Übungen zur Lie-Theorie

Blatt 5 (Abgabe Mittwoch 23. Mai)

14. (a) Zeigen Sie, dass $\exp(\mathbb{C}^{n\times n}) = \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ gilt.
    (b) Zeigen Sie, dass die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ nicht in der Menge $\exp(\mathrm{sl}_2\mathbb{C})$ liegt.
    (c) Zeigen Sie, dass $\exp(\mathrm{sl}_2\mathbb{R}) = \{-1\} \cup \{A \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \mid \mathrm{Spur} A > -2\}$ gilt.
    (d) Ist die Abbildung $\exp : \mathrm{o}_n\mathbb{R} \to \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ surjektiv?

15. Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.
    (a) Zeigen Sie, dass eine offene 1-Umgebung W in G existiert mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem $g \in W$ existiert genau ein $h \in W$ mit $g = h^k$.
    (b) Die Umgebung W in (a) hängt von k ab; zeigen Sie am Beispiel der Gruppe $G = \mathbb{S}_1$, dass man W nicht unabhängig von k wählen kann.

16. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen über die 3-dimensionale Heisenberg-Gruppe
$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \leq \mathrm{GL}_3\mathbb{R}$$
und ihre lineare Lie-Algebra $\mathrm{L}(G) \subseteq \mathrm{gl}_3\mathbb{R}$.
    (a) $\exp : \mathrm{L}(G) \to G$ ist eine Bijektion mit $\exp(A) = 1 + A + \frac{1}{2}A^2$ für alle $A \in \mathrm{L}(G)$, und $\log = (\exp)^{-1}$ ist durch $\log(g) = -\frac{3}{2} + 2g - \frac{1}{2}g^2$ für $g \in G$ gegeben.
    (b) Für alle $A, B \in \mathrm{L}(G)$ gilt $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B])$.

Die Übungen werden von Dmitri Nedrenco geleitet und finden donnerstags im Raum SE 30 ab 14.15 Uhr statt.

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen: Dienstags vor Beginn der Vorlesung. Maximal zwei Übungsteilnehmer dürfen zusammen ein Lösungsblatt erstellen. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf Ihr Lösungsblatt.

Die Übungsblätter gibt es auch unter `http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`.

Exercises on Lie theory

Assignment 5 (due on Wednesday 23 May)

14. (a) Show that $\exp(\mathbb{C}^{n\times n}) = \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$.
    (b) Show that the matrix $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ is not contained in the set $\exp(\mathrm{sl}_2\mathbb{C})$.
    (c) Show that $\exp(\mathrm{sl}_2\mathbb{R}) = \{-1\} \cup \{A \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \mid \mathrm{trace} A > -2\}$.
    (d) Is the mapping $\exp : \mathrm{o}_n\mathbb{R} \to \mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ surjective?

15. Let G be a closed subgroup of $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{N}$.
    (a) Show that there exists an open 1-neighbourhood W in G with the following property: for every $g \in W$ there exists exactly one $h \in W$ with $g = h^k$.
    (b) The neighbourhood W in (a) depends on k; show for $G = \mathbb{S}_1$ that W cannot be chosen independently of k.

16. Prove the following assertions for the 3-dimensional Heisenberg group

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \leq \mathrm{GL}_3\mathbb{R}$$

and its linear Lie algebra $\mathrm{L}(G) \subseteq \mathrm{gl}_3\mathbb{R}$.

   (a) $\exp : \mathrm{L}(G) \to G$ is a bijection with $\exp(A) = 1 + A + \frac{1}{2}A^2$ for every $A \in \mathrm{L}(G)$, and $\log = (\exp)^{-1}$ is given by $\log(g) = -\frac{3}{2} + 2g - \frac{1}{2}g^2$ for $g \in G$.
   (b) For all $A, B \in \mathrm{L}(G)$ we have $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B])$.