



Trajektorienbestimmung mit Hilfe des Simplizialalgorithmus

Diplomarbeit im Fach Technische Informatik
vorgelegt von

Isabel Grimm

Trajektorienbestimmung mit Hilfe des Simplicialalgorithmus

Diplomarbeit im Fach Technische Informatik
vorgelegt von

Isabel Grimm

geboren am 09.07.1987 in Wertheim

Angefertigt am
Lehrstuhl für Robotik und Telematik
Bayerische Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Betreuer:
Prof. Dr. K. Schilling
Prof. Dr. Marco Schmidt

Abgabe der Arbeit:
30.06.2013

Erklärung

Ich versichere, die vorliegende Diplomarbeit selbständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Literatur angefertigt zu haben.

Würzburg, den 30.06.2013

(Isabel Grimm)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mich bei der Erstellung meiner Diplomarbeit unterstützt haben.

Mein Dank gilt besonders Prof. Dr. Klaus Schilling für das interessante Thema, sowie für die freundliche Unterstützung und die ausführliche Beantwortung meiner Fragen.

Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei Prof. Dr. Marco Schmidt für die exzellente Betreuung, die hilfreichen Ratschläge und seine Geduld.

Für ihren fachlichen Rat bedanke ich mich außerdem ganz herzlich bei meinen Mathematikprofessoren, Prof. Dr. Alfio Borzi und Prof. Dr. Christian Klingenberg.

Besonders bedanken möchte ich mich auch bei meiner Familie, die mir bei der Anfertigung dieser Diplomarbeit immer motivierend zur Seite stand.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Übersicht Rendezvous und Docking	2
1.1.1. Allgemeines Rendezvous und Docking	2
1.1.2. Nicht-kooperatives Rendezvous und Docking	3
1.2. Motivation	4
1.3. Ziel	4
1.4. Aufbau	5
2. Grundlagen Differentialgleichungen	7
2.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen	7
2.2. Ordnung und Grad einer Differentialgleichung	7
2.3. Homogene und inhomogene Differentialgleichungen	8
2.4. Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung	8
2.5. Anfangs- und Randwertprobleme	10
2.6. Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen	11
2.7. Partielle Differentialgleichungen	12
3. Relativbewegung zweier Satelliten	13
3.1. Systembeschreibung	13
3.2. Herleitung der Gleichungen zur Relativbewegung zweier Satelliten . .	14
3.3. Modellierung der Relativbewegung zweier Satelliten an einem Beispiel in MATLAB	18
4. Rendezvous und Docking als Optimalsteuerungsproblem	23
4.1. Variationsprobleme	23
4.2. Optimalsteuerungsprobleme	25
4.3. Mathematisches Modell für die Dynamik der Relativbewegung beim R&D	27
4.4. Das Maximumprinzip von Pontryagin	29
4.5. Transformation eines Optimalsteuerungsproblems in ein Randwertpro- blem	33
4.6. R&D-Optimalsteuerungsproblem als Randwertproblem	37
5. RWP eines nichtlinearen Differentialinklusionssystems 1.Ordnung	45
5.1. Lösen eines linearen Differentialgleichungssystems 1.Ordnung	46
5.2. Lösen eines RWP zu einem linearen Differentialgleichungssystem 1.Or- dnung	47

5.3. Lösen eines RWP zu einem nichtlinearen Differentialinklusionssystem 1.Ordnung	50
5.3.1. Definition und Fixpunktproblem eines mengenwertigen Operators	50
5.3.2. Erklärung der Bedeutung eines Fixpunktes des mengenwertigen Operators τ an einem Beispiel	53
5.3.3. RWP eines nichtlinearen Differentialinklusionssystems als Fix- punktproblem von τ	56
6. Grundlagen und Definitionen zum Simplicialalgorithmus	61
6.1. Allgemeine Beschreibung des Simplicialalgorithmus	61
6.2. Lineare Unabhängigkeit, affine Unabhängigkeit und affine Hülle . . .	62
6.3. Simplexes	63
6.4. Triangulationen	65
6.4.1. Definition Triangulation	65
6.4.2. Beispiele für Triangulationen	66
6.5. Affine Funktionen	71
6.6. Pivotisierung	72
6.7. Definition lexikographisch positiv und LP-Basis	74
6.8. Markierung einer Triangulation	76
7. Der Simplicialalgorithmus	81
7.1. Hinzufügen einer künstlichen Dimension	81
7.2. Umformung der gegebenen Problemfunktion mittels Homotopie . . .	82
7.3. Detaillierte Beschreibung des Simplicialalgorithmus mit Restart nach O.H. Merrill	83
7.4. Der Algorithmus als Door-in-Door-out-Prinzip	86
7.5. Wichtige Eigenschaften des Simplicialalgorithmus	87
7.6. Vor- und Nachteile des Simplicialalgorithmus	88
8. Fazit und Ausblick	91
A. Anwendung des mengenwertigen Operators τ auf ein Beispiel	93
B. Modellierung der Relativbewegung an einem nicht-normierten Beispiel in MATLAB	97
Abbildungsverzeichnis	103
Literaturverzeichnis	105

Kapitel 1.

Einleitung

Seit am 04.10.1957 der erste Satellit ins Weltall geschickt wurde, folgten ungefähr 5.000 weitere Raumfahrtmissionen und hinterließen bis heute etwa 29.000 Trümmerteile von über 10cm Durchmesser, 670.000 Fragmente größer 1cm und über 170.000.000 Teilchen an Weltraummüll größer als 1mm. Diese Menge nimmt kontinuierlich unter anderem durch aktuelle Weltraummissionen, Explosionen ausgedienter Satelliten und Oberstufen von Raketen oder Kollisionen mit Weltraummüll zu. Die größte derartige Kollision fand 2009 zwischen dem amerikanischen Iridium-33-Satelliten und dem russischen Kosmos-2251-Satelliten statt. Hierbei entstanden nachweislich über 2.200 neue Teilchen von Weltraumschrott, welche sich mit der Zeit auf verschiedene Umlaufbahnen um die Erde verteilen.

Abhängig von der Entfernung eines die Erde umkreisenden Teilchens lässt sich jeweils eine unterschiedliche Aufenthaltsdauer in der Erdumlaufbahn beobachten. Bei einem durchschnittlichen Abstand von bis zu 600km zur Erde ist zu erwarten, dass es innerhalb weniger Jahre zu einem Wiedereintritt in die Erdatmosphäre kommt. Bei 800km Abstand dauert es bereits Jahrzehnte und ab 1000km ein oder mehrere Jahrhunderte bis die Erdumlaufbahn wieder verlassen wird.

Ungefähr zwei Drittel des, die Erde umkreisenden, Weltraummülls befindet sich auf den für wirtschaftliche und wissenschaftliche Zwecke wichtigen, erdnahen Umlaufbahnen unterhalb 2.000km Höhe und bilden speziell dort eine große Kollisionsgefahr für die momentan aktiv genutzten Satelliten. Auch die ISS¹ ist regelmäßig einer solchen Gefahr ausgesetzt und musste zuletzt am 28.01.2013 ein Ausweichmanöver durchführen um einer Kollision mit Weltraumschrott zu entgehen.

In den erdnahen Orbits beträgt die durchschnittliche Relativgeschwindigkeit zwischen einem Teilchen an Weltraummüll und einem weiteren Objekt ca. 10km/s. Demnach verursachen selbst kleinste Partikel von nur einem Millimeter Durchmesser im Falle einer Kollision große Schäden an Satelliten und können im schlimmsten Fall dessen Funktionalität schwerwiegend beeinträchtigen.

Jeder Kollisionen von Weltraummüll mit aktiven Satelliten oder anderem Weltraummüll führt zu einer Vervielfachung von diesem, sodass ein exponentielles Wachstum an Weltraumschrott zu beobachten ist. Selbst wenn keine weiteren Weltraummissionen mehr durchgeführt werden würden, würde der Weltraummüll weiterhin stark anwachsen.

¹engl.: International Space Station

Ein aktives Entfernen von Weltraumschrott aus der Erdumlaufbahn und die Vermeidung von unnötigem neuen Müll ist folglich zwingend notwendig. Eine Möglichkeit diesen zu beseitigen ist das sogenannte Rendezvous und Docking. Hierbei wird an das jeweilige Objekt angenähert und angekoppelt um dieses anschließend zu einem kontrollierten Wiedereintritt in die Erdatmosphäre zu bringen. Dabei verglüht der Großteil des Objekts. Da speziell bei großen Trümmerteilen Überreste auf der Erdoberfläche landen können, sollte der Wiedereintritt stets so berechnet werden, dass dieser über unbewohntem Gebiet, wie den großen Ozeanen, der Russischen Tundra oder dem Australischen Outback stattfindet. Alternativ können die Objekte auch auf weit entfernte, ungenutzte Umlaufbahnen in einer Höhe von über 38.000km über der Erde gebracht werden.

Sollten diese unkontrolliert umherfliegenden Objekte nicht nach und nach aktiv aus dem Weltall beseitigt werden, wird in Zukunft die Überhandnahme an Weltraumschrott große Probleme bereiten und die Raumfahrt bzw. allgemein die Nutzung des Weltraums stark einschränken oder gar unmöglich machen.

Die Thematik ein steuerbares Objekt an ein sich unkontrolliert im Weltall bewegendes Objekt anzunähern und anzudocken ist also offensichtlich höchst brisant und eine Herausforderung, die so schnell wie möglich bewältigt werden muss. Im Folgenden soll diese, als Rendezvous und Docking bekannte, Vorgehensweise genauer beschrieben werden.

1.1. Übersicht Rendezvous und Docking

1.1.1. Allgemeines Rendezvous und Docking

Beim Rendezvous und Docking, kurz R&D, zwischen zwei Satelliten, bzw. allgemeiner zwischen zwei Objekten im All, hat man in der Ausgangssituation zwei miteinander oder mit der Bodenstation kommunizierende Objekte. Eines dieser beiden, im Folgenden als Deputy bezeichnet, soll sich nun an das jeweils andere, als Chief benannte, Objekt annähern. Diesen Vorgang bezeichnet man als Rendezvous. Anschließend erfolgt eine mechanische Ankopplung, das sogenannte Docking, des Deputy an den Chief.

Bereits am 16.03.1966 fand das erste, jedoch noch manuell gesteuerte, Rendezvous und Docking von zwei Raumfahrzeugen im All statt. Hierbei dockte die Gemini-8-Kapsel, mit den Astronauten Neil Armstrong und David Scott als Besatzung, an ein unbemanntes Agena-Fahrzeug an.

Heute ist selbst das autonome Rendezvous und Docking schon fast zu einem Standardmanöver geworden, wobei das allgemeine R&D noch immer viele Risiken birgt. Aus sicherheitstechnischen Gründen besteht daher auch beispielsweise beim Andocken eines Raumfahrzeugs an die bemannte Raumstation ISS für die Astronauten immer die Möglichkeit das Raumfahrzeug von der ISS aus komplett selbst zu steuern. Falls nötig können sie das Rendezvous- und Docking-Manöver auch komplett abbrechen.

Das letzte autonome Rendezvous- und Docking-Manöver im All fand am 15.06.2013 statt, als sich der unbemannte europäische Raumtransporter ATV-4², mit dem Namen „Albert Einstein“, an die ISS angekoppelt hat. Der Vorgang wurde vollautomatisch durchgeführt, jedoch zur Sicherheit zusätzlich von der Besatzung der ISS überwacht, sodass diese im Notfall hätte eingreifen und die Steuerung übernehmen können. Für den letzten Abschnitt des R&D sendete das ATV Albert Einstein Laser-Impulse zur ISS, welche dort mit Hilfe von Reflektoren wieder zurück zum ATV geleitet wurden. Abhängig von der Zeitdifferenz zwischen Senden und Empfangen eines Laserimpulses wurden Distanz und Relativgeschwindigkeit berechnet. Der entsprechende Sensor am ATV bestimmte außerdem den Winkel, in welchem sich die ISS zu ihm befand. Ab einer Entfernung von 50m erfolgte die Navigation dann mittels eines Videosystems.

Das Rendezvous und Docking kann dazu verwendet werden die Lebensdauer eines Satelliten zu verlängern, indem man beispielsweise dessen Treibstoff mit Hilfe eines anderen Raumfahrzeugs wieder auffüllt oder kleinere Reparaturen durchführt. Auf diese Weise kann die Menge an neu produziertem Weltraummüll deutlich reduziert werden. Außerdem werden R&D-Ansätze bereits bei Versorgungsflügen zur ISS oder bei der Montage und Wartung sehr großer Objekte im All, wie dem Hubble-Weltraumteleskop, angewandt. Entsprechend dem vorherigen Abschnitt ist jedoch von besonderem Interesse auch bereits existierenden Weltraumschrott, wie beispielsweise ausgediente Satelliten, wieder einzusammeln. Dies lässt sich ebenfalls mit Hilfe des Rendezvous und Docking realisieren. Da speziell erdnahe, polare Umlaufbahnen zum Beispiel für die Erdbeobachtung und entferntere, geostationäre Umlaufbahnen in einer Höhe von bis zu 36.000km beispielsweise für die globale Kommunikation und zur Wettervorhersage besonders wichtig sind, sollte dort mit der Entfernung des Weltraummülls begonnen werden.

1.1.2. Nicht-kooperatives Rendezvous und Docking

Von besonderem Interesse in der aktuellen Weltraumforschung ist jedoch ein spezielles Konzept des autonomen Rendezvous und Docking: das nicht-kooperative, autonome Rendezvous und Docking. Dieses lässt sich analog dem allgemeinen R&D definieren, jedoch mit dem Zusatz, dass das Zielobjekt nun nicht-kooperativ ist. Dies bedeutet, das Zielobjekt ist passiv und leistet während des gesamten Manövers keine Unterstützung. Es besteht folglich insbesondere im letzten Abschnitt des Annäherns und Ankoppelns die Schwierigkeit, dass sich das Objekt nicht aktiv an der Navigation beteiligt und somit alternative Navigationstechniken zu GPS oder am Zielobjekt angebrachten Laser reflektierenden Spiegelsystemen verwendet werden müssen. Außerdem besitzt das Zielobjekt im Allgemeinen keine definierte Lage, d.h. es taumelt gegebenenfalls und stellt dadurch eine noch größere Herausforderung dar.

