Übungen zur Einführung in die Algebra

Wintersemester 2014/15, Prof. Grundhöfer

Blatt 8

22. Sei $(A,+)$ eine abelsche Gruppe und $\mathrm{End}(A,+)$ die Menge aller Endomorphismen von $(A,+)$. Man zeige:

    (a) $\mathrm{End}(A,+)$ ist mit der punktweisen Addition und der Komposition $\circ$ von Abbildungen ein Ring.

    (b) $\mathrm{End}(\mathbb{Z},+) \cong (\mathbb{Z},+,\cdot)$ und $\mathrm{End}(\mathbb{Z}^2,+) \cong \mathbb{Z}^{2\times 2}$.

    (c) $(A,+)$ ist genau dann die additive Gruppe eines Vektorraums (über dem Körper K), wenn der Ring $\mathrm{End}(A,+)$ einen (zu K isomorphen) Teilkörper enthält.

23. Sei $\mathbb{H}$ die Menge aller Matrizen $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ mit $a,b \in \mathbb{C}$; dabei ist $\bar{a}$ komplex konjugiert zu $a \in \mathbb{C}$, d.h. $\overline{r+si} = r - si$ für $r,s \in \mathbb{R}$. Man zeige:

    (a) $\mathbb{H}$ ist ein Teilring des Matrizenrings $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

    (b) $\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper (der Schiefkörper der *Hamiltonschen Quaternionen*).

    (c) Das Zentrum $Z := \{z \in \mathbb{H} \mid zy = yz \text{ für alle } y \in \mathbb{H}\}$ ist ein zu $\mathbb{R}$ isomorpher Teilkörper von $\mathbb{H}$, und $\mathbb{H}$ ist ein Z-Vektorraum der Dimension 4.

    (d) Das Polynom x^2+1 hat unendlich viele Nullstellen in $\mathbb{H}$.

24. Man betrachte den Teilring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$ des Körpers der reellen Zahlen und zeige:

    (a) Für $x,y \in \mathbb{Z}$ ist $x + y\sqrt{2}$ genau dann eine Einheit von R, wenn $x^2 - 2y^2 = \pm 1$.

    (b) Die Elemente $r \in R$ mit $1 < r < 1+\sqrt{2}$ sind keine Einheiten von R.

    (c) Die Einheitengruppe von R ist gegeben durch $E(R) = \{\pm(1+\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Die Übungsgruppen werden geleitet von Dr. Matthias Grüninger und Dmitri Nedrenco (Mathematik West, Raum 03.013, E-Mail: dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de).

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen zu diesem Blatt bis **Montag, den 1. Dezember 2014, 13.30 Uhr** *(im richtigen Briefkasten im Fachschaftsraum S0.105 im Bibliotheks- und Seminarzentrum BSZ). Es dürfen maximal zwei Übungsteilnehmer zusammen abgeben. Bitte schreiben Sie Ihren Namen (bzw. die beiden Namen Ihrer Zweier-Gruppe)* **und die Nummer Ihrer Übungsgruppe** *auf Ihr Lösungsblatt. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.*

Die Klausur wird am Montag, dem 2. Februar 2015 von 10-12 Uhr stattfinden (im Turing- und Zuse-Hörsaal im Informatikgebäude).

Dieses Übungsblatt, sowie weitere Informationen zur Veranstaltung, finden Sie auch unter
`http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`