

# Übungen zur Einführung in die Algebra

Wintersemester 2014/15, Prof. Grundhöfer

## Blatt 3

7. Sei  $G$  eine Gruppe. Man zeige:

- (a)  $\text{Aut}(G)$  ist eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $\text{Sym}(G)$ .
- (b) Die Endomorphismen einer zyklischen Gruppe  $G$  sind genau die Abbildungen  $G \rightarrow G : x \mapsto x^a$  mit  $a \in \mathbb{Z}$ .
- (c)  $\text{Aut}(C_n, \oplus)$  ist eine abelsche Gruppe der Ordnung  $\varphi(n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , aber  $\text{Aut}(C_n, \oplus)$  ist nicht für alle  $n \in \mathbb{N}$  zyklisch.
- (d)  $\text{Aut}(C_2 \times C_2) \cong S_3$ .

8. Für jede Gruppe  $G$  nennt man  $Z(G) := \{a \in G \mid ax = xa \text{ für alle } x \in G\}$  das *Zentrum* von  $G$ .

- (a) Man zeige, dass  $Z(G)$  eine Untergruppe von  $G$  ist.
- (b) Man beweise die Beziehung  $f(Z(G)) = Z(G)$  für alle Automorphismen  $f$  von  $G$ .
- (c) Man bestimme das Zentrum der symmetrischen Gruppe  $\text{Sym}(M)$ , wobei  $M$  eine beliebige Menge mit mindestens drei Elementen ist.

9. Seien  $U$  und  $V$  Untergruppen einer Gruppe  $G$ . In dieser Aufgabe geht es um das elementweise Produkt  $UV := \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ . Man zeige:

- (a) Genau dann ist die Menge  $UV$  eine Untergruppe von  $G$ , wenn  $UV = VU$  gilt.
- (b) Ist  $U$  ein Normalteiler von  $G$ , so gilt  $\langle U \cup V \rangle = UV = VU$ .
- (c) Sind  $U$  und  $V$  endlich, so gilt  $|UV| = |U| \cdot |V| \cdot |U \cap V|^{-1}$ .

*Die Übungsgruppen werden geleitet von Dr. Matthias Grüninger und Dmitri Nedrenco (Mathematik West, Raum 03.013, E-Mail: [dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de](mailto:dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de)).*

*Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen zu diesem Blatt bis **Montag, den 27. Oktober 2014, 13.30 Uhr** (im richtigen Briefkasten im Fachschaftsraum S0.105 im Bibliotheks- und Seminarzentrum BSZ). Es dürfen maximal zwei Übungsteilnehmer zusammen abgeben. Bitte schreiben Sie Ihren Namen (bzw. die beiden Namen Ihrer Zweier-Gruppe) und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Lösungsblatt. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.*

*Die Klausur wird am Montag, dem 2. Februar 2015 von 10-12 Uhr stattfinden (im Turing- und Zuse-Hörsaal im Informatikgebäude).*

*Dieses Übungsblatt, sowie weitere Informationen zur Veranstaltung, finden Sie auch unter <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco>*