Da es sich bei dem nicht-kooperativen Rendezvous und Docking um einen Spezialfall des allgemeinen Rendezvous und Docking handelt, besitzt es im Prinzip die gleichen Anwendungsbereiche wie das kooperative Pendant. Kann ein Objekt, an

²engl.: Automated Transfer Vehicle

welches angedockt werden soll, den Rendezvous- und Docking-Vorgang jedoch nicht aktiv unterstützen, so sind nur die entsprechenden nicht-kooperativen Konzepte anwendbar. Mit Hilfe des nicht-kooperativen Rendezvous und Docking lassen sich also deutlich mehr Objekte in Betracht ziehen als mit den kooperativen Techniken. Insbesondere für das Aufsammeln von Weltraummüll, wie ausgediente, defekte Satelliten, Trümmerteile oder Fragmente, ist speziell nicht-kooperatives R&D nötig.

Das aktuellste deutsche Forschungsprojekt zu diesem Thema ist DEOS³. Bei diesem geht es insbesondere um nicht-kooperative Satelliten in erdnahen Umlaufbahnen, welche mit einem Greifarm eingefangen und anschließend gezielt zum Wiedereintritt in die Erdatmosphäre gebracht werden sollen. Per Definition besteht keine Kommunikationsverbindung zu einem nicht-kooperativen Satelliten und somit kann dieser Satellit weder GPS-Signale empfangen bzw. verarbeiten, noch Informationen darüber an ein anderes Raumfahrzeug weiterleiten. Demnach können keine relativen GPS-Daten für die Navigation beim nicht-kooperativen R&D verwendet werden. Anstelle eines relativen GPS werden hier also Kameras und Laserscanner zur Navigation eingesetzt.

Nicht-kooperatives Rendezvous und Docking ist ein vielversprechendes, aktuelles Forschungsgebiet mit vielen Anwendungsbereichen, wie beispielsweise das Annähern und Andocken an sich unkontrolliert bewegende Objekte im All.

In dieser Arbeit soll nun ein spezieller Algorithmus untersucht werden, mit welchem in diesem Zusammenhang optimale Trajektorien, d.h. optimale Bahnkurven, bestimmt werden können.

1.2. Motivation

Der in dieser Arbeit beschriebene Simplizialalgorithmus eignet sich besonders gut zur Bestimmung optimaler Trajektorien für das Rendezvous- und Docking-Szenario, da für diesen, im Gegensatz zu den meisten anderen indirekten Verfahren, keine vorab Informationen nötig sind. In der Realität sind diese meist auch nicht vorhanden, weshalb der Simplizialalgorithmus hier einen entscheidenden Vorteil bietet. Ausgehend von den für das Szenario formulierten Bewegungsgleichungen und Umformungen entsprechend der Problemstellung lässt sich dieser Algorithmus direkt anwenden.

1.3. Ziel

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist die detaillierte Beschreibung und Implementierung des Simplizialalgorithmus. Hierbei soll speziell auch dargestellt werden, wie ein Optimalsteuerungsproblem, beispielsweise die Trajektorienbestimmung beim Rendezvous und Docking, umgeformt werden kann, sodass der vorgestellte Simplizialalgorithmus auf die Problemstellung anwendbar ist.

³Deutsche Orbitale Servicing Mission

1.4. Aufbau

Das folgende Kapitel 2 beginnt mit einer kurzen Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen.

Hierbei werden zuerst gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben und Ordnung und Grad einer Differentialgleichung, sowie homogene und inhomogene Differentialgleichungen definiert. Anschließend werden Aussagen zur Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung getroffen und Anfangs- und Randwertprobleme, sowie Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen vorgestellt. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden dann partielle Differentialgleichungen beschrieben.

Im 3.Kapitel wird die Relativbewegung zweier Satelliten untersucht.

Dies beginnt mit einer allgemeinen Systembeschreibung und anschließender Herleitung der Bewegungsgleichungen für die Relativbewegung der beiden Satelliten. Abschließend wird die Relativbewegung an einem Beispiel mit MATLAB graphisch dargestellt.

In Kapitel 4 wird die Rendezvous- und Docking-Problematik als Optimalsteuerungsproblem betrachtet.

Hierzu werden erst Variationsprobleme allgemein beschrieben, welche dann zu Optimalsteuerungsproblemen erweitert werden. Ausgehend von den, im vorherigen Kapitel hergeleiteten, Bewegungsgleichungen folgt dann ein mathematisches Modell für die Dynamik der Relativbewegung beim Rendezvous und Docking. Dabei wird herausgestellt, dass es sich bei diesem, zusammen mit der Forderung nach Energie- oder Zeiteffizienz des Manövers, um ein Optimalsteuerungsproblem handelt. Im Anschluss daran werden mathematische Grundlagen zur Lösung eines solchen und zu den, für eine optimale Lösung notwendigen, Bedingungen aus dem Maximumprinzip von Pontryagin beschrieben. Unter Verwendung dieser Optimalitätsbedingungen wird dann allgemein ein Optimalsteuerungsproblem in ein Randwertproblem einer nichtlinearen Differentialinklusion 1. Ordnung transformiert. Dies wird im darauffolgenden Abschnitt speziell am Beispiel des, zuvor beschriebenen, Rendezvous- und Docking-Optimalsteuerungsproblems durchgeführt.

Kapitel 5 beginnt mit der Beschreibung einer Lösungsmethode für ein lineares Differentialgleichungssystem 1.Ordnung. Diese wird anschließend erweitert auf das Lösen eines Randwertproblems zu einem linearen Differentialgleichungssystems 1.Ordnung. Im darauf folgenden Abschnitt sind Lösungen eines Randwertproblems zu einem nichtlinearen Differentialinklusionssystem 1.Ordnung gesucht. Hierfür wird diese Problemstellung, unter Verwendung der vorherigen Lösungsmethoden, zu einem Fixpunktproblem eines mengenwertigen Operators umgeformt.

Um ein solches Fixpunktproblem zu lösen, also einen Fixpunkt zu dem entsprechenden mengenwertigen Operator zu bestimmen, wird hier ein sogenannter Simplicialalgorithmus verwendet. Dieser wird im nächsten Kapitel kurz umrissen. Anschließend werden die, für eine genauere Erklärung des Algorithmus nötigen, mathematischen

Grundlagen beschrieben. Dies beinhaltet Themen wie lineare oder affine Unabhängigkeit, Simplexes, Triangulationen, affine Funktionen, Pivotisierung, LP-Basen und Markierungen einer Triangulation.

In Kapitel 7 folgt dann eine detaillierte Beschreibung des Simplizialalgorithmus. Dies beginnt mit dem Hinzufügen einer künstlichen Dimension zu dem gegebenen Problem. Anschließend wird der eigentliche Algorithmus genau erklärt und mit Hilfe des sogenannten Door-in-Door-out Prinzips nochmals veranschaulicht. Im darauf folgenden Abschnitt werden wichtige Eigenschaften des Simplizialalgorithmus genannt, um speziell dessen Eignung für den hier betrachteten Anwendungsfall des Fixpunktproblems herauszustellen. Abschließend werden Vor- und Nachteile des Simplizialalgorithmus dargestellt.

Diese Diplomarbeit schließt mit Kapitel 8, dem Fazit und Ausblick auf mögliche zukünftige Erweiterungen.

Quellen dieses Kapitels waren Informationen aus [1], [2], [3], [4], [5], und [16] und [17].

Kapitel 2.

Grundlagen Differentialgleichungen

2.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung, kurz ODE¹, ist eine Gleichung der Form

$$f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad (2.1)$$

wobei $t \in [t_0, t_T]$ mit $t_0, t_T \in \mathbb{R}$ und $x(t) : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}$, $\dot{x}(t) : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}$, ..., $x^{(n)}(t) : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}$, sowie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ (i.d.R. offen) und $n \in \mathbb{N}$. Hierbei bezeichne $\dot{x}(t)$ die erste Ableitung von $x(t)$ nach der Zeit t , $\ddot{x}(t)$ die zweite Ableitung von $x(t)$ nach t und $x^{(n)}(t)$ die n -te Ableitung von $x(t)$ nach t . Dies bedeutet eine ODE ist eine Gleichung in welcher neben der unabhängigen Variable t und der gesuchten Funktion $x(t)$ auch mindestens eine Ableitung dieser Funktion nach der Variable t vorkommt. Die Funktion $x(t)$ stellt hier den Zustand des Systems dar und wird häufig als Zustandstrajektorie bezeichnet. Außerdem wird t meist als Zeit interpretiert. $x(t)$ gibt damit den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t an. Eine ODE beschreibt folglich das dynamische Verhalten des Zustandes $x(t)$, also den zeitlichen Verlauf der Zustandstrajektorie.

Gewöhnliche Differentialgleichungen können in expliziter oder in impliziter Form dargestellt werden, wobei sich nicht jede implizite Gleichung auch in eine explizite Gleichung umformen lässt. Als explizite ODE bezeichnet man eine nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöste ODE, d.h. eine Gleichung der Form

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)). \quad (2.2)$$

Eine ODE in der Darstellung 2.1 bezeichnet man dagegen als implizite ODE.

2.2. Ordnung und Grad einer Differentialgleichung

Gewöhnliche Differentialgleichungen können hinsichtlich ihrer Ordnung oder ihres Grades unterschieden werden. Die Ordnung einer Differentialgleichung entspricht hierbei der höchsten vorkommenden Ableitung der gesuchten Funktion $x(t)$. So trägt beispielsweise die ODE $3x^{(4)}(t) + \ddot{x}(t)x^7(t) + 2t = 0$ die Ordnung 4.

¹wegen engl. Ordinary Differential Equation

Als Grad einer ODE bezeichnet man die größte Summe der in einem Produkt auftretenden Potenzen von $x(t)$ und deren Ableitungen. Obiges Beispiel besitzt wegen $\ddot{x}^1(t)x^7(t)$ folglich den Grad 8. Ohne diesen Summanden hätte die Gleichung Grad 1, da $x^{(4)}(t)$ nur die Potenz 1 trägt. Gewöhnliche Differentialgleichungen ersten Grades nennt man linear.

2.3. Homogene und inhomogene Differentialgleichungen

Bei Differentialgleichungen unterscheidet man zwischen homogenen und inhomogenen Gleichungen. Homogene Differentialgleichungen besitzen ausschließlich Summanden bestehend aus einem Produkt mit $x(t)$ oder Ableitungen von $x(t)$ als Faktor, z.B. $3\ddot{x}(t)x(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$. Inhomogene Differentialgleichungen dagegen enthalten zusätzlich eine sogenannte Inhomogenität, in welcher nur Summanden aus einem Produkt von t oder Skalaren aus \mathbb{R} , also kein $x(t)$ bzw. Ableitungen von $x(t)$ vorkommen. $3\ddot{x}(t)x(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) + 7t + 8 = 0$ wäre ein Beispiel für eine inhomogene ODE, wobei $3\ddot{x}(t)x(t) + 2\dot{x}(t) + x(t)$ als homogener Anteil und $7t + 8$ als inhomogener Anteil bzw. als Inhomogenität bezeichnet wird. $3\ddot{x}(t)x(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$ nennt man auch die zu $3\ddot{x}(t)x(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) + 7t + 8 = 0$ gehörige homogene ODE.

2.4. Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung

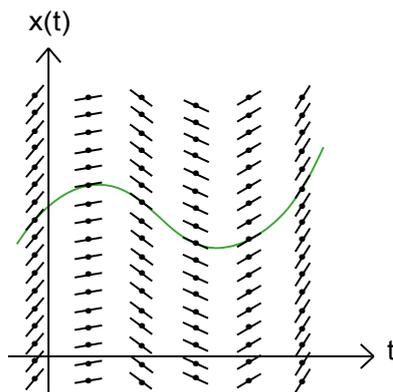
Sei $I = [t_0, t_T] \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $\hat{x}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar. Dann heißt $\hat{x}(t)$ Lösung der ODE 2.1, wenn

$$(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \dots, \hat{x}^{(n)}(t)) \in D \text{ und } f(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \dots, \hat{x}^{(n)}(t)) = 0 \text{ für alle } t \in I. \quad (2.3)$$

Eine konkrete Funktion $\hat{x}(t)$ ist also Lösung der ODE 2.1, wenn f für das komplette Intervall I identisch 0 ist, nachdem $\hat{x}(t)$ als $x(t)$ in f eingesetzt wurde.

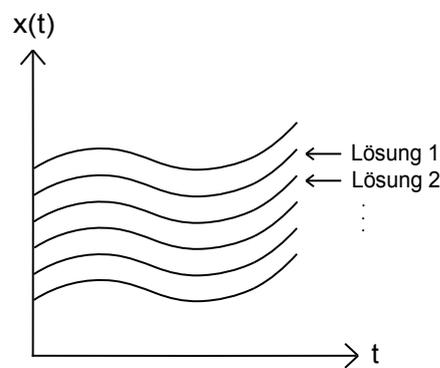
Explizite gewöhnliche ODEs mit stetiger rechter Seite sind im Allgemeinen immer lösbar.

Näherungslösungen zu expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen 1.Ordnung, d.h. zu Gleichungen der Form $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, lassen sich graphisch mit Hilfe sogenannter Richtungsfelder bestimmen. Hierbei werden Tripel der Form $(t, x(t), f(t, x(t)))$ mit $t \in [t_0, t_T] \subset \mathbb{R}$, $x : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : [t_0, t_T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als Linienelemente und die Menge aller möglichen Linienelemente als Richtungsfeld bezeichnet. Aus der Differentialgleichung lässt sich direkt ablesen, dass die Ableitung $\dot{x}(t)$ einer Lösungsfunktion $x(t)$ nach t , und damit die Steigung von $x(t)$ im Punkt t , genau $f(t, x(t))$ entsprechen muss. Um nun das Richtungsfeld zur gegebenen ODE zu erhalten, zeichnet man folglich in jedem zulässigen Punkt $(t, x(t))$ des Koordinatensystems einen kurzen Strich mit der, an diesem Punkt ausgewerteten, Steigung $f(t, x(t))$.

