Prof. T. Grundhöfer Sommersemester 2018

Übungen zur Lie-Theorie

Blatt 4 (Abgabe Dienstag 15. Mai)

11. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen über die Hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H}$; dabei ist $\mathbb{R}$ mit dem Teilkörper $\{r \cdot 1 \mid r \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{H}$ identifiziert.
    (a) $\mathbb{R}$ ist das Zentrum von $\mathbb{H}$, und $V := \{x \in \mathbb{H} \mid 0 \geq x^2 \in \mathbb{R}\}$ ist ein reeller Unterraum von $\mathbb{H}$ mit $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus V$.
    (b) Jeder Automorphismus und jeder Antiautomorphismus von $\mathbb{H}$ ist $\mathbb{R}$-linear und lässt V und die euklidische Bilinearform $f(x, y) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$ auf $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ invariant.
    (c) Die Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$ besteht aus inneren Automorphismen und ist isomorph zur Faktorgruppe $\mathbb{H}^*/\mathbb{R}^*$ und zu $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$.
    Hinweis: für $0 \neq a \in V$ hat der innere Automorphismus $x \mapsto a^{-1}xa$ die Ordnung 2; vgl. Aufgabe 2.
    (d) Die multiplikative Gruppe $\mathbb{H}^*$ ist das direkte Produkt der zwei Untergruppen $\mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ und $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$, und die Faktorgruppe $\mathrm{SU}_2\mathbb{C}/\langle -\mathrm{id}\rangle$ ist isomorph zu $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$. Ferner gilt $\mathrm{SU}_2\mathbb{C} = \mathrm{U}_1\mathbb{H} = \mathrm{SL}_1\mathbb{H}$.

12. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:
    (a) Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist die Einparametergruppe $\exp(\mathbb{R}A) \leq \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ genau dann kompakt, wenn A diagonalisierbar ist und ein $r \in \mathbb{R}$ existiert mit der Eigenschaft, dass alle Eigenwerte von A in der Menge $ir\mathbb{Q}$ liegen.
    (b) Alle Einparametergruppen in der Gruppe $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ sind kompakt (und bestehen aus Drehungen um eine gemeinsame Drehachse), aber $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ enthält auch nichtkompakte Einparametergruppen.

13. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen über Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$:
    (a) Ist $\exp A$ vertauschbar mit $\exp(\frac{1}{k}B)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, so ist nicht notwendig A mit B vertauschbar.
    (b) Ist $\exp(\frac{1}{k}A)$ vertauschbar mit $\exp(\frac{1}{k}B)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, so gilt $AB = BA$.
    (c) Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn $\exp A$ diagonalisierbar ist.
    (d) Ist A nilpotent, so ist $\exp A$ unipotent (d.h. die Matrix $1 - \exp A$ ist nilpotent), aber die umgekehrte Implikation ist falsch.

Die Übungen werden von Dmitri Nedrenco geleitet und finden donnerstags im Raum SE 30 ab 14.15 Uhr statt.

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen: Dienstags vor Beginn der Vorlesung. Maximal zwei Übungsteilnehmer dürfen zusammen ein Lösungsblatt erstellen. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf Ihr Lösungsblatt.

Die Übungsblätter gibt es auch unter `http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`.

Exercises on Lie theory

Assignment 4 (due on Tuesday 15 May)

11. We identify $\mathbb{R}$ with the subfield $\{r\cdot 1 \mid r \in \mathbb{R}\}$ of the skew field $\mathbb{H}$ of Hamilton's quaternions. Prove the following assertions:

    (a) $\mathbb{R}$ is the center of $\mathbb{H}$, and $V := \{x \in \mathbb{H} \mid 0 \geq x^2 \in \mathbb{R}\}$ is a real subspace of $\mathbb{H}$ with $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus V$.

    (b) Every automorphism and every anti-automorphism of $\mathbb{H}$ is $\mathbb{R}$-linear and leaves V and the euclidean bilinear form $f(x,y) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$ on $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ invariant.

    (c) The automorphism group of $\mathbb{H}$ consists of inner automorphisms and is isomorphic to the factor group $\mathbb{H}^*/\mathbb{R}^*$ and to $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$.
    Hint: for $0 \neq a \in V$ the inner automorphism $x \mapsto a^{-1}xa$ has oder 2; see Exercise 2.

    (d) The multiplicative group $\mathbb{H}^*$ is the direct product of the two subgroups $\mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ and $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$, and the factor group $\mathrm{SU}_2\mathbb{C}/\langle -\mathrm{id}\rangle$ is isomorphic to $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$. Moreover, $\mathrm{SU}_2\mathbb{C} = \mathrm{U}_1\mathbb{H} = \mathrm{SL}_1\mathbb{H}$.

12. Prove the following assertions:

    (a) For $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ the one-parameter group $\exp(\mathbb{R}A) \leq \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ is compact if, and only if, A is diagonalizable and there exists an $r \in \mathbb{R}$ such that all eigenvalues of A are contained in the set $ir\mathbb{Q}$.

    (b) All one-parameter subgroups in the group $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ are compact (and consist of rotations with a common axis), but $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ contains one-parameter subgroups that are not compact.

13. Prove the following assertions for matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

    (a) If $\exp A$ commutes with $\exp(\frac{1}{k}B)$ for every $k \in \mathbb{N}$, then A does not necessarily commute with B.

    (b) If $\exp(\frac{1}{k}A)$ commutes with $\exp(\frac{1}{k}B)$ for every $k \in \mathbb{N}$, then $AB = BA$.

    (c) The matrix A is diagonalizable if, and only if, $\exp A$ is diagonalizable.

    (d) If A is nilpotent, then $\exp A$ is unipotent (i.e. the matrix $1 - \exp A$ is nilpotent), but the converse implication is false.