ist kein Hauptidealring.

Die Übungsgruppen werden geleitet von Dr. Matthias Grüninger und Dmitri Nedrenco (Mathematik West, Raum 03.013, E-Mail: dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de).

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen zu diesem Blatt bis **Montag, den 8. Dezember 2014, 13.30 Uhr** *(im richtigen Briefkasten im Fachschaftsraum S0.105 im Bibliotheks- und Seminarzentrum BSZ). Es dürfen maximal zwei Übungsteilnehmer zusammen abgeben. Bitte schreiben Sie Ihren Namen (bzw. die beiden Namen Ihrer Zweier-Gruppe)* **und die Nummer Ihrer Übungsgruppe** *auf Ihr Lösungsblatt. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.*

Die Klausur wird am Montag, dem 2. Februar 2015 von 10-12 Uhr stattfinden (im Turing- und Zuse-Hörsaal im Informatikgebäude).

Dieses Übungsblatt, sowie weitere Informationen zur Veranstaltung, finden Sie auch unter
`http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`