**Abb. 2.1.:** Richtungsfeld

Die Lösungskurven werden nun so gezeichnet, dass sie in jedem Punkt $(t, x(t))$ tangential zu dem dort eingezeichneten Strich sind, d.h. deren Steigung in diesem Punkt muss genau der Steigung des jeweiligen Striches entsprechen. Mit dieser Methode lassen sich zumindest für explizite ODEs 1.Ordnung Lösungen näherungsweise, ohne Integration oder kompliziertere Rechnung, schnell erkennen.

Meist gibt es zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung nicht nur genau eine Lösung, sondern eine Lösungsschar.

**Abb. 2.2.:** Lösungsschar

Hierbei wird die Anzahl der frei wählbaren Parameter der Lösung durch die Ordnung der gewöhnlichen Differentialgleichung vorgegeben. Bei einer ODE 2. Ordnung besitzt also die allgemeine Lösung genau zwei frei wählbare Parameter. Es besteht nun die Möglichkeit durch Hinzufügen weiterer Bedingungen die Lösungsschar auf eine eindeutige Lösung einzuschränken. Man unterscheidet hier Anfangswertprobleme und Randwertprobleme.

2.5. Anfangs- und Randwertprobleme

Bei Anfangswertproblemen, kurz AWP, gibt man zusätzlich zur ODE 2.1 die Werte von $x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ an der Stelle t_0 vor für $t \in [t_0, t_T]$. D.h. bei einer ODE n -ter Ordnung werden die n Werte

$$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \quad (2.4)$$

wobei $x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$, angegeben. Durch diese n Bedingungen sind nun die n zuvor frei wählbaren Parameter der Lösung festgelegt.

Durch die Wahl der Anfangswerte greift man sozusagen eine konkrete Lösung aus der Lösungsschar heraus. Bei dem folgenden Bild sei $x(t_0) = x_0$ vorgegeben und dadurch die markierte Lösung unter der eingezeichneten Lösungsschar die Lösung zu dem entsprechenden Anfangswertproblem.

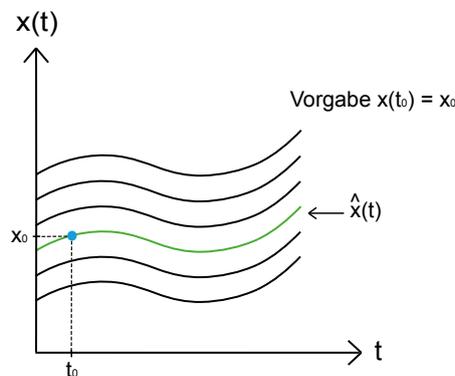


Abb. 2.3.: Lösung aus Lösungsschar

Eine Lösung $\hat{x}(t)$ des Anfangswertproblems muss also neben 2.3 auch die Bedingungen an die Anfangswerte erfüllen, d.h. es muss gelten

$$\hat{x}(t_0) = x_0, \hat{\dot{x}}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, \hat{x}^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (2.5)$$

Bei Randwertproblemen, kurz RWP, wird neben der ODE 2.1 der Funktionswert von $x(t)$ an verschiedenen Stellen vorgegeben, meist an den Rändern t_0 und t_T für $t \in [t_0, t_T]$. D.h.

$$x(t_0) = x_0 \text{ und } x(t_T) = x_T \quad (2.6)$$

mit $x_0, x_T \in \mathbb{R}$ werden angegeben. Da man also mindestens zwei verschiedene Werte vorgeben möchte und die Gleichung nicht überbestimmt sein soll, werden Randwertprobleme nur für gewöhnliche Differentialgleichungen ab 2. Ordnung (bzw. für Systeme 1. Ordnung mit mindestens zwei Gleichungen) formuliert. Bei ODEs 1. Ordnung hätte man nur einen frei wählbaren Parameter bei der Lösung, also eine Unbekannte, jedoch zwei Bedingungen und damit ein überbestimmtes Problem. Eine Lösung $\hat{x}(t)$ des Randwertproblems muss 2.3, sowie $\hat{x}(t_0) = x_0$ und $\hat{x}(t_T) = x_T$, also die Bedingungen auf den Rändern, erfüllen.

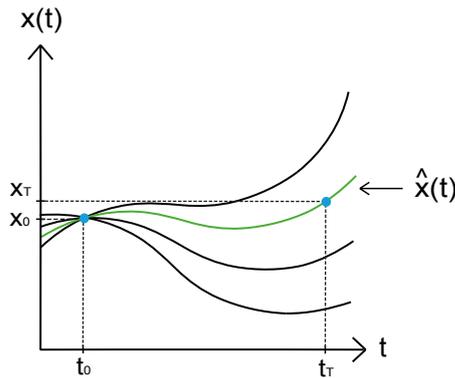


Abb. 2.4.: Lösung Randwertproblem

Auf obigem Bild sind die Randwerte eingezeichnet, die durch die Lösung erfüllt sein sollen. Es ist also nach einer Lösungskurve gesucht, welche durch die beiden markierten Punkte geht. Dadurch legt man die eingefärbte Lösung aus der Lösungsschar fest.

Natürlich sind nicht alle gewöhnliche Differentialgleichungen lösbar, speziell nicht wenn Anfangs- oder Randwerte ungünstig vorgegeben sind. Nur in den seltensten Fällen lässt sich eine analytische Lösung in expliziter Form bestimmen. Meist lassen sich ODEs höchstens numerisch lösen.

2.6. Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Explizite gewöhnliche Differentialgleichungen n -ter Ordnung lassen sich immer umwandeln in ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Diese Umwandlung erfolgt über Variablensubstitution.

Die ODE $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ wird hierbei durch die Substitution $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$, $x_3(t) = \ddot{x}(t), \dots, x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$ zu dem System

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{2.7}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t) \tag{2.8}$$

$$\vdots \tag{2.9}$$

$$\dot{x}_n(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \tag{2.10}$$

transformiert. Das resultierende explizite Differentialgleichungssystem 1. Ordnung hat folgende Form:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \tag{2.11}$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \tag{2.12}$$

$$\vdots \tag{2.13}$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \tag{2.14}$$

und lässt sich übersichtlicher in vektorieller Darstellung schreiben:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)), \quad (2.15)$$

wobei $t \in [t_0, t_T] \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{x} : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $f : [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Eine ODE in obiger Form 2.15 beschreibt das dynamische Verhalten des Zustandes $\mathbf{x}(t)$ und wird daher auch als Dynamik des Systems bezeichnet.

Gewöhnliche Differentialgleichungen n -ter Ordnung und Systeme von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung können hinsichtlich der Lösung im Prinzip als äquivalent angesehen werden. Löst $x(t) = \hat{x}(t)$ eine Gleichung n -ter Ordnung, so löst $\hat{\mathbf{x}}(t) = (\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \dots, \hat{x}^{(n-1)}(t))$ das zugehörige System aus n Gleichungen. Und löst $\hat{\mathbf{x}}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \dots, \hat{x}_n(t))$ ein Differentialgleichungssystem, so ist $\hat{x}(t) = \hat{x}_1(t)$ Lösung der entsprechenden Gleichung n -ter Ordnung.

Hat man ursprünglich ein Anfangswertproblem bzw. ein Randwertproblem mit gewöhnlicher Differentialgleichung n -ter Ordnung und wandelt diese in ein System 1. Ordnung um, so müssen die Anfangswerte bzw. die Randwerte ebenfalls transformiert werden. Statt $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$ sind bei einem Anfangswertproblem nun die Werte

$$x_1(t_0) = x_0, x_2(t_0) = \dot{x}_0, \dots, x_n(t_0) = x_0^{(n-1)}, \text{ also } \mathbf{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ \vdots \\ x_0^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

vorgegeben. Analoges gilt für Randwertprobleme. Anfangswertprobleme und Randwertprobleme lassen sich also entsprechend auf Differentialgleichungssysteme übertragen.

2.7. Partielle Differentialgleichungen

Neben den gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es auch die Klasse der partiellen Differentialgleichungen. Letztere unterscheiden sich von ODEs dadurch, dass nun in der Gleichung nicht nur Ableitungen der Funktion $x(t)$ nach der unabhängigen Variable t vorkommen, sondern auch Ableitungen nach den einzelnen Komponenten

$$\text{von } \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Um zu verdeutlichen, dass es sich bei einer Ableitung um eine partielle Ableitung handelt, wird im Folgenden bei der Angabe einer partiellen Ableitung das, bei normalen Ableitungen verwendete, „ d “ durch „ ∂ “ ersetzt. $\frac{dx(t)}{dt}$ zeigt eine Ableitung von $x(t)$ nach der unabhängigen Variable t an, $\frac{\partial x(t)}{\partial x_1}$ dagegen die partielle Ableitung von $x(t)$ nach ihrer Komponente x_1 .

Grundlage dieses Kapitels waren [10], [12], [26] und [28].

Kapitel 3.

Relativbewegung zweier Satelliten

In Folgenden soll die Relativbewegung zwischen zwei Satelliten untersucht werden. Dies beginnt mit einer allgemeinen Beschreibung des betrachteten Modells, der sogenannten Systembeschreibung. Anschließend werden Bewegungsgleichungen für die Relativbewegung der beiden Satelliten hergeleitet und in vektorieller Form als Differentialgleichung 1.Ordnung dargestellt. Abschließend wird die Relativbewegung an einem Beispiel mit MATLAB graphisch dargestellt.

3.1. Systembeschreibung

Betrachte zwei Raumfahrzeuge, Chief und Deputy, welche die Erde umkreisen. In den folgenden Abschnitten soll nun die Relativbewegung zwischen diesen beiden beschrieben werden. Als Koordinatensystem verwende hierbei, sofern nichts anderes erwähnt, das LVLH-Koordinatensystem¹ mit Ursprung im Chief (\hat{x} : vom Massenzentrum der Erde weg, \hat{z} : normal zur Umlaufbahnebene des Satelliten, positiv in Richtung Drehmomentvektor, \hat{y} : ergänzt zu rechtwinkligem, rechts-händischem, kartesischem Koordinatensystem):

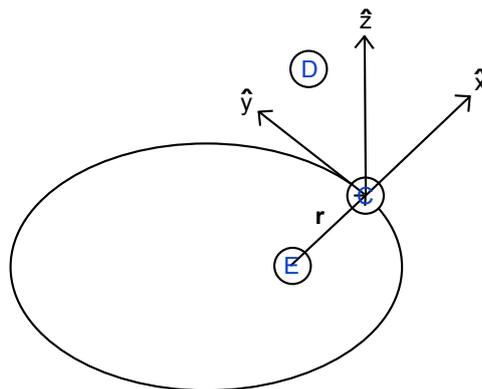


Abb. 3.1.: Chief C, Deputy D und Erde E im LVLH-Koordinatensystem

¹LVLH: Local Vertical Local Horizontal

Annahmen:

- Chief, Deputy und Erde seien einzige Körper im System
- Chief, Deputy und Erde seien Punktmassen
- Es gelte (Erdmasse \gg Chief-Masse) und (Erdmasse \gg Deputy-Masse)
- Chief- und Deputy-Orbit seien elliptisch
- Gravitationskraft der Erde sei einzige externe Kraft auf Chief und Deputy

3.2. Herleitung der Gleichungen zur Relativbewegung zweier Satelliten

Zu Beginn dieses Abschnittes soll das ECI-Koordinatensystem² mit Ursprung im Massenmittelpunkt der Erde verwendet werden (\hat{x} : vom Massenmittelpunkt der Erde in Richtung Frühlingspunkt, \hat{z} : normal zur Äquatorialebene, positiv in Richtung geographischem Nordpol, \hat{y} : ergänzt zu rechtwinkligem, rechts-händischem, kartesischem Koordinatensystem). Die Sonne trifft genau zwei mal im Jahr, jeweils im März und im September, auf die Schnittgerade von Äquatorialebene und mittlerer Erdumlaufbahn. Der entsprechende Tag im März wird als Frühlungstagundnachtgleiche bezeichnet. Der Frühlingspunkt ist dann definiert als ein fester Punkt im All, der auf jener Halbgeraden liegt, welche an diesem Tag vom Erdmittelpunkt durch den Mittelpunkt der Sonne geht.

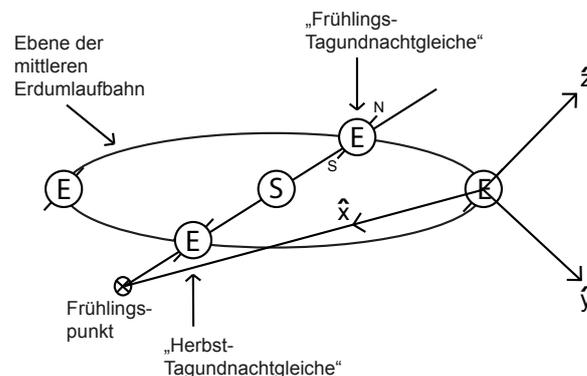


Abb. 3.2.: Frühlingspunkt und ECI-Koordinatensystem

Im Gegensatz zu dem zuvor beschriebenen, mit dem Satelliten rotierenden, LVLH-Koordinatensystem handelt es sich bei dem ECI-Koordinatensystem um ein Inertialkoordinatensystem, d.h. die Koordinatenachsen sind hinsichtlich der Fixsterne fest, rotieren also nicht.

²ECI: Earth Centered Inertial

Alle im Folgenden genannten Variablen seien abhängig von der Zeit t , was jedoch der kürzeren Schreibweise und Übersichtlichkeit wegen weggelassen wurde.

