Übungen zur Einführung in die Algebra

Wintersemester 2014/15, Prof. Grundhöfer

Blatt 5

13. Seien A und B Normalteiler einer Gruppe G. Man zeige:

    (a) Für $a \in A$ und $b \in B$ gilt $aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B$.

    (b) Gilt $A \cap B = \{1\}$, so ist $\langle A \cup B \rangle$ isomorph zum direkten Produkt $A \times B$.

14. Seien $(A, \cdot)$ und $(B, \cdot)$ Gruppen und sei $\varphi : B \to \operatorname{Aut} A$ ein Homomorphismus. Wir definieren eine Verknüpfung auf der Menge $A \times B$ durch

    $$(a, b)(a', b') := (a \cdot \varphi(b)(a'), b \cdot b')$$

    für $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$. Man zeige:

    (a) Mit dieser Verknüpfung ist die Menge $A \times B$ eine Gruppe. (Die Rechnungen werden übersichtlicher, wenn man $\bar{b}$ statt $\varphi(b)$ schreibt.)
    Man nennt diese Gruppe das *semidirekte Produkt* von A mit B bezüglich φ und schreibt dafür $A \rtimes_\varphi B$ oder $A \rtimes B$.

    (b) $A \times \{1\}$ ist ein Normalteiler von $A \rtimes_\varphi B$ und $\{1\} \times B$ ist eine Untergruppe von $A \rtimes_\varphi B$.

    (c) $A \rtimes_\varphi B$ ist genau dann abelsch, wenn A und B beide abelsch sind und φ der triviale Homomorphismus ist.

15. (a) Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler und U eine Untergruppe von G mit $N \cap U = \{1\}$. Man zeige, dass $\langle N \cup U \rangle = NU$ isomorph ist zu einem semidirekten Produkt $N \rtimes_\varphi U$ für einen geeigneten Homomorphismus $\varphi : U \to \operatorname{Aut} N$.

    (b) Sei $1 < n \in \mathbb{N}$. Wir definieren wir $\varphi : C_2 \to \operatorname{Aut} C_n$ durch $\varphi(0) = \mathrm{id}_{C_n}$ und $\varphi(1)(a) = -a$ für $a \in C_n$. Man zeige, dass das semidirekte Produkt $C_n \rtimes_\varphi C_2$ zur Diedergruppe D_{2n} isomorph ist.

    (c) Sei V ein Vektorraum. Die zugehörige affine Gruppe $\mathrm{AGL}(V) \leq \mathrm{Sym}V$ besteht aus allen Bijektionen $V \to V : x \mapsto Ax + b$ mit $A \in \mathrm{GL}(V)$ und $b \in V$. Man zeige, dass $\mathrm{AGL}(V)$ zu einem semidirekten Produkt $(V, +) \rtimes \mathrm{GL}(V)$ isomorph ist.

Die Übungsgruppen werden geleitet von Dr. Matthias Grüninger und Dmitri Nedrenco (Mathematik West, Raum 03.013, E-Mail: dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de).

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen zu diesem Blatt bis **Montag, den 10. November 2014, 13.30 Uhr** (*im richtigen Briefkasten im Fachschaftsraum S0.105 im Bibliotheks- und Seminarzentrum BSZ*). *Es dürfen maximal zwei Übungsteilnehmer zusammen abgeben. Bitte schreiben Sie Ihren Namen (bzw. die beiden Namen Ihrer Zweier-Gruppe)* **und die Nummer Ihrer Übungsgruppe** *auf Ihr Lösungsblatt. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.*

Die Klausur wird am Montag, dem 2. Februar 2015 von 10-12 Uhr stattfinden (im Turing- und Zuse-Hörsaal im Informatikgebäude).

Dieses Übungsblatt, sowie weitere Informationen zur Veranstaltung, finden Sie auch unter
`http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`