Übungen zur Lie-Theorie

Blatt 6 (Abgabe Dienstag 5. Juni)

17. Die Bewegungsgruppe (oder Isometriengruppe) $\mathrm{AO}_n\mathbb{R}$ des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^n$ besteht aus allen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Mx + a$ mit $M \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

    (a) $\mathrm{AO}_n\mathbb{R}$ ist isomorph zur Gruppe

    $$G := \left\{ \begin{pmatrix} M & a \\ & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n \right\} \leq \mathrm{GL}_{n+1}\mathbb{R},$$

    wobei man a als Spalte der Länge n betrachtet. Ferner ist G abgeschlossen in $\mathrm{GL}_{n+1}\mathbb{R}$ und in $\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, und $\dim \mathrm{L}(G) = (n^2 + n)/2$.

    (b) G ist das (semidirekte) Produkt von zwei abgeschlossenen Untergruppen $A \cong (\mathbb{R}^n, +)$ und $B \cong \mathrm{O}_n\mathbb{R}$, und B ist eine maximal kompakte Untergruppe von G (d.h. G enthält keine kompakte Untergruppe, welche echt grösser als B ist).

18. Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ mit $H \neq \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$. Beweisen Sie:

    (a) Sind $A, B \in \mathrm{o}_3\mathbb{R}$ linear unabhängig, so ist A, B, $[A, B]$ eine Basis von $\mathrm{o}_3\mathbb{R}$.

    (b) $H^1 = \exp(\mathbb{R}A)$ für eine geeignete Matrix $A \in \mathrm{o}_3\mathbb{R}$.

    (c) Ist H unendlich, so ist entweder $H = H^1 \cong \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ oder H^1 hat den Index 2 in $H \cong \mathrm{O}_2\mathbb{R}$, und in beiden Fällen besteht H^1 aus allen Drehungen mit einer festen Drehachse.

    (d) Es gibt endliche Untergruppen von $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$, welche weder zyklisch noch Diedergruppen sind. (Die 5 platonischen Körper führen zu 3 Konjugiertenklassen von solchen Untergruppen.)

Die Übungen werden von Dmitri Nedrenco geleitet und finden donnerstags im Raum SE 30 ab 14.15 Uhr statt.

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen: Dienstags vor Beginn der Vorlesung. Maximal zwei Übungsteilnehmer dürfen zusammen ein Lösungsblatt erstellen. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf Ihr Lösungsblatt.

Die Übungsblätter gibt es auch unter `http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`.

Exercises on Lie theory

Assignment 6 (due on Tuesday 5 June)

17. The group $\mathrm{AO}_n\mathbb{R}$ of motions (or isometries) of the euclidean vector space $\mathbb{R}^n$ consists of all mappings $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Mx + a$ with $M \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}^n$. Prove the following assertions:

    (a) $\mathrm{AO}_n\mathbb{R}$ is isomorphic to the group

    $$G := \left\{ \begin{pmatrix} M & a \\ & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n \right\} \le \mathrm{GL}_{n+1}\mathbb{R},$$

    where a is considered as a column of length n. Moreover, G is closed in $\mathrm{GL}_{n+1}\mathbb{R}$ and in $\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, and $\dim \mathrm{L}(G) = (n^2 + n)/2$.

    (b) G is the (semidirect) product of two closed subgroups $A \cong (\mathbb{R}^n, +)$ and $B \cong \mathrm{O}_n\mathbb{R}$, and B is a maximal compact subgroup of G (i.e. G contains no compact subgroup that is larger than B).

18. Let H be a closed subgroup of $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ with $H \ne \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$. Prove the following assertions:

    (a) If $A, B \in \mathrm{o}_3\mathbb{R}$ are linearly independent, then A, B, $[A, B]$ is a basis of $\mathrm{o}_3\mathbb{R}$.

    (b) $H^1 = \exp(\mathbb{R}A)$ for a suitable matrix $A \in \mathrm{o}_3\mathbb{R}$.

    (c) If H is infinite, then either $H = H^1 \cong \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ or H^1 has index 2 in $H \cong \mathrm{O}_2\mathbb{R}$, and in both cases H^1 consists of all rotations around a fixed axis.

    (d) There exist finite subgroups of $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ that are neither cyclic nor dihedral groups. (The 5 platonic solids yield 3 conjugacy classes of such subgroups.)