Unter obigen Annahmen lautet die Keplersche Bewegungsgleichung für Zweikörperprobleme mit einem Satelliten, der die Erde umkreist, nach [6] allgemein:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad (3.1)$$

wobei $\mu = 3,986 \cdot 10^5 \frac{km^3}{s^2}$, die geozentrische Gravitationskonstante, \mathbf{r} die Position des Satelliten im ECI-Koordinatensystem, also den Vektor von Erde zu Satellit, und $r = |\mathbf{r}|_2$ den Abstand des Satelliten zur Erde bezeichnet.

Für die Bewegungsgleichung des Chief bzw. des Deputy gilt also:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\frac{\mu \mathbf{r}_0}{r_0^3} \text{ bzw. } \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{\mu \mathbf{r}_1}{r_1^3}, \quad (3.2)$$

wobei sich der Index 0 auf den Chief und der Index 1 auf den Deputy bezieht.

Sei $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ der Vektor von Chief zu Deputy, also die Position des Deputy relativ zum Chief:

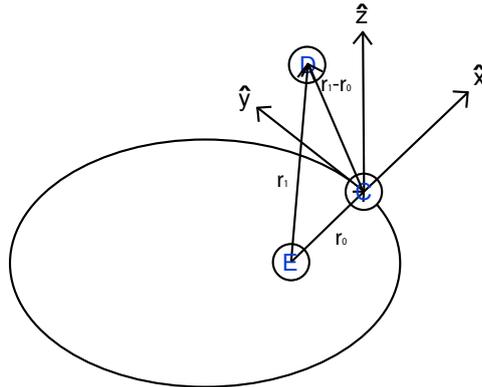


Abb. 3.3.: Relativposition $r_1 - r_0$ des Deputy im LVLH-Koordinatensystem bzw. Position r_1 des Deputy im ECI-Koordinatensystem

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\rho}} &= \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_0 \\ &= -\frac{\mu \mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\mu \mathbf{r}_0}{r_0^3} \\ &= -\frac{\mu \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|_2^3} + \frac{\mu \mathbf{r}_0}{r_0^3} \\ &= -\frac{\mu \mathbf{r}_1}{|\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_0|_2^3} + \frac{\mu \mathbf{r}_0}{r_0^3}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Transformiert man diese Gleichung nun in das LVLH-Koordinatensystem, so erhält man nach [6], zusammen mit den Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten, die

folgenden Gleichungen für die Relativbewegung der beiden Satelliten:

$$\ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x = -\frac{\mu(r+x)}{[(r+x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{r^2} \quad (3.4)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y = -\frac{\mu y}{[(r+x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.5)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu z}{[(r+x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.6)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \quad (3.7)$$

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r^2}, \quad (3.8)$$

wobei

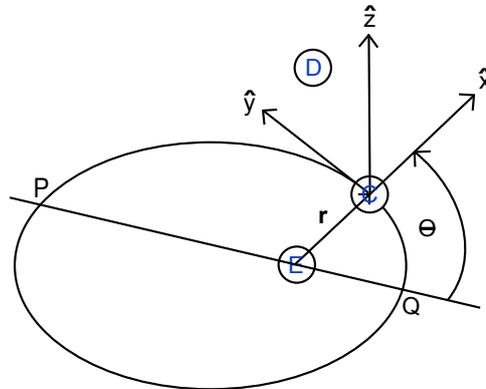


Abb. 3.4.: Relativbewegung des Deputy D im LVLH-Koordinatensystem

x Abstand des Deputy zum Koordinatenursprung (bzw. zum Chief) in \hat{x} -Richtung,

y Abstand des Deputy zum Koordinatenursprung in \hat{y} -Richtung,

z Abstand des Deputy zum Koordinatenursprung in \hat{z} -Richtung,

θ Argument of latitude des Chief (Winkel zwischen einer Referenzgerade PQ, welche den Chief-Orbit an den festen Punkten P und Q schneidet und durch die Erde geht, und der \hat{x} -Achse),

r Abstand des Chief zum Massenmittelpunkt der Erde ($r = r_0$ der kürzeren Schreibweise wegen),

\dot{x} Geschwindigkeit des Deputy in \hat{x} -Richtung (Relativgeschwindigkeit zwischen Chief und Deputy in \hat{x} -Richtung),

\dot{y} Geschwindigkeit des Deputy in \hat{y} -Richtung,

$\dot{\theta}$ Winkelgeschwindigkeit um θ ,

\dot{r} Geschwindigkeit des Chief in Richtung r ,

\ddot{x} Beschleunigung des Deputy in \hat{x} -Richtung (Relativbeschleunigung zwischen Chief und Deputy in \hat{x} -Richtung),

\ddot{y} Beschleunigung des Deputy in \hat{y} -Richtung,

\ddot{z} Beschleunigung des Deputy in \hat{z} -Richtung,

$\ddot{\theta}$ Winkelbeschleunigung um θ ,

\ddot{r} Beschleunigung des Chief in Richtung r .

Dies lässt sich umformen zu:

$$\ddot{x} = 2\dot{\theta}\dot{y} + \ddot{\theta}y + \dot{\theta}^2x - \frac{\mu(r+x)}{[(r+x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{r^2} \quad (3.9)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{\theta}\dot{x} - \ddot{\theta}x + \dot{\theta}^2y - \frac{\mu y}{[(r+x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.10)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu z}{[(r+x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.11)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \quad (3.12)$$

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r^2}. \quad (3.13)$$

Dieses System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung wird nun umgewandelt in ein System von zehn gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$x_1 = x \quad \dot{x}_1 = x_6 \quad (3.14)$$

$$x_2 = y \quad \dot{x}_2 = x_7 \quad (3.15)$$

$$x_3 = z \quad \dot{x}_3 = x_8 \quad (3.16)$$

$$x_4 = \theta \quad \dot{x}_4 = x_9 \quad (3.17)$$

$$x_5 = r \quad \dot{x}_5 = x_{10} \quad (3.18)$$

$$x_6 = \dot{x} \quad \dot{x}_6 = 2x_9x_7 - \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_2 + x_9^2x_1 - \frac{\mu(x_5 + x_1)}{[(x_5 + x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{x_5^2} \quad (3.19)$$

$$x_7 = \dot{y} \quad \dot{x}_7 = -2x_9x_6 + \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_1 + x_9^2x_2 - \frac{\mu x_2}{[(x_5 + x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.20)$$

$$x_8 = \dot{z} \quad \dot{x}_8 = -\frac{\mu x_3}{[(x_5 + x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.21)$$

$$x_9 = \dot{\theta} \quad \dot{x}_9 = -\frac{2x_{10}x_9}{x_5} \quad (3.22)$$

$$x_{10} = \dot{r} \quad \dot{x}_{10} = x_5x_9^2 - \frac{\mu}{x_5^2} \quad (3.23)$$

\implies System von 10 nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

Diese nichtlinearen Gleichungen beschreiben die Relativbewegung der beiden Satelliten, bzw. genauer die Bewegung des Deputy im LVLH-Frame mit Ursprung im Chief, also die Bewegung des Deputy relativ zum Chief.

Mit $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10})^T$ lässt sich dieses Gleichungssystem auch in vektorieller Form als

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)) \quad (3.24)$$

darstellen, siehe 2.15.

Die entsprechende Vektor-Differentialgleichung 1.Ordnung zur Beschreibung der Relativbewegung zweier Satelliten lautet damit:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ 2x_9x_7 - \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_2 + x_9^2x_1 - \frac{\mu(x_5+x_1)}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{x_5^2} \\ -2x_9x_6 + \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_1 + x_9^2x_2 - \frac{\mu x_2}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{\mu x_3}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{2x_{10}x_9}{x_5} \\ x_5x_9^2 - \frac{\mu}{x_5^2} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

3.3. Modellierung der Relativbewegung zweier Satelliten an einem Beispiel in MATLAB

Betrachte ein Beispiel entsprechend der Systembeschreibung aus Abschnitt 3.1. Der Chief befinde sich auf einem elliptischen Orbit und es gelten die folgenden normierten³ Anfangsbedingungen aus [6]:

$x(0) = -0,01127$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0,1$, $\theta(0) = 0$, $r(0) = 0,9$, $\dot{x}(0) = 0,02$, $\dot{y}(0) = 0,02$, $\dot{z}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 1,22838$, $\dot{r}(0) = 0$. Aufgrund der Normierung gilt für die Gravitationskonstante $\mu = 1$.

Verwendet man nun die eben hergeleitete Gleichung 3.25 mit diesen Anfangswerten und löst mittels der in MATLAB vordefinierten Funktion `ode45`, so lassen sich direkt folgende Plots für die Bewegung des Deputy relativ zum Chief erzeugen:

³Positionen wurden durch die Länge der großen Halbachse a und Winkelgeschwindigkeiten durch $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ normiert

3.3. Modellierung der Relativbewegung zweier Satelliten an einem Beispiel in MATLAB

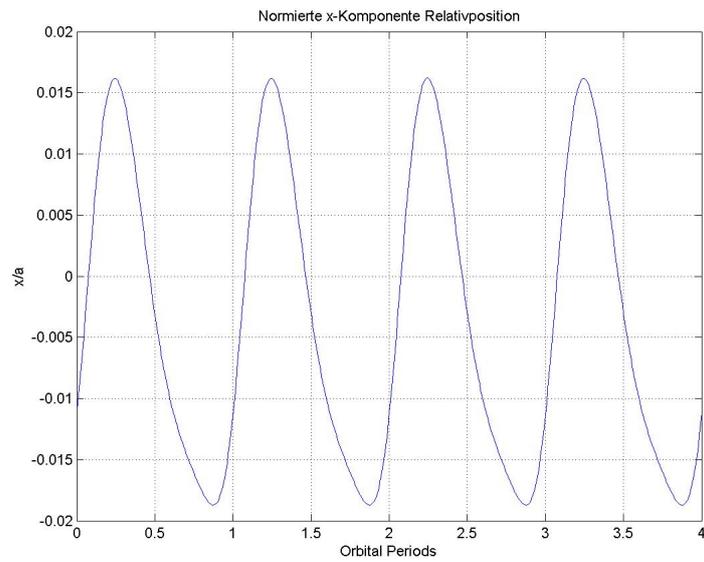


Abb. 3.5.: Zeitlicher Verlauf der normierten x-Position des Deputy relativ zum Chief

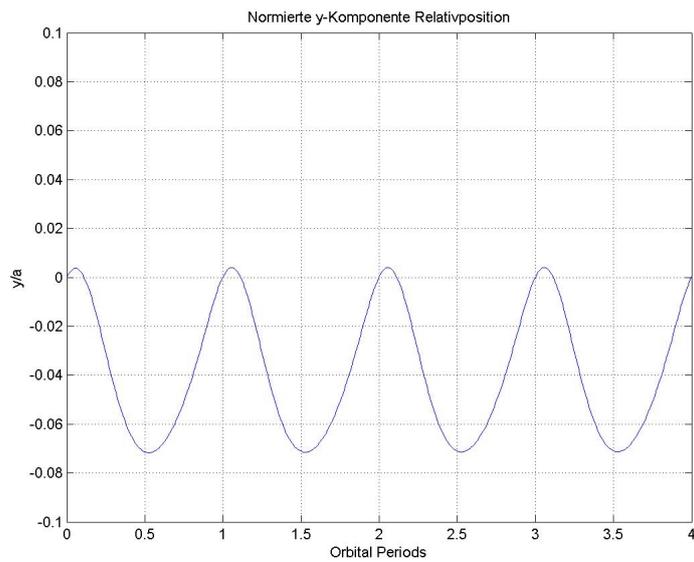


Abb. 3.6.: Zeitlicher Verlauf der normierten y-Position des Deputy relativ zum Chief

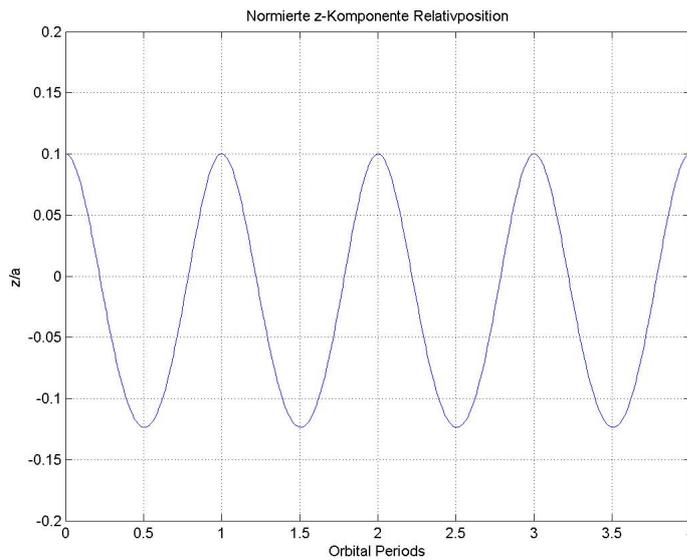


Abb. 3.7.: Zeitlicher Verlauf der normierten z-Position des Deputy relativ zum Chief

In den ersten drei Bildern wurden auf der Abszissenachse die Orbital Periods, also t/T_{norm} mit $T_{norm} = 2\pi$, und auf der Ordinatenachse die durch die Länge der großen Halbachse a normierte x- bzw. y- bzw. z-Position des Deputy relativ zum Chief, also x/a bzw. y/a bzw. z/a , abgetragen. In den vier folgenden Bildern wurden die normierte x- gegen die normierte y-Position des Deputy (relativ zum Chief) bzw. die normierte x- gegen die normierte z-Position des Deputy bzw. die normierte y- gegen die normierte z-Position des Deputy bzw. die normierte x- gegen die normierte y- gegen die normierte z-Position des Deputy geplottet.

