



Übungen zur Diskreten Mathematik

Blatt 4

29. April 2014

Aufgabe 4.1. Zeigen Sie, dass eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau dann eine Primzahl ist, wenn alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $1 \leq k \leq n-1$ durch n teilbar sind.

Aufgabe 4.2. Sei M eine endliche n -Menge. Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck (ohne Summenzeichen) für

- die Anzahl der Paare $(A, B) \in 2^M \times 2^M$ mit $A \cap B = \emptyset$;
- die Anzahl der Teilmengen A von M mit $|A| \equiv 0 \pmod{4}$.
(Tipp: Setzen Sie in der binomischen Formel $(x+1)^n = \dots$ für x geeignete komplexe Zahlen ein.)

Aufgabe 4.3. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die n -te Catalan-Zahl durch

$$C_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

- Zeigen Sie, dass C_n die Anzahl der Zeichenketten der Länge $2n$ bestehend aus den Zeichen „(“ und „)“ mit korrekter Klammerung ist; diese Zeichenketten haben also n öffnende und n schließende Klammern, und jedes Anfangsstück enthält höchstens so viele schließende wie öffnende Klammern.
- Leiten Sie die Rekursionsgleichung $C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ her.

Aufgabe 4.4. Sieben Geometer und fünf Algebraiker sollen auf einer Konferenz in einer Reihe mit zwölf Plätzen sitzen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Sitzplätze so zu verteilen, dass kein Algebraiker neben einem anderen Algebraiker sitzt? Wie viele Möglichkeiten der Sitzverteilung gibt es, so dass kein Geometer neben einem anderen Geometer sitzt?

Hinweise: Die Lösungen werfen Sie bitte bis spätestens **Dienstag, den 6. Mai, 14:15 Uhr** in den richtigen Briefkasten vor der Teilbibliothek Physik/Informatik ein; Sie sollten bitte zu zweit abgeben.

Die Übungsblätter finden Sie unter www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco.

Das Skript zur Vorlesung (häppchenweise) gibt es unter www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~rosehr.

Bei Fragen zu den Aufgaben oder sonstigen Problemen melden Sie sich bitte bei [Dmitri Nedrenco](mailto:Dmitri.Nedrenco@uni-wuerzburg.de).