

Übungen zur Lie-Theorie

Blatt 9 (Abgabe Dienstag 3. Juli)

24. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen für $n \geq 2$.

- (a) Für jeden kommutativen Körper K der Charakteristik 0 ist $\mathfrak{sl}_n K$ eine einfache Lie-Algebra.

Hinweis: Sei E_{ij} die Matrix mit dem Eintrag 1 an der Stelle (i, j) und dem Eintrag 0 an allen anderen Stellen. Berechnen Sie $[[X, E_{ij}], E_{ij}]$ für eine beliebige Matrix X sowie die Kommutatoren $[E_{ij}, E_{jk}]$.

- (b) Die Lie-Algebra $\mathfrak{su}_n \mathbb{C}$ ist einfach.

Hinweis: Folgern Sie aus der Gleichung $x = \frac{1}{2}(x - \bar{x}^{\text{transp}}) + i\frac{1}{2i}(x + \bar{x}^{\text{transp}})$ die Beziehung $\mathfrak{sl}_n \mathbb{C} = \mathfrak{su}_n \mathbb{C} \oplus i\mathfrak{su}_n \mathbb{C}$ und benutzen Sie (a).

25. (a) Finden Sie für die komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2 \mathbb{C}$ eine Orthonormalbasis bezüglich der Killing-Form.

- (b) Geben Sie explizit einen Isomorphismus von $\mathfrak{sl}_2 \mathbb{C}$ auf die Lie-Algebra $\mathfrak{o}_3 \mathbb{C}$ an.

Die Übungen werden von Dmitri Nedrenco geleitet und finden donnerstags im Raum SE 30 ab 14.15 Uhr statt. Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen: Dienstags vor Beginn der Vorlesung. Maximal zwei Übungsteilnehmer dürfen zusammen ein Lösungsblatt erstellen. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf Ihr Lösungsblatt.

Die Übungsblätter gibt es auch unter <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco>.

Exercises on Lie theory

Assignment 9 (due on Tuesday 3 July)

22. Prove the following assertions for $n \geq 2$.
- (a) For every field F of characteristic 0 the Lie algebra $\mathfrak{sl}_n F$ is simple.
Hint: Let E_{ij} be the matrix with entry 1 at the position (i, j) and entry 0 at all other positions. Compute $[[X, E_{ij}], E_{ij}]$ for an arbitrary matrix X as well as the commutators $[E_{ij}, E_{jk}]$.
 - (b) The Lie algebra $\mathfrak{su}_n \mathbb{C}$ is simple.
Hint: Deduce from $x = \frac{1}{2}(x - \bar{x}^{\text{transp}}) + i\frac{1}{2i}(x + \bar{x}^{\text{transp}})$ that $\mathfrak{sl}_n \mathbb{C} = \mathfrak{su}_n \mathbb{C} \oplus i\mathfrak{su}_n \mathbb{C}$ and use (a).
23. (a) Find for the complex Lie algebra $\mathfrak{sl}_2 \mathbb{C}$ an orthonormal basis with respect to the Killing form.
- (b) Describe explicitly an isomorphism of $\mathfrak{sl}_2 \mathbb{C}$ onto the Lie algebra $\mathfrak{o}_3 \mathbb{C}$.