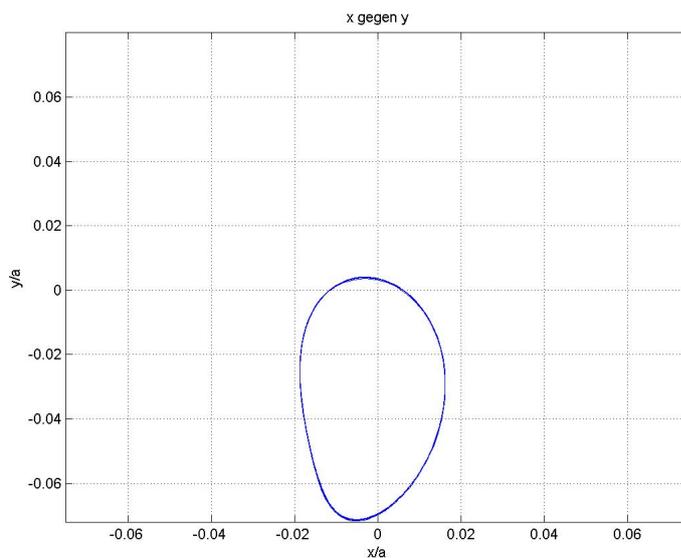


Abb. 3.8.: Normierte x-Position gegen normierte y-Position

3.3. Modellierung der Relativbewegung zweier Satelliten an einem Beispiel in MATLAB

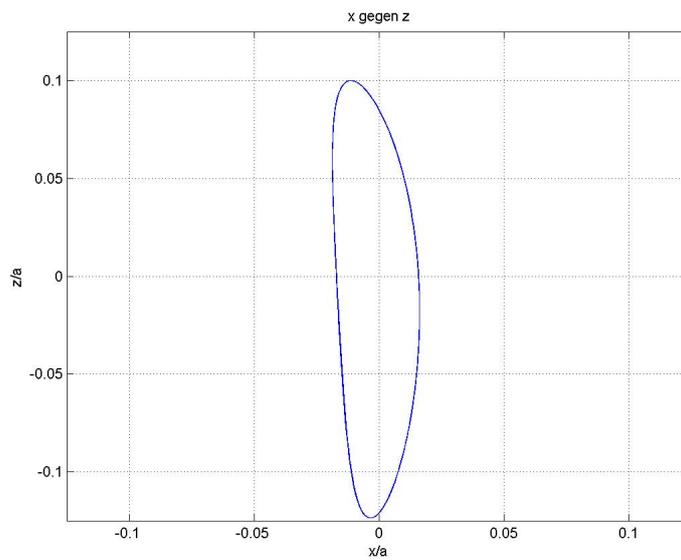


Abb. 3.9.: Normierte x-Position gegen normierte z-Position

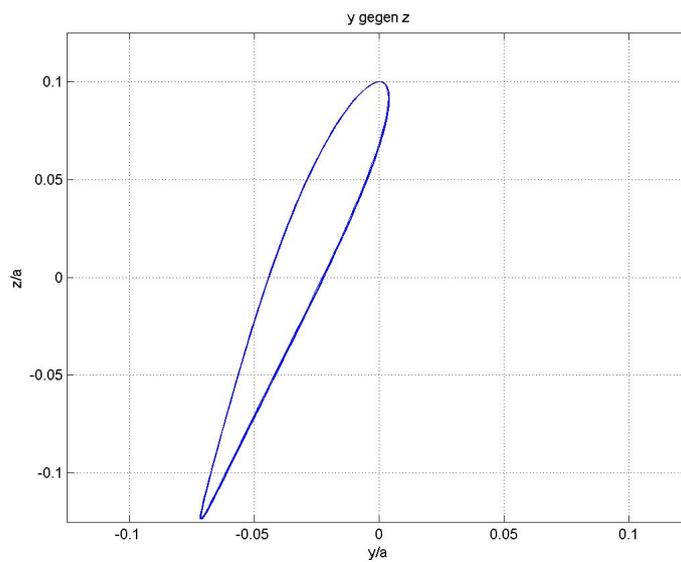


Abb. 3.10.: Normierte y-Position gegen normierte z-Position

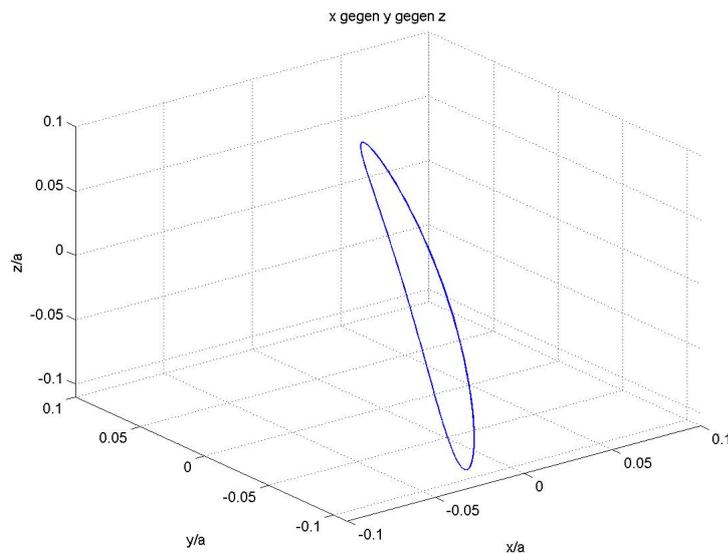


Abb. 3.11.: Normierte x-Position gegen normierte y-Position gegen normierte z-Position

In diesem Abschnitt wurde die Relativbewegung zweier Satelliten an einem normierten Beispiel modelliert. Das zugehörige nicht-normierte Beispiel findet sich im Anhang B.

Wie leicht auf den jeweils ersten drei Plots hier und im Anhang B zu erkennen ist, war die Relativbewegung in beiden Beispielen beschränkt. Dies lässt sich auf eine günstige Wahl der Anfangswerte zurückführen. Allgemein ist die Relativbewegung jedoch nicht beschränkt. Schon eine kleine Veränderung an einem der Anfangswerte kann zu einer unbeschränkten Relativbewegung führen. Ziel beim Rendezvous und Docking ist es, dass die Relativbewegung, also die relative x-, y- und z-Position des Deputy, beschränkt ist und jeweils speziell gegen 0 geht.

Die entsprechenden MATLAB m-files zu den Plots aus diesem Kapitel und dem Anhang befinden sich auf der beigefügten CD.

Für dieses Kapitel wurden Informationen aus [6], [14] und [20] verwendet.

Kapitel 4.

Rendezvous und Docking als Optimalsteuerungsproblem

Im folgenden Kapitel wird allgemein ein Optimalsteuerungsproblem in ein Randwertproblem eines nichtlinearen Differentialinklusionssystems 1.Ordnung transformiert und anschließend am Beispiel des, als energie- oder zeitminimal geforderten, R&D-Szenarios zwischen zwei Satelliten veranschaulicht.

Dies beginnt mit einer kurzen Einführung zu Variationsproblemen, welche anschließend auf Optimalsteuerungsprobleme erweitert werden. Ausgehend von den, im vorherigen Kapitel hergeleiteten, Bewegungsgleichungen für die Relativbewegung zwischen zwei Satelliten wird dann die Dynamik der gesteuerten Relativbewegung mit den, entsprechend dem Rendezvous- und Docking-Problem aufgestellten, Randbedingungen formuliert. Dieses, aus der R&D-Problematik resultierende, Randwertproblem wird zusammen mit der Forderung nach Energie- oder Zeiteffizienz des Manövers als Optimalsteuerungsproblem betrachtet. Unter Verwendung der, aus dem sogenannten Maximumprinzip von Pontryagin folgenden, notwendigen Bedingungen für eine optimale Lösung eines Optimalsteuerungsproblems wird dieses anschließend in ein Randwertproblem einer nichtlinearen Differentialinklusion 1.Ordnung transformiert. Abschließend werden diese Zusammenhänge am Beispiel des bereits formulierten Rendezvous- und Docking- Optimalsteuerungsproblems exemplarisch durchgerechnet.

4.1. Variationsprobleme

Seien in diesem und dem darauf folgenden Abschnitt, falls nichts anderes erwähnt, $m, n, q, r \in \mathbb{N}$.

Variationsprobleme gehören zur Klasse der Optimierungsprobleme, wobei der zu bestimmende optimale Parameter hierbei nicht einfach ein Wert aus dem \mathbb{R}^n , sondern eine Funktion $\boldsymbol{x} : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $[t_0, t_T] \subset \mathbb{R}$ ist. Entsprechend dem Abschnitt 2.1 über Differentialgleichungen wird auch hier $\boldsymbol{x}(t)$ als Zustand bzw. Zustandstrajektorie bezeichnet. Eine Abbildung von einem Banachraum, d.h. einem vollständigen, normierten Vektorraum, in einen Banachraum nennt man allgemein einen Operator. Betrachtet man spezieller eine Abbildung von einem Banachraum nach \mathbb{R} , so spricht man von einem Funktional.

Ein Variationsproblem besitzt damit folgende vereinfachte Form:
 Minimiere das Funktional

$$F(\mathbf{x}(t)) := \int_{t_0}^{t_T} f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt \quad (4.1)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \text{ und } \mathbf{x}(t_T) = \mathbf{x}_T, \quad (4.2)$$

wobei $[t_0, t_T] \subset \mathbb{R}$ kompaktes, nicht-leeres Intervall mit $t_0 < t_T$, $t \in [t_0, t_T]$,
 $\mathbf{x} : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $[t_0, t_T]$ stetig differenzierbar, $f : [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und
 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^n$.

Hierbei können Nebenbedingungen auch als Gleichungen, Ungleichungen oder Integralgleichungen formuliert sein. Außerdem darf t mehrdimensional sein und f kann neben $\dot{\mathbf{x}}(t)$ auch noch weitere Ableitungen von $\mathbf{x}(t)$ nach t enthalten.

Bei Variationsproblemen ist also eine stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{x} : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gesucht, welche das Funktional F minimiert und die Randbedingungen $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}(t_T) = \mathbf{x}_T$ erfüllt.

Eines der bekanntesten Variationsprobleme ist das von Johann Bernoulli im Jahr 1696 gestellte sogenannte Brachistochrone-Problem¹. Hierbei soll zu zwei Punkten A, B auf einer vertikalen Ebene jener Weg gefunden werden, auf welchem ein beweglicher Punkt M , allein durch die Wirkung der Gravitationskraft, am schnellsten von dem höher gelegenen A zu dem tiefer gelegenen B gelangt. Anders als vielleicht im ersten Moment vermutet, ist hier, aufgrund der Gravitation, der kürzeste nicht unbedingt auch der schnellste Weg.

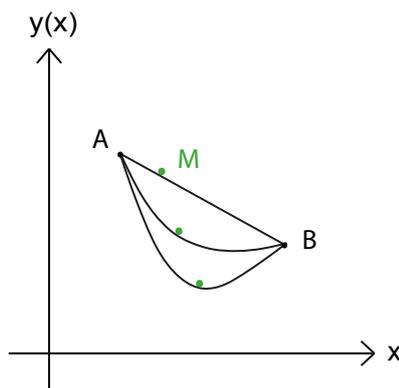


Abb. 4.1.: Brachistochrone-Problem

¹griech.: $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\omicron\xi \triangleq$ kürzeste, $\chi\rho\omicron\nu\omicron\xi \triangleq$ Zeit

4.2. Optimalsteuerungsprobleme

Optimalsteuerungsprobleme erweitern Variationsprobleme, indem zusätzlich zu dem Zustand $\mathbf{x}(t)$ auch eine Steuerung $\mathbf{u}(t)$ in der Formulierung des zu lösenden Problems vorkommt. Diese beeinflusst das, durch die ODE gegebene, dynamische Verhalten des Zustandes $\mathbf{x}(t)$.

Ein Optimalsteuerungsproblem besitzt allgemein folgende vereinfachte Form:
Minimiere die Zielfunktion

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_T} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (4.3)$$

unter der ODE-Nebenbedingung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \text{ fast überall auf } [t_0, t_T], \quad (4.4)$$

den Randbedingungen

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x}(t_0)) &= \vec{0} \\ l(\mathbf{x}(t_T)) &= \vec{0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

und der Beschränkung der Steuerung

$$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{U} \text{ fast überall auf } [t_0, t_T], \quad (4.6)$$

wobei $[t_0, t_T] \subset \mathbb{R}$ kompaktes, nicht-leeres Intervall mit $t_0 < t_T < \infty$, $t \in [t_0, t_T]$, $\mathbf{x} : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $[t_0, t_T]$ stetig differenzierbar, $\mathbf{u} : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf $[t_0, t_T]$ stetig, $f : [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und bezüglich 2-ter bis (n+1)-ter Komponente, also bezüglich der \mathbf{x} -Komponenten, stetig partiell differenzierbar, $g : [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich 2-ter bis (n+1)-ter Komponente stetig partiell differenzierbar, $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ stetig partiell differenzierbar, $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ stetig partiell differenzierbar, $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ sogenannter Steuerbereich ist.

Die Nebenbedingung 4.4 entspricht hier offensichtlich der Dynamik des Systems, da durch die ODE gerade das dynamische Verhalten des zu bestimmenden Zustandes $\mathbf{x}(t)$ beschrieben wird. Im späteren R&D-Beispiel wird diese ODE-Nebenbedingung die Relativbewegung zwischen den beiden betrachteten Objekten, also den eigentlichen Kern des Systems, widerspiegeln.

Die Zielfunktion 4.3 kann gegebenenfalls um einen Summanden $h(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_T))$ mit $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend glatt, erweitert sein. Zusätzlich können auch Beschränkungen des Zustandes $\mathbf{x}(t)$ oder kombinierte Steuer-Zustandsbeschränkungen enthalten sein. Außerdem kann die Nebenbedingung 4.4 als partielle Differentialgleichung statt als ODE formuliert sein.

Gesucht ist hierbei also eine optimale Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ und eine optimale Steuerung $\mathbf{u}(t)$, sodass für das Paar $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ die Zielfunktion J minimal ist und alle geforderten Nebenbedingungen, Randbedingungen und Beschränkungen erfüllt sind.

Abhängig von der Zielfunktion 4.3 differenziert man zwischen einem Bolza-, Mayer- oder Lagrange-Problem, wobei diese durch Umformungen jeweils ineinander überführt werden können. Bei einem Bolza-Problem sind $h, f \neq 0$, bei einem Mayer-Problem gilt $h \neq 0$ und $f \equiv 0$ und ein Lagrange-Problem hat $h \equiv 0$ und $f \neq 0$. Im Folgenden werden wir uns speziell auf als Lagrange-Probleme formulierte Aufgabenstellungen konzentrieren.

Bei der Lösung von Optimalsteuerungsproblemen unterscheidet man zwischen direkten und indirekten Methoden. Letztere transformieren notwendige Optimalitätsbedingungen für die Lösungen, z.B. aus dem später beschriebenen Maximumprinzip von Pontryagin, in numerisch zu lösende Randwertprobleme. Meist liefert dies jedoch nur ein mögliches Optimum, welches gegebenenfalls noch mittels hinreichender Bedingungen überprüft werden muss. Bei direkten Methoden dagegen wird das Problem diskretisiert und anschließend mit Hilfe von Methoden der nichtlinearen Optimierung gelöst. Hierbei ist auch zu überprüfen ob notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für ein Optimum erfüllt sind und ob die Lösungen gegen die Lösung des nicht-diskretisierten Ursprungsproblems konvergieren.

Betrachte nun vor diesem Hintergrund das Rendezvous- und Docking-Szenario zwischen zwei Satelliten, Chief und Deputy, in einer Umgebung entsprechend der Systembeschreibung 3.1 aus dem vorherigen Kapitel. Hierbei soll sich der Deputy so weit an den Chief annähern, dass er sich mechanisch direkt an diesen ankoppeln könnte. Außerdem sei gefordert, dass dieser Vorgang möglichst energieeffizient oder möglichst schnell durchgeführt wird.

4.3. Mathematisches Modell für die Dynamik der Relativbewegung beim R&D

Alle im folgenden Abschnitt genannten Komponenten $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, u_x, u_y, u_z, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9$ und p_{10} seien abhängig von der Zeit t , was jedoch der kürzeren Schreibweise und Übersichtlichkeit wegen weggelassen wurde.

Betrachte den Zustand $\mathbf{x}(t) = (x, y, z, \theta, r, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{r})^T$ mit den Komponenten siehe Abschnitt 3.2

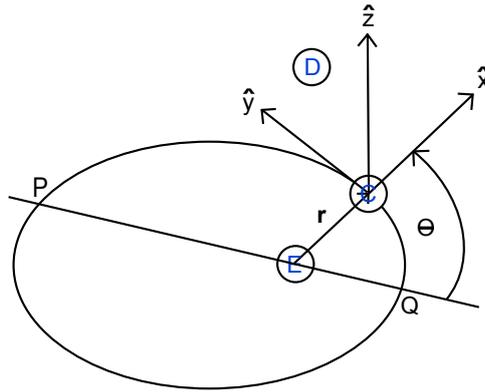


Abb. 4.2.: Relativbewegung des Deputy D im LVLH-Koordinatensystem

bzw. nach 3.14 - 3.23 in umgewandelter Form:

$$\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})^T. \quad (4.7)$$

Dann gilt, ausgehend von 3.24 und 3.25, für die Dynamik der gesteuerten Relativbewegung zwischen den beiden Satelliten:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (4.8)$$

mit $\mathbf{u}(t) = (u_x, u_y, u_z)^T$ Steuerung in \hat{x} -, \hat{y} - und \hat{z} -Richtung, d.h. konkret:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ 2x_9x_7 - \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_2 + x_9^2x_1 - \frac{\mu(x_5+x_1)}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{x_5} + u_x \\ -2x_9x_6 + \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_1 + x_9^2x_2 - \frac{\mu x_2}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + u_y \\ - \frac{\mu x_3}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + u_z \\ - \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_9 \\ x_5x_9^2 - \frac{\mu}{x_5} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Da sich der Deputy am Ende des Rendezvous- und Docking- Vorgangs, zum Zeitpunkt $t = t_T$, direkt am Chief, bzw. in unserem Fall in einem festen, geringen Abstand zum Chief, befinden und diese Position beibehalten soll, muss gelten:

$x(t_T) = d_x, y(t_T) = d_y, z(t_T) = d_z, \dot{x}(t_T) = 0, \dot{y}(t_T) = 0, \dot{z}(t_T) = 0$ bzw. hier nun $x_1(t_T) = d_x, x_2(t_T) = d_y, x_3(t_T) = d_z, x_6(t_T) = 0, x_7(t_T) = 0, x_8(t_T) = 0$.

Die Randbedingungen seien also:

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \\ x_4(t_0) \\ x_5(t_0) \\ x_6(t_0) \\ x_7(t_0) \\ x_8(t_0) \\ x_9(t_0) \\ x_{10}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \theta_0 \\ r_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{r}_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(t_T) = \begin{pmatrix} x_1(t_T) \\ x_2(t_T) \\ x_3(t_T) \\ x_4(t_T) \\ x_5(t_T) \\ x_6(t_T) \\ x_7(t_T) \\ x_8(t_T) \\ x_9(t_T) \\ x_{10}(t_T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \theta_T \\ r_T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_T \\ \dot{r}_T \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

wobei $x_0, y_0, z_0, \theta_0, r_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{\theta}_0, \dot{r}_0, \theta_T, r_T, \dot{\theta}_T, \dot{r}_T$ feste Werte bezeichnen und d_x, d_y und d_z feste, geringe Abstände zwischen Chief und Deputy in \hat{x} -, \hat{y} - bzw. \hat{z} -Richtung darstellen. Hierbei bezeichne $t = t_0$ den Ausgangszeitpunkt und $t = t_T$ den Zeitpunkt zu dem das Ziel erreicht, also das Rendezvous und Docking abgeschlossen ist.

Es sei angemerkt, dass die Differentialgleichung 4.9 nur allgemein die Relativbewegung, bzw. genauer die gesteuerte Relativbewegung, zwischen den beiden Satelliten beschreibt. Erst die Randbedingungen 4.10 beinhalten die wesentlichen Eigenschaften des Rendezvous und Docking. Das ursprüngliche R&D-Problem mit Chief und Deputy wird nun also durch das Randwertproblem 4.9 und 4.10 ausgedrückt.

Nun soll die Lösung $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ des Randwertproblems, also das Paar aus Zustandstrajektorie und Steuerung, so bestimmt werden, dass der Treibstoffverbrauch oder die benötigte Zeit t_T möglichst gering sind. D.h. $\int_t^{t_T} u_x + u_y + u_z dt$ oder $\int_t^{t_T} 1 dt$ sollen minimal sein. Beides zusammen würde sicherlich zu einem Trade-off führen da eine Lösung mit minimalem Treibstoffverbrauch meist eine lange Dauer mit sich bringt und eine Lösung mit minimaler benötigter Zeit meist einen hohen Treibstoffverbrauch bedeutet. Für die Lösung wird also ein Kompromiss nötig sein. Aus diesem Grund wurde entschieden hier speziell den Treibstoffverbrauch bei fester Endzeit t_T zu minimieren, das R&D-Manöver also möglichst energieeffizient durchzuführen.

Es lässt sich leicht erkennen, dass es sich bei der hier vorliegenden Aufgabenstellung um ein Optimalsteuerungsproblem handelt. Aus diesem Grund soll im Folgenden die allgemeine Lösung eines solchen hergeleitet und anschließend für das konkrete Problem angedeutet werden. Hierfür sind jedoch noch einige mathematische Grundlagen nötig, welche nun erklärt werden.

4.4. Das Maximumprinzip von Pontryagin

Sei ein Optimalsteuerungsproblem entsprechend dem Abschnitt 4.2 gegeben. Abhängig von der gewählten Steuerung $\mathbf{u}(t)$ lassen sich verschiedene Zustände $\mathbf{x}(t)$ bestimmen, welche die gegebene Differentialgleichung 4.4 lösen. Aus diesem Grund wird eine Lösung dieser ODE immer als Tupel $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ angegeben.

Ein Tupel $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ heißt allgemein genau dann zulässiger Prozess, wenn $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ die aus der Differentialgleichung bestehende Nebenbedingung 4.4, die Randbedingungen 4.5, sowie alle weiteren vorgegebenen Beschränkungen erfüllt.

Der zulässige Prozess, der die minimale Zielfunktion J unter allen zulässigen Prozessen liefert, wird als optimal bezeichnet. Formaler bedeutet dies:

Ein zulässiger Prozess $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t))$ ist optimal, wenn für alle anderen zulässigen Prozesse $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ gilt, dass

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \geq J(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)). \quad (4.11)$$

Minimiert ein zulässiger Prozess also zusätzlich die Zielfunktion, so bezeichnet man das $\hat{\mathbf{u}}(t)$ aus dem Tupel als optimale Steuerung und $\hat{\mathbf{x}}(t)$ als optimale Zustandstrajektorie. Das Tupel $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t))$ ist in diesem Fall Lösung des gegebenen Optimalsteuerungsproblems.

Um ein solches Optimalsteuerungsproblem lösen zu können, muss ein Tupel $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ gewisse notwendige Bedingungen erfüllen. Ein notwendiges Optimalitätskriterium liefert das von L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze und E.F. Mishchenko bewiesene Maximumprinzip, hier Maximumprinzip von Pontryagin genannt. Eine Übersetzung des Originalbeweises lässt sich finden in [21].

Für die Formulierung des Maximumprinzips von Pontryagin sind zuvor noch Definitionen zu Transponierten, komplex Konjugierten, Adjungierten und Hamilton'schen nötig, welche nun folgen.

Die Transponierte einer Matrix wird allgemein erzeugt, indem für jeden Matrixeintrag Spalten- und Zeilennummer vertauscht werden. D.h. die Einträge der Matrix werden sozusagen an der Diagonale gespiegelt. Bei einem Vektor bedeutet dies, dass aus einem Zeilen- ein Spaltenvektor wird und umgekehrt. Um anzuzeigen, dass die Transponierte einer Matrix M betrachtet werden soll, wird ein hochgestelltes T verwendet, also hier entsprechend M^T geschrieben.

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich allgemein darstellen als $z = a + i \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i := \sqrt{-1}$, der sogenannten imaginären Einheit. Die komplex Konjugierte einer solchen Zahl z ist dann definiert als $\bar{z} = a - i \cdot b$. Es lässt sich leicht erkennen, dass für eine reelle Zahl die komplex Konjugierte dieser Zahl gerade die Zahl selbst ist. Die komplex Konjugierte einer Matrix entsteht, indem die Einträge der Matrix jeweils komplex konjugiert werden.

Als Adjungierte einer Matrix bezeichnet man die Transponierte der komplex Konjugierten dieser Matrix und verwendet als Zeichen hierfür ein hochgestelltes $*$.

Diese Definitionen zu komplex Konjugierten, Transponieren und Adjungierten lassen sich analog auch für Abbildungen formulieren.

Definiere damit nun die sogenannte Hamilton'sche als

$$\begin{aligned} H &: [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), \lambda_0) &:= \mathbf{p}(t)^* \cdot g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \lambda_0 \cdot f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei $\mathbf{p}(t)^*$ die Adjungierte, d.h. die Transponierte der komplex Konjugierten, bzw. wegen $\mathbf{p} : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ hier einfach die Transponierte, von einer Abbildung $\mathbf{p}(t)$ bezeichnet. Schreibe in diesem Zusammenhang nun der Einfachheit wegen direkt $\mathbf{p}(t)^T$ statt $\mathbf{p}(t)^*$. Eine Erklärung der genaueren Bedeutung dieser, als Kovariable bezeichneten, Abbildung folgt später. Des Weiteren entspricht $g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ der rechten Seite der Gleichung aus der ODE-Nebenbedingung 4.4 und $f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ dem Integranden aus der Zielfunktion 4.3. Der Multiplikator λ_0 bei $f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ ist ein Skalar aus \mathbb{R} und wird später als $\lambda_0 = 1$ verwendet werden.

Das Maximumprinzip von Pontryagin lautet damit:

Satz 1 (*Maximumprinzip von Pontryagin*)

Sei $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t))$ eine Lösung des Optimalsteuerungsproblems 4.2, dann existieren Konstanten $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 \geq 0$, $v \in \mathbb{R}^q$ und $w \in \mathbb{R}^r$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $p : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass

1. die „Nicht-Trivialitätsbedingung“

$$(\lambda_0, v, w, \mathbf{p}(t)) \neq (0, 0, 0, 0) \text{ für alle } t \in [t_0, t_T], \quad (4.13)$$

2. die „Adjungierte Gleichung für die Kovariable“ mit sogenannten „Transversalitätsbedingungen“ auf den Rändern

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), \mathbf{p}(t), \lambda_0)^* \text{ fast überall auf } [t_0, t_T], \quad (4.14)$$

$$\mathbf{p}(t_0) = \left(\frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}(t_0)) \right)^* \cdot v, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{p}(t_T) = - \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}(t_T)) \right)^* \cdot w \quad (4.16)$$

und

3. die „Maximierungsbedingung“

$$\begin{aligned} H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), \lambda_0) &\leq H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), \mathbf{p}(t), \lambda_0) \\ &\text{für alle } \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U} \text{ und fast überall auf } [t_0, t_T] \end{aligned} \quad (4.17)$$

erfüllt sind. (vgl. [22])

Das Maximumprinzip von Pontryagin sagt aus, dass eine Lösung $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t))$ eines entsprechend dem Abschnitt 4.2 gegebenen Optimalsteuerungsproblems auf jeden Fall die Bedingungen (1)-(3) erfüllen muss. Ist für ein Tupel $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ mindestens eine der Bedingungen nicht erfüllt, so kann es sich bei diesem Tupel um keine Lösung des zugrundeliegenden Optimalsteuerungsproblems gehandelt haben. Das Maximumprinzip von Pontryagin stellt folglich eine notwendige Bedingung für eine Lösung des Optimalsteuerungsproblems dar. Jedes Tupel $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, welches die Bedingungen erfüllt, ist ein möglicher Kandidat für eine optimale Lösung.

