Übungen zur Lie-Theorie

Blatt 8 (Abgabe Dienstag 26. Juni)

22. Seien I und J Ideale einer Lie-Algebra L. Zeigen Sie:

   (a) Die Menge $[I, J] := \{\sum_{k=1}^{t}[i_k, j_k] \mid t \in \mathbb{N}, i_k \in I, j_k \in J\}$ ist ein Ideal von L.

   (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Kommutatoralgebra $I^{(n)}$ ein Ideal von L.

   (c) L ist genau dann auflösbar, wenn I und L/I auflösbar sind.

   (d) Sind I und J auflösbar, so ist auch $I + J$ ein auflösbares Ideal von L.

23. Zur Berechnung einer Killing-Form κ kann man zunächst $\kappa(x, x)$ bestimmen und dann die Formel $2\kappa(x, y) = \kappa(x + y, x + y) - \kappa(x, x) - \kappa(y, y)$ benutzen.

   (a) Zeigen Sie, dass die Killing-Form κ der Lie-Algebra $\mathrm{gl}_n\mathbb{R}$ durch

$$\kappa(x, y) = 2n\,\mathrm{Spur}(xy) - 2\,\mathrm{Spur}(x)\mathrm{Spur}(y)$$

   für $x, y \in \mathrm{gl}_n\mathbb{R}$ gegeben ist. (Hinweis: $(\mathrm{ad}\,x)^2(z) = x^2z - 2xzx + zx^2$)

   (b) Bestimmen Sie die Killing-Form von $\mathrm{sl}_n\mathbb{R}$.

   (c) Bestimmen Sie die Killing-Form der Lie-Algebra $\mathrm{L}(G)$ zur Heisenberg-Gruppe G aus Aufgabe 16 und zeigen Sie, dass die zwei Lie-Algebren $\mathrm{sl}_2\mathbb{R}$ und $\mathrm{L}(G)$ nicht isomorph sind.

Die Übungen werden von Dmitri Nedrenco geleitet und finden donnerstags im Raum SE 30 ab 14.15 Uhr statt. Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen: Dienstags vor Beginn der Vorlesung. Maximal zwei Übungsteilnehmer dürfen zusammen ein Lösungsblatt erstellen. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf Ihr Lösungsblatt.
Die Übungsblätter gibt es auch unter `http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`.

Exercises on Lie theory

Assignment 8 (due on Tuesday 26 June)

22. Let I and J be ideals of a Lie algebra L. Prove the following assertions:

    (a) The set $[I, J] := \{\sum_{k=1}^{t} [i_k, j_k] \mid t \in \mathbb{N}, i_k \in I, j_k \in J\}$ is an ideal of L.

    (b) For every $n \in \mathbb{N}$ the n-th commutator subalgebra $I^{(n)}$ is an ideal of L.

    (c) L is solvable if, and only if, I and L/I are solvable.

    (d) If I and J are solvable, then also $I + J$ is a solvable ideal of L.

23. To compute a Killing form κ one can first determine $\kappa(x, x)$ and then use the formula $2\kappa(x, y) = \kappa(x + y, x + y) - \kappa(x, x) - \kappa(y, y)$.

    (a) Show that the Killing form κ of the Lie algebra $\mathrm{gl}_n\mathbb{R}$ is given by

    $$\kappa(x, y) = 2n \operatorname{trace}(xy) - 2 \operatorname{trace}(x)\operatorname{trace}(y)$$

    for $x, y \in \mathrm{gl}_n\mathbb{R}$. (Hint: $(\operatorname{ad} x)^2(z) = x^2 z - 2xzx + zx^2$)

    (b) Determine the Killing form of $\mathrm{sl}_n\mathbb{R}$.

    (c) Determine the Killing form of the Lie algebra $\mathrm{L}(G)$ of the Heisenberg group G in Exercise 16, and show that the two Lie algebras $\mathrm{sl}_2\mathbb{R}$ and $\mathrm{L}(G)$ are not isomorphic.