Prof. T. Grundhöfer Sommersemester 2018

Übungen zur Lie-Theorie

Blatt 1 (Abgabe Dienstag 17. April)

1. Beweisen Sie (a) und (b), und entscheiden Sie (c) durch Beweis oder Gegenbeispiel:

   (a) Die Gruppe $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ ist abelsch und isomorph zur Faktorgruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

   (b) Jedes Element der Menge $\mathrm{O}_2\mathbb{R} \setminus \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ ist ähnlich zu der Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(1, -1)$ (also eine Geradenspiegelung in der Ebene).

2. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

   (a) Jedes Element der Gruppe $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ ist eine Drehung mit einer Drehachse um einen Drehwinkel α, d.h. ähnlich zu einer Matrix

   $$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & \\ \sin\alpha & \cos\alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

   Insbesondere ist jedes Element von $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ mit dem Eigenwert -1 eine Drehung der Ordnung 2.

   (b) Je zwei Drehungen in $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ um den gleichen Drehwinkel sind konjugiert in $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$.

   (c) Jedes Element $A \in \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ ist ein Produkt von zwei Drehungen der Ordnung 2. (Wählen Sie die Drehachsen der gesuchten Drehungen senkrecht zur Drehachse von A.)

3. Bei dieser Aufgabe sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$, und $\|\cdot\|_2$ sei die euklidische Norm. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

   (a) Es gibt eine reelle Konstante c mit $\|x\| \leq c\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$.

   (c) Es gibt positive Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a\|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

   (d) Offenheit, Stetigkeit und Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|$ sind äquivalent zum entsprechenden Begriff bezüglich $\|\cdot\|_2$.

Die Übungen zur Vorlesung werden von Dmitri Nedrenco geleitet und finden donnerstags statt, zum ersten Mal am 19. April im Raum SE 30 ab 14.15 Uhr.

Abgabe Ihrer schriftlichen Lösungen: Dienstags vor Beginn der Vorlesung. Maximal zwei Übungsteilnehmer dürfen zusammen ein Lösungsblatt erstellen. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf Ihr Lösungsblatt.

Die Übungsblätter gibt es auch unter `http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco`.

Exercises on Lie theory

Assignment 1 (due on Tuesday 17 April)

1. Prove assertions (a) and (b), and answer (c) by a proof or a counterexample.

   (a) The group $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ is abelian and isomorphic to the factor group $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

   (b) Every element of the set $\mathrm{O}_2\mathbb{R} \setminus \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ is similar to the diagonal matrix $\mathrm{diag}(1, -1)$ (hence it is a line reflection in the plane).

2. Prove the following assertions.

   (a) Every element of the group $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ is a rotation around an axis by some angle α, i.e. it is similar to a matrix

   $$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & \\ \sin\alpha & \cos\alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with } 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

   In particular, every element of $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ with the eigenvalue -1 is a rotation of order 2.

   (b) Any two rotations in $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ by the same angle are conjugate in $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$.

   (c) Every element $A \in \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ is a product of two rotations of order 2.
   (Choose the axes of the two rotations orthogonal to the axis of A.)

3. Let $\|\cdot\|$ be an arbitrary norm on the vector space $\mathbb{R}^n$, and denote by $\|\cdot\|_2$ the euclidean norm. Prove the following assertions.

   (a) There exists a real constant c such that $\|x\| \leq c\|x\|_2$ for all $x \in \mathbb{R}^n$.

   (b) The mapping $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is continuous with respect to the euclidean norm $\|\cdot\|_2$.

   (c) There exist positive constants $a, b \in \mathbb{R}$ such that $a\|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\|x\|_2$ for all $x \in \mathbb{R}^n$.

   (d) Continuity, convergence, and the property of being open with respect to $\|\cdot\|$ are equivalent to the corresponding notion with respect to $\|\cdot\|_2$.