Für die Formulierung des Maximumprinzips wurde eine zusätzliche Funktion $\mathbf{p}(t)$ eingeführt, welche als Kozustandsvariable oder Kovariable bzw. Trajektorie der Kovariable zu dem Zustand bzw. der Zustandstrajektorie $\mathbf{x}(t)$ bezeichnet wird. Neben der optimalen Zustandstrajektorie $\hat{\mathbf{x}}(t)$ muss nun auch die optimale Kovariablentrajektorie $\hat{\mathbf{p}}(t)$ bestimmt werden. Durch die Einführung dieser zusätzlichen Funktion wurde die Problemdimension nun offensichtlich verdoppelt. Die Kovariable ist jedoch Teil der Formulierung des in [21] bewiesenen Satzes und kann daher nicht einfach weggelassen werden. Neben der Tatsache, dass sie für die Konzipierung des Maximumprinzips von Pontryagin nötig ist, lässt sich aus der Kovariable auch folgender Zusammenhang ableiten:

Die optimale Kovariable $\hat{\mathbf{p}}(t_*)$ spiegelt zu einem Zeitpunkt $t_* \in [t_0, t_T[$ die Sensitivität der Zielfunktion J bezüglich kleiner Störungen des optimalen Zustandes $\hat{\mathbf{x}}(t_*)$ wider, d.h. $\hat{\mathbf{p}}(t_*)$ gibt also an, wie stark sich J in dem Falle einer solchen Störung verändert. Nach dem Zeitpunkt t_* , d.h. für $t \in]t_*, t_T]$, sei hierbei die Steuerung und damit auch $\hat{\mathbf{x}}(t)$ wieder optimal, also ohne Störung. In den Wirtschaftswissenschaften wird die optimale Kovariable $\hat{\mathbf{p}}(t)$ auch als Schattenpreis bezeichnet. (vgl. [18])

Die „Nicht-Trivialitätsbedingung“ aus dem Maximumprinzip bedeutet offensichtlich, dass nicht alle vier Multiplikatoren λ_0 , v , w und $\mathbf{p}(t)$ zur selben Zeit gleich 0 sein dürfen. Damit soll der triviale Fall ausgeschlossen werden, da dieser natürlich immer gilt.

Die sogenannte „Adjungierte Gleichung für die Kovariable“ beschreibt das dynamische Verhalten der Kovariable und entspricht damit deren Bestimmungsgleichung. Die zugehörigen „Transversalitätsbedingungen“ auf den Rändern geben dann die Randbedingungen für die Kovariable vor. An dieser Stelle fließen die ursprünglichen Randbedingungen 4.5 aus dem zugrundeliegenden Optimalsteuerungsproblem, welches hier gelöst werden soll, ein. Die Zielfunktion 4.3 und die ODE-Nebenbedingung 4.4 sind außerdem bereits indirekt in der Hamilton'schen enthalten.

Die „Maximierungsbedingung“ stellt den wesentlichen Teil des Maximumprinzips von Pontryagin dar. Sie sagt aus, dass zu einem festen Zeitpunkt t , dem festen optimalen Zustand $\hat{\mathbf{x}}(t)$, der festen optimalen Kovariable $\hat{\mathbf{p}}(t)$ und gegebenem λ_0 die Hamilton'sche ein globales Maximum bei der optimalen Steuerung $\hat{\mathbf{u}}(t)$ besitzt, also durch $\hat{\mathbf{u}}(t)$ über \mathbb{U} maximiert wird. Daher auch die Bezeichnung „Maximumprinzip“. Jede optimale Steuerung $\hat{\mathbf{u}}(t)$ muss die „Maximierungsbedingung“ erfüllen, also $H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \hat{\mathbf{p}}(t), \lambda_0)$ über \mathbb{U} maximieren.

Die „Maximierungsbedingung“ beinhaltet offensichtlich die Beschränkung der Steue-

rung 4.6 auf den Steuerbereich \mathbb{U} . Damit sind nun alle Vorgaben aus dem gegebenen Optimalsteuerungsproblem in diesen Satz integriert.

Im Folgenden wird der Begriff „mengenwertig“ bzw. „mengenwertige Abbildung“, speziell im Bezug auf die Steuerung $\mathbf{u}(t)$, benötigt und soll daher nun erklärt werden: Man bezeichnet eine Abbildung als mengenwertige Abbildung, wenn diese ein Element des Urbildbereichs auf eine Menge von Elementen, also nicht zwingend auf nur genau ein Element, des Bildbereichs abbildet. Eine gewöhnliche Abbildung dagegen bildet jedes Element des Urbildbereichs auf genau ein Element des Bildbereichs ab.

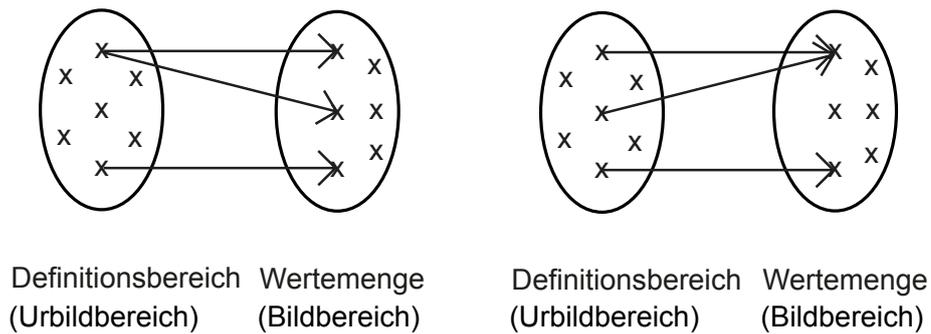


Abb. 4.3.: Mengenwertige Abbildung (links), gewöhnliche Abbildung (rechts)

Ein Beispiel für eine mengenwertige Abbildung wäre $F(x) = [x, x + 1]$.

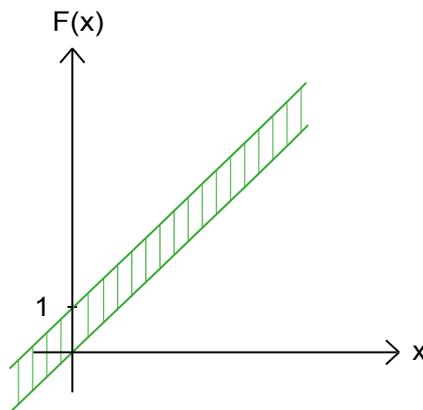


Abb. 4.4.: Beispiel mengenwertige Abbildung $F(x)=[x,x+1]$

4.5. Transformation eines Optimalsteuerungsproblems in ein Randwertproblem

Es sei nun weiterhin die optimale Lösung $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t))$ zu einem entsprechend Abschnitt 4.2 gegebenen Optimalsteuerungsproblem gesucht. Um ein solches Optimalsteuerungsproblem lösen zu können, muss ein Tupel $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ die notwendigen Optimalitätskriterien aus dem Maximumprinzip von Pontryagin erfüllen. Aus diesem Grund werden im Folgenden, wie bei sogenannten indirekten Methoden üblich, diese notwendigen Bedingungen entsprechend in ein numerisch zu lösendes Randwertproblem transformiert und dazu verwendet, mögliche Kandidaten für eine optimale Lösung zu bestimmen.

Entscheidend bei dem Maximumprinzip von Pontryagin ist die „Maximierungsbedingung“, d.h. dass die optimale Steuerung $\hat{\mathbf{u}}(t)$ die Hamilton'sche $H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), \hat{\mathbf{p}}(t), \lambda_0)$ über \mathbb{U} maximiert, also dass das $\hat{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{U}$ so gewählt sein muss, dass $H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), \hat{\mathbf{p}}(t), \lambda_0)$ im Vergleich zu allen anderen $H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \hat{\mathbf{p}}(t), \lambda_0)$ mit $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}$ maximal ist.

Im Folgenden soll speziell das nicht-degenerierte Problem, siehe [22], also der reguläre Fall mit $\lambda_0 = 1$, betrachtet werden, d.h.

$$\begin{aligned} H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), \lambda_0) &:= \mathbf{p}(t)^T \cdot g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \lambda_0 \cdot f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ &\stackrel{\lambda_0=1}{=} \mathbf{p}(t)^T \cdot g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) =: H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Um die Maximierung nun für ein gegebenes, noch zu lösendes Optimalsteuerungsproblem zu realisieren, wird folgende mengenwertige Abbildung definiert:

$$\begin{aligned} R : [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}, \\ R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) &:= \{\mathbf{u}(t) \in \mathbb{U} \mid H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) = \sup_{\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{U}} H(t, \mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \mathbf{p}(t))\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Hierbei wurde das H nun nicht für festes t , das feste optimale $\hat{\mathbf{x}}(t)$ und das feste optimale $\hat{\mathbf{p}}(t)$ betrachtet, also nicht als $H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \hat{\mathbf{p}}(t))$ verwendet, sondern für jedes t , $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{p}(t)$ aus dem jeweiligen Definitionsbereich, da hier die optimalen Trajektorien $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $\hat{\mathbf{u}}(t)$ und $\hat{\mathbf{p}}(t)$ erst noch zu bestimmen sind.

R bildet jedes Tupel $(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ aus dem Definitionsbereich $[t_0, t_T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ auf die Menge an $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ ab, welche H über \mathbb{U} maximieren, also mit welchen das H zu dem jeweiligen Tupel $(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ am größten ist. Außerdem muss eine Lösung $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t))$ des Optimalsteuerungsproblems nach dem Maximumprinzip von Pontryagin die „Maximierungsbedingung“ erfüllen, d.h. ein entsprechendes $\hat{\mathbf{u}}(t)$ muss gerade die Hamilton'sche H maximieren. Folglich bildet R in jedem Punkt $(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ genau auf die Menge der Kandidaten für eine optimale Steuerung $\hat{\mathbf{u}}(t)$ ab. Die optimale Steuerung $\hat{\mathbf{u}}(t)$ ist also ein Element von $R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$.

Da hier alle möglichen Kandidaten für eine Lösung des Optimalsteuerungsproblems bestimmt werden sollen, wird in der, mit Hilfe der Optimalitätsbedingungen des Pontryagin'schen Maximumprinzips, umgeformten Problemstellung nun R statt \mathbf{u} verwendet werden.

Für den regulären Fall, dass R einem Tupel $(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ nur genau ein Element $\hat{\mathbf{u}}(t)$ zuweist, also R an dieser Stelle nicht mengenwertig ist, ist die optimale Steuerung $\hat{\mathbf{u}}(t)$ dort bereits bestimmt.

Kritisch ist jedoch der Fall, bei dem $\mathbf{u}(t)$ linear mit einem weiteren Faktor q als Summand in die Hamilton'sche H einfließt, d.h. falls gilt:

$$H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) = G(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) + \mathbf{u}(t) \cdot q,$$

wobei $G(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ den Anteil von H bezeichnet, welcher unabhängig von $\mathbf{u}(t)$ ist. Wird hierbei der Faktor q gleich 0 für $t \in [t_1, t_2]$ mit $t_1 < t_2$ und $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_T]$, so hat $\mathbf{u}(t)$ in diesem Zeitintervall keinen Einfluss auf das H und $\mathbf{u}(t)$ bzw. R kann somit nicht eindeutig, sondern nur mengenwertig mit Hilfe eines Intervalls als $R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = \mathbf{u}(t) = [0, u_{max}]$, angegeben werden. Das Maximumprinzip liefert in diesem sogenannten singulären Fall also keine Information über die optimale Steuerung in dem Bereich $[t_1, t_2]$, d.h. es ist hier nicht möglich ein konkretes, optimales $\mathbf{u}(t)$ aus den Bedingungen zu berechnen. Man spricht in diesem Fall für das Zeitintervall $[t_1, t_2]$ von einer singulären Steuerung bzw. einem singulären Teilbogen der Steuerung. Die zugehörige Zustandstrajektorie bezeichnet man auf $[t_1, t_2]$ als singuläre Zustandstrajektorie und das Paar $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ als singuläre Lösung. Singuläre Steuerungen dürfen jedoch nicht mit Bang-bang-Steuerungen verwechselt werden.

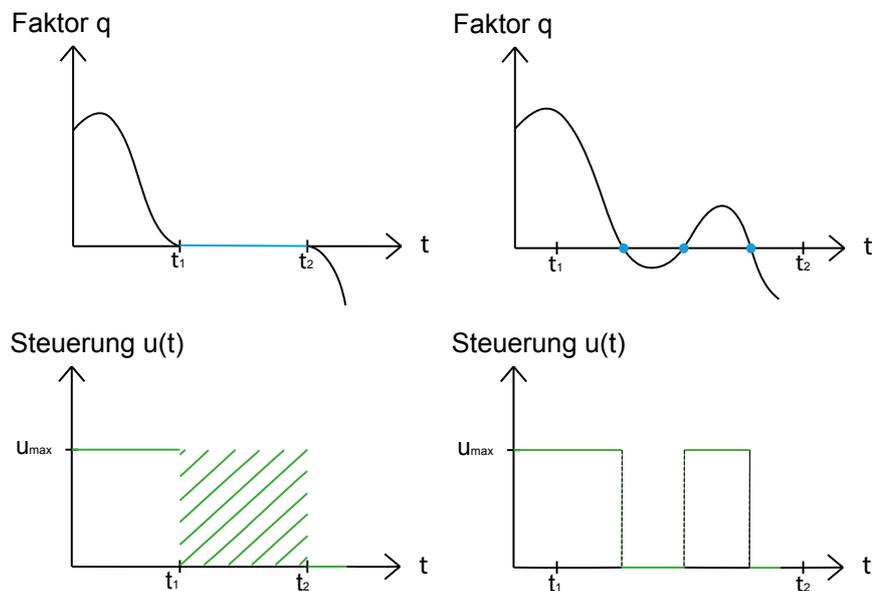


Abb. 4.5.: Singuläre Steuerung (links), Bang-bang-Steuerung (rechts)

Man nennt eine Nullstelle $t = t_*$ von q isolierte Nullstelle, wenn zu $q(t_*) = 0$ für ein beliebig kleines $\epsilon > 0$ gilt: $q(t_* + \epsilon) \neq 0$ und $q(t_* - \epsilon) \neq 0$.

