

Übungen zur Einführung in die Algebra

Wintersemester 2014/15, Prof. Grundhöfer

Blatt 4

10. Sei G eine Gruppe und $Z(G)$ ihr Zentrum. Man zeige:
- Ist die Zentrumsfaktorgruppe $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.
 - Hat G die Ordnung p^2 mit einer Primzahl p , so ist G isomorph zur zyklischen Gruppe C_{p^2} oder zum direkten Produkt $C_p \times C_p$.
 - Es gibt nichtabelsche Gruppen G mit abelscher Zentrumsfaktorgruppe $G/Z(G)$.
11. Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G . Ferner sei $p : G \rightarrow G/N : g \mapsto gN$ die zugehörige kanonische Projektion. Man zeige:
- Durch $U \mapsto p(U)$ wird eine Bijektion von $\{U \mid N \leq U \leq G\}$ auf die Menge aller Untergruppen der Faktorgruppe G/N definiert.
 - Sei $N \leq U \leq G$. Genau dann ist U normal in G , wenn $p(U)$ normal in G/N ist.
12. Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe von G und $M := \{xU \mid x \in G\}$ die Menge aller Rechtsnebenklassen von U in G . Wir definieren $\varphi : G \rightarrow \text{Sym}(M)$ durch $\varphi(g)(xU) = gxU$ für $g, x \in G$. Man zeige:
- φ ist eine transitive Wirkung von G auf M .
 - Der Kern von φ ist der Durchschnitt $K := \bigcap_{g \in G} gUg^{-1}$.
 - Ist G endlich und $|G : U| = n$, so ist die Ordnung der Faktorgruppe G/K ein Teiler von $n!$ und ein Vielfaches von n .
 - Ist G endlich und $|G : U|$ der kleinste Primteiler von $|G|$, so ist U normal in G .

Die Übungsgruppen werden geleitet von Dr. Matthias Grüninger und Dmitri Nedrenco (Mathematik West, Raum 03.013, E-Mail: dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de).

*Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen zu diesem Blatt bis **Montag, den 3. November 2014, 13.30 Uhr** (im richtigen Briefkasten im Fachschaftsraum S0.105 im Bibliotheks- und Seminarzentrum BSZ). Es dürfen maximal zwei Übungsteilnehmer zusammen abgeben. Bitte schreiben Sie Ihren Namen (bzw. die beiden Namen Ihrer Zweier-Gruppe) und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Lösungsblatt. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.*

Die Klausur wird am Montag, dem 2. Februar 2015 von 10-12 Uhr stattfinden (im Turing- und Zuse-Hörsaal im Informatikgebäude).

Dieses Übungsblatt, sowie weitere Informationen zur Veranstaltung, finden Sie auch unter <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco>