Übungen zur Lie-Theorie

Blatt 3 (Abgabe Dienstag 8. Mai)

8. (a) Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Untergruppen der Kreislinie $\mathbb{S}_1 = \mathrm{U}_1\mathbb{C} \leq \mathrm{GL}_1\mathbb{C}$.

   (b) Zeigen Sie: für $t \in \mathbb{Q}$ ist die Gruppe

$$U_t := \left\{ \begin{pmatrix} e^{ir} & 0 \\ 0 & e^{itr} \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\} \leq \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$$

   abgeschlossen in der Gruppe $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ aller Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $c, d \in \mathbb{S}_1$, ferner kompakt und isomorph zu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

   (c) Zeigen Sie: für $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist die Gruppe U_t wie in (b) eine echte dichte Untergruppe von $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ und isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$.

9. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen über reelle Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine beliebige Matrixnorm $\|\cdot\|$:

   (a) Für $k \in \mathbb{N}$ und $\|A\|, \|B\| \leq C \in \mathbb{R}$ gilt $\|A^k - B^k\| \leq kC^{k-1}\|A - B\|$.

   (b) Für $\|A\|, \|B\| \leq C \in \mathbb{R}$ gilt $\|\exp A - \exp B\| \leq e^C \|A - B\|$. Insbesondere ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig.

   (c) $\det(\exp A) = e^{\operatorname{trace} A}$.

   (d) $\exp A = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k} A\right)^k$.

10. (a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $f(X) = X^k$ definiert. Zeigen Sie, dass die Ableitung von f an der Stelle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $f'(A)(X) = \sum_{j=0}^{k-1} A^j X A^{k-1-j}$ für $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben ist.

    (b) Zeigen Sie, dass die Ableitung von $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ an der Stelle A durch

$$\exp'(A)(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} A^j X A^{k-1-j}$$

    gegeben ist.

Die Übungen werden von Dmitri Nedrenco geleitet und finden donnerstags im Raum SE 30 ab 14.15 Uhr statt.

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen: Dienstags vor Beginn der Vorlesung. Maximal zwei Übungsteilnehmer dürfen zusammen ein Lösungsblatt erstellen. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf Ihr Lösungsblatt.

Die Übungsblätter gibt es auch unter `http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`.

Exercises on Lie theory

Assignment 3 (due on Tuesday 8 May)

8. (a) Determine all closed subgroups of the circle $\mathbb{S}_1 = \mathrm{U}_1\mathbb{C} \leq \mathrm{GL}_1\mathbb{C}$.
   (b) Show that for $t \in \mathbb{Q}$ the group
   $$U_t := \left\{ \begin{pmatrix} e^{ir} & 0 \\ 0 & e^{itr} \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\} \leq \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$$
   is closed in the group $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ of all matrices $\left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ with $c, d \in \mathbb{S}_1$, and that U_t is compact and isomorphic to $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
   (c) Show that for $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ the group U_t as in (b) is a dense proper subgroup of $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ and isomorphic to $(\mathbb{R}, +)$.

9. Prove the following assertions for real matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and every matrix norm $\|\cdot\|$:
   (a) For $k \in \mathbb{N}$ and $\|A\|, \|B\| \leq C \in \mathbb{R}$ we have $\|A^k - B^k\| \leq kC^{k-1}\|A - B\|$.
   (b) For $\|A\|, \|B\| \leq C \in \mathbb{R}$ we have $\|\exp A - \exp B\| \leq e^C\|A - B\|$. In particular, the exponential mapping $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ is continuous.
   (c) $\det(\exp A) = e^{\operatorname{trace} A}$.
   (d) $\exp A = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}A\right)^k$.

10. (a) Let $k \in \mathbb{N}$ and define $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ by $f(X) = X^k$. Show that the derivative of f at $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is given by $f'(A)(X) = \sum_{j=0}^{k-1} A^j X A^{k-1-j}$ for $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
    (b) Show that the derivative of $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ at A is given by
    $$\exp'(A)(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} A^j X A^{k-1-j}.$$