Übungen zur Lie-Theorie

Blatt 7 (Abgabe Dienstag 19. Juni)

19. Seien G und H abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ bzw. $\mathrm{GL}_m\mathbb{R}$, sei $f : G \to H$ ein stetiger Gruppen-Homomorphismus und sei $\bar{f} : \mathrm{L}(G) \to \mathrm{L}(H)$ der zugehörige Lie-Homomorphismus. Zeigen Sie:

   (a) Genau dann ist $\bar{f}$ injektiv, wenn der Kern von f diskret ist.

   (b) Ist $\bar{f}$ surjektiv, so gilt $f(G^1) = H^1$.

20. Man nennt zwei Lie-Algebren L und M *isomorph*, falls eine lineare Bijektion $f : L \to M$ existiert mit $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ für alle $a, b \in L$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:

   (a) Jede Lie-Algebra der Dimension 2 über F ist entweder abelsch oder isomorph zu der (linearen) Lie-Algebra $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in F\}$.

   (b) Unter den linearen Lie-Algebren (der Dimension 3 über F)
   $$L_t := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & xt & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in F \right\} \subseteq \mathrm{gl}_3 F$$
   mit $t \in F$ gibt es überabzählbar viele Isomorphietypen.
   (Man kann dazu Eigenwerte der linearen Abbildungen $\mathrm{ad}(A) : L_t \to L_t : X \mapsto [A, X]$ mit $A \in L_t$ betrachten.)

21. Sei A eine (nicht notwendig assoziative) $\mathbb{R}$-Algebra von endlicher Dimension. Eine *Derivation* von A ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\delta : A \to A$ mit $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$ für alle $x, y \in A$. Zeigen Sie:

   (a) Die Gruppe $G = \{g \in \mathrm{GL}(A) \mid g(xy) = g(x)g(y) \text{ für alle } x, y \in A\}$ aller $\mathbb{R}$-linearen Automorphismen von A ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(A)$, und die zugehörige Lie-Algebra $\mathrm{L}(G)$ besteht genau aus den Derivationen von A. Insbesondere bilden die Derivationen von A eine Lie-Unteralgebra von $\mathrm{gl}(A)$.

   (b) Jede Derivation von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist trivial (d.h. konstant 0). Die Derivationen von $\mathbb{H}$ sind genau die *inneren* Derivationen, d.h. die Abbildungen $x \mapsto ax - xa$ mit $a \in \mathbb{H}$, und diese bilden eine zu $\mathrm{o}_3\mathbb{R}$ isomorphe Lie-Algebra (vgl. Aufgabe 11c).

Die Übungen werden von Dmitri Nedrenco geleitet und finden donnerstags im Raum SE 30 ab 14.15 Uhr statt.
Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen: Dienstags vor Beginn der Vorlesung. Maximal zwei Übungsteilnehmer dürfen zusammen ein Lösungsblatt erstellen. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf Ihr Lösungsblatt.

Die Übungsblätter gibt es auch unter `http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`.

Am 19. Juni finden die studentischen Hochschulwahlen statt, danach ab 18 Uhr das alljährliche Sommerfest.

Exercises on Lie theory

Assignment 7 (due on Tuesday 19 June)

19. Let G and H be closed subgroups of $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ and $\mathrm{GL}_m\mathbb{R}$, respectively, let $f : G \to H$ be a continuous group homomorphism and let $\bar{f} : \mathrm{L}(G) \to \mathrm{L}(H)$ be the corresponding Lie homomorphism. Prove the following assertions:

    (a) The mapping $\bar{f}$ is injective if, and only if, the kernel of f is discrete.

    (b) If $\bar{f}$ is surjective, then $f(G^1) = H^1$.

20. Two Lie algebras L and M are called *isomorphic*, if there exists a linear bijection $f : L \to M$ such that $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ for all $a, b \in L$. Prove the following assertions for $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

    (a) Every Lie algebra of dimension 2 over F is either abelian or isomorphic to the (linear) Lie algebra $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in F\}$.

    (b) Among the linear Lie algebras (of dimension 3 over F)

    $$L_t := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & xt & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in F \right\} \subseteq \mathrm{gl}_3 F$$

    with $t \in F$ there exist uncountably many isomorphism types.
    (One can use eigenvalues of the linear mappings $\mathrm{ad}(A) : L_t \to L_t : X \mapsto [A, X]$ with $A \in L_t$.)

21. Let A be a (possibly not associative) $\mathbb{R}$-algebra of finite dimension. A *derivation* of A is an $\mathbb{R}$-linear mapping $\delta : A \to A$ such that $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$ for all $x, y \in A$. Prove the following assertions:

    (a) The group $G = \{g \in \mathrm{GL}(A) \mid g(xy) = g(x)g(y) \text{ for all } x, y \in A\}$ of all $\mathbb{R}$-linear automorphisms of A is a closed subgroup of $\mathrm{GL}(A)$, and the corresponding Lie algebra $\mathrm{L}(G)$ consists of all derivations of A. In particular, the derivations of A form a Lie subalgebra of $\mathrm{gl}(A)$.

    (b) Every derivation of $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ is trivial (i.e. constant with value 0). The derivations of $\mathbb{H}$ are the *inner* derivations, i.e. the mappings $x \mapsto ax - xa$ with $a \in \mathbb{H}$, and these mappings form a Lie algebra isomorphic to $\mathrm{o}_3\mathbb{R}$ (compare Exercise 11c).