Übungen zur Lie-Theorie

Blatt 2 (Abgabe Dienstag 24. April)

4. Sei G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ und

$$G^1 := \{g \in G \mid \text{es gibt einen Weg in } G \text{ von } 1 \text{ nach } g\}$$

die sogenannte *Weg(zusammenhangs)komponente* von G. Zeigen Sie:

(a) G^1 ist ein Normalteiler von G, aber nicht immer offen in G.

(b) Jeder diskrete Normalteiler von G^1 liegt im Zentrum von G^1.

(c) Jedes Element der unitären Gruppe $\mathrm{U}_n\mathbb{C}$ ist diagonalisierbar, und jedes Element von $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ ist komplex diagonalisierbar.

(d) Die Wegkomponente von $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ ist die Gruppe $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$.

5. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Jedes Element von $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ist ein Produkt von zwei Elementen von $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$, welche beide den Eigenwert 1 haben.

(b) Die Gruppen $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ und $\mathrm{SL}_n\mathbb{C}$ sind wegzusammenhängend.
(Man kann Induktion nach n benutzen.)

(c) Die Wegkomponente von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ besteht aus den Matrizen $A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ mit $\det A > 0$.

6. Sei G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$, ferner $\emptyset \neq X \subseteq G$, und X sei offen in G. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Die von X erzeugte Untergruppe $\langle X \rangle$ ist offen und abgeschlossen in G.

(b) Ist G wegzusammenhängend, so gilt $\langle X \rangle = G$.

7. Beweisen Sie, dass die diagonalisierbaren Matrizen in $\mathbb{C}^{n\times n}$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}^{n\times n}$ bilden, und dass die entsprechende Aussage für reelle Matrizen falsch ist.

Die Übungen werden von Dmitri Nedrenco geleitet und finden donnerstags im Raum SE 30 ab 14.15 Uhr statt.

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen: Dienstags vor Beginn der Vorlesung. Maximal zwei Übungsteilnehmer dürfen zusammen ein Lösungsblatt erstellen. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf Ihr Lösungsblatt.

Die Übungsblätter gibt es auch unter `http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`.

Exercises on Lie theory

Assignment 2 (due on Tuesday 24 April)

4. Let G be a subgroup of $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ and let

$$G^1 := \{g \in G \mid \text{there exists a path in } G \text{ from } 1 \text{ to } g\}$$

be the so-called *path-component* of G. Prove the following assertions:

(a) G^1 is a normal subgroup of G, but not always open in G.

(b) Every discrete normal subgroup of G^1 is contained in the center of G^1.

(c) Every element of the unitary group $\mathrm{U}_n\mathbb{C}$ is diagonalizable, and every element of $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ is diagonalizable over $\mathbb{C}$.

(d) The path-component of $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ is the group $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$.

5. Prove the following assertions:

(a) Every element of $\mathrm{SL}_n\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ is the product of two elements of $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ both having eigenvalue 1.

(b) The groups $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ and $\mathrm{SL}_n\mathbb{C}$ are path-connected.
(One can use induction on n.)

(c) The path-component of $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ consists of the matrices $A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ with $\det A > 0$.

6. Let G be a subgroup of $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ and let $\emptyset \neq X \subseteq G$ such that X is open in G. Prove the following assertions:

(a) The subgroup $\langle X \rangle$ generated by X is open and closed in G.

(b) If G is path-connected, then $\langle X \rangle = G$.

7. Show that the diagonalizable matrices in $\mathbb{C}^{n\times n}$ form a dense subset of $\mathbb{C}^{n\times n}$, and that the corresponding assertion for real matrices is false.