Hat der Faktor q auf dem Intervall $[t_1, t_2]$ ausschließlich isolierte Nullstellen, so bezeichnet man u auf $[t_1, t_2]$ als Bang-bang-Steuerung. Im Bezug auf die Satellitensteuerung würde dies einem Ausschalten und sofort wieder auf den Maximalwert

Anschalten des Schubes entsprechen.

Ist der Faktor q dagegen $\equiv 0$ auf $[t_1, t_2]$ mit $t_1 < t_2$ und $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_T]$, so liegt auf diesem Intervall eine singuläre Steuerung vor. Eine Steuerung kann im Allgemeinen mehrere solche singuläre Abschnitte besitzen. (vgl. [12])

Speziell Steuerungen mit singulären Teilbögen sind für viele Problemlösungsmethoden aufgrund der auftretenden Mengenwertigkeit schwierig zu behandeln.

Bei indirekten Verfahren ist es meist nötig zuvor Annahmen zu treffen ob singuläre Teilbögen existieren und an welchen Stellen diese liegen. Hierbei müssen anschließend spezielle Methoden, die beispielsweise das mehrfache Differenzieren des Faktors nach t oder der Hamilton'schen nach u beinhalten, angewandt werden um doch Informationen über die konkrete optimale Steuerung auf den singulären Abschnitten zu erhalten. In manchen Fällen ist es jedoch nicht möglich passende Annahmen zu treffen, wodurch gewisse Problemstellungen mit diesen indirekten Verfahren nicht lösbar sind.

Da der später beschriebenen Simplicialalgorithmus auch auf Differentialinklusionen, also auf mengenwertige Abbildungen, anwendbar ist, sind solche a-priori Informationen für diesen nicht nötig und dadurch auch Probleme mit singulärer Steuerung behandelbar.

Das ursprünglich zu lösende Optimalsteuerungsproblem aus Abschnitt 4.2 soll im Folgenden mit Hilfe der notwendigen Optimalitätskriterien aus dem Maximumprinzip von Pontryagin umgeformt werden. Betrachte hierzu als Ausgangssituation sowohl das ursprünglich gegebene Optimalsteuerungsproblem, sowie die Bedingungen aus dem Maximumprinzip. Letztere müssen für eine Lösung des Optimalsteuerungsproblems notwendigerweise gelten und können daher in die Formulierung der Problemstellung integriert werden.

Mit der Einführung der neuen Abbildung R entsprechend 4.19 ist die Forderung der „Maximierungsbedingung“ bereits enthalten, wenn $\mathbf{u}(t)$ in der Formel zur Beschreibung der Dynamik 4.4 und in der adjungierten Gleichung für die Kovariable 4.14 durch R ersetzt wird. Die „Maximierungsbedingung“ beinhaltet die Aussage „ $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}$ fast überall auf $[t_0, t_T]$ “, also die Beschränkung der Steuerung $\mathbf{u}(t)$ auf den Steuerbereich \mathbb{U} . Daher muss auch diese Forderung nun nicht erneut formuliert werden und fließt schon durch die Verwendung der Abbildung R in das System ein. Durch das Maximieren der Hamilton'schen war außerdem bereits indirekt die ursprüngliche Aufgabenstellung, die Zielfunktion 4.3 zu minimieren, realisiert. Somit muss diese Zielfunktion im Folgenden ebenfalls nicht weiter zusätzlich betrachtet werden. Mit der Verwendung von

$$H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) := \mathbf{p}(t)^T \cdot g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (4.20)$$

also mit $\lambda_0 = 1$, ist auch die „Nicht-Trivialitätsbedingung“ erfüllt. Die Randbedingungen 4.5 und die Transversalitätsbedingungen aus 4.15 und 4.16 werden außerdem, siehe [22], umgeformt zu

$$\begin{pmatrix} M & M^\perp \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{p}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & N^\perp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_T) \\ \mathbf{p}(t_T) \end{pmatrix} = a, \quad (4.21)$$

wobei $M^\perp : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $N^\perp : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen, als Matrizen $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt, mit $\text{kern}(M^\perp) = \text{im}(M^*)$ und $\text{kern}(N^\perp) = \text{im}(N^*)$. Das \perp -Zeichen, unter anderem bei M , bedeutet hier, dass die zu M orthogonale Matrix M^\perp , also jene Matrix deren Spalten die Spalten von M zu einer Basis des gesamten Raumes, hier dem \mathbb{R}^n , ergänzt, betrachtet werden soll. M^* bezeichnet die zu M adjungierte Matrix, also die erst komplex konjugierte und dann transponierte Matrix. Durch die Definition von M^\perp und N^\perp sind die Transversalitätsbedingungen enthalten, siehe [22].

Folglich lässt sich nun ein entsprechend dem Abschnitt 4.2 definiertes Optimalsteuerungsproblem unter Verwendung der Bedingungen aus dem Maximumprinzip von Pontryagin in folgendes Randwertproblem transformieren²:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix} &\in \begin{pmatrix} g(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))) \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t))^* \end{pmatrix} \\ &=: A(t) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} + F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))) \text{ für fast alle } t \in [t_0, t_T] \end{aligned} \quad (4.22)$$

mit der Randbedingung

$$\begin{pmatrix} M & M^\perp \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{p}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & N^\perp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_T) \\ \mathbf{p}(t_T) \end{pmatrix} = a. \quad (4.23)$$

Hierbei sei $A(t) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ eine, als Matrix $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ dargestellte, lineare Abbildung. M, N seien so definiert, dass obige Vorgabe $\text{kern}(M^\perp) = \text{im}(M^*)$ und $\text{kern}(N^\perp) = \text{im}(N^*)$ erfüllt und es sei $a \in \mathbb{R}^{2n}$. Des Weiteren sollen A, M, N so gewählt werden, dass das zugehörige homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung besitzt. (vgl.[22])

Das \in -Zeichen in 4.22 ist nötig, da R per Definition 4.19 mengenwertig ist und dadurch nun auch $g(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)))$ und $-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t))^*$ mengenwertig wurden.

Die Abbildungen $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{p}(t)$ sollen jedoch konkret und nicht mengenwertig bestimmt werden. Folglich dürfen auch $\dot{\mathbf{x}}(t)$ und $\dot{\mathbf{p}}(t)$ nicht mengenwertig sein und müssen daher nun als Element und nicht mehr identisch der jeweiligen Abbildung auf der rechten Seite geschrieben werden. Die Abbildung $\dot{\mathbf{x}}(t)$ soll damit Teil der mengenwertigen Abbildung $g(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)))$ und $\dot{\mathbf{p}}(t)$ Teil der mengenwertigen Abbildung $-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t))^*$ sein.

Da alle Bedingungen aus dem Maximumprinzip von Pontryagin in das obige Randwertproblem integriert sind, erfüllt jede Lösung des Randwertproblems die notwendigen Optimalitätskriterien des Maximumprinzips und ist damit Kandidat für eine Lösung des ursprünglichen Optimalsteuerungsproblems.

² „für fast alle“ bedeutet: für alle bis auf endlich viele

Das Optimalsteuerungsproblem aus 4.2 wurde in diesem Abschnitt also unter Verwendung der notwendigen Bedingungen aus dem Pontryagin'schen Maximumprinzip in ein neues Randwertproblem transformiert, welches letztendlich numerisch zu lösen sein wird.

Das diesem Randwertproblem zugrundeliegende Differentialgleichungssystem 4.22 ist wegen dem \in -Zeichen und der mengenwertigen Abbildung auf der rechten Seite der Gleichung ein sogenanntes Differentialinklusionssystem. Es liegt folglich ein Randwertproblem eines nichtlinearen Differentialinklusionssystems 1.Ordnung vor. Eine entsprechende Lösungsmethode zu dieser Art von Randwertproblemen wird im nächsten Kapitel hergeleitet und beschrieben.

Nun sollen jedoch erst die eben ermittelten Zusammenhänge auf das ursprüngliche Rendezvous- und Docking-Beispiel mit den beiden Satelliten angewandt werden.

4.6. R&D-Optimalsteuerungsproblem als Randwertproblem

Die in diesem Abschnitt betrachteten Komponenten $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, u_x, u_y, u_z, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9$ und p_{10} sind abhängig von der Zeit t , was jedoch der besseren Übersicht wegen weggelassen wird.

Im Folgenden soll, analog dem vorherigen Abschnitt, speziell das R&D- Optimalsteuerungsproblem mit Hilfe der notwendigen Bedingungen aus dem Maximumprinzip von Pontryagin in ein entsprechendes Randwertproblem transformiert werden. Hierfür wird zuerst die Aufgabenstellung in der im Abschnitt 4.2 angegebenen allgemeinen Form eines Optimalsteuerungsproblems formuliert:

Minimiere die Zielfunktion

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \int_0^{t_T} u_x + u_y + u_z dt \quad (4.24)$$

unter der ODE-Nebenbedingung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ 2x_9x_7 - \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_2 + x_9^2x_1 - \frac{\mu(x_5+x_1)}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{x_5} + u_x \\ -2x_9x_6 + \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_1 + x_9^2x_2 - \frac{\mu x_2}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + u_y \\ - \frac{\mu x_3}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + u_z \\ - \frac{2x_{10}x_9}{x_5} \\ x_5x_9^2 - \frac{\mu}{x_5^2} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

fast überall auf $[t_0, t_T]$,
den Randbedingungen

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \\ x_4(t_0) \\ x_5(t_0) \\ x_6(t_0) \\ x_7(t_0) \\ x_8(t_0) \\ x_9(t_0) \\ x_{10}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \theta_0 \\ r_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{r}_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_1(t_T) \\ x_2(t_T) \\ x_3(t_T) \\ x_4(t_T) \\ x_5(t_T) \\ x_6(t_T) \\ x_7(t_T) \\ x_8(t_T) \\ x_9(t_T) \\ x_{10}(t_T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \theta_T \\ r_T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_T \\ \dot{r}_T \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

und der Beschränkung der Steuerung

$$\begin{aligned} u_x &\in [0, u_{xmax}] \text{ fast überall auf } [t_0, t_T], \\ u_y &\in [0, u_{ymax}] \text{ fast überall auf } [t_0, t_T], \\ u_z &\in [0, u_{zmax}] \text{ fast überall auf } [t_0, t_T]. \end{aligned}$$

wobei $u_{xmax}, u_{ymax}, u_{zmax} \in \mathbb{R}^+$ fest vorgegeben.

Um dieses Optimalsteuerungsproblem nun mit Hilfe des Maximumprinzips von Pontryagin umformen zu können, muss zuerst die Hamilton'sche H entsprechend 4.20, sowie die mengenwertige Abbildung R siehe 4.19 aufgestellt werden.

Mit der Kovariable $\mathbf{p}^T(t)$, der rechten Seite der Gleichung aus der ODE-Nebenbedingung 4.4 $g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ und dem Integranden aus der Zielfunktion 4.3 $f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ lautet die Hamilton'sche zu dem gegebenen Optimalsteuerungsproblem wie folgt:

$$\begin{aligned}
 H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) &= \mathbf{p}^T(t) \cdot g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\
 &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ 2x_9x_7 - \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_2 + x_9^2x_1 - \frac{\mu(x_5+x_1)}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{x_5} + u_x \\ -2x_9x_6 + \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_1 + x_9^2x_2 - \frac{\mu x_2}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + u_y \\ -\frac{\mu x_3}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + u_z \\ -\frac{2x_{10}x_9}{x_5} \\ x_5x_9^2 - \frac{\mu}{x_5} \end{pmatrix} \\
 &- (u_x + u_y + u_z) \\
 &= -u_x - u_y - u_z + p_5x_{10} + p_8 \cdot \left(u_z - \frac{\mu x_3}{(x_2^2 + x_3^2 + (x_1 + x_5)^2)^{3/2}} \right) + p_1x_6 \\
 &+ p_2x_7 + p_3x_8 + p_4x_9 - \frac{2p_9x_{10}x_9}{x_5} \\
 &+ p_6 \cdot \left(u_x + \frac{\mu}{x_5} - \frac{\mu(x_1 + x_5)}{(x_2^2 + x_3^2 + (x_1 + x_5)^2)^{3/2}} - \frac{2x_{10}x_2x_9}{x_5} + 2x_7x_9 + x_1x_9^2 \right) \\
 &+ p_7 \cdot \left(u_y - \frac{\mu x_2}{(x_2^2 + x_3^2 + (x_1 + x_5)^2)^{3/2}} + \frac{2x_1x_{10}x_9}{x_5} - 2x_6x_9 + x_2x_9^2 \right) \\
 &+ p_{10} \cdot \left(-\frac{\mu}{x_5} + x_5x_9^2 \right).
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Die Abbildung R soll entsprechend der Definition 4.19 das jeweilige Tupel $(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ genau auf die $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}$ abbilden, mit welchen das entsprechende H am größten ist. Um R einfacher bestimmen zu können, werden einige Summanden des eben berechneten H zu a_1 bis a_6 zusammengefasst. Da für die Bestimmung von R außerdem nur die Summanden, welche u enthalten, relevant sind, werden anschließend alle anderen Summanden durch den als „rest“ bezeichneten Summanden ersetzt.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= p_5x_{10} \\
 a_2 &= \frac{\mu x_3}{(x_2^2 + x_3^2 + (x_1 + x_5)^2)^{3/2}} \\
 a_3 &= p_1x_6 + p_2x_7 + p_3x_8 + p_4x_9 - \frac{2p_9x_{10}x_9}{x_5} \\
 a_4 &= \frac{\mu}{x_5} - \frac{\mu(x_1 + x_5)}{(x_2^2 + x_3^2 + (x_1 + x_5)^2)^{3/2}} - \frac{2x_{10}x_2x_9}{x_5} + 2x_7x_9 + x_1x_9^2 \\
 a_5 &= \frac{\mu x_2}{(x_2^2 + x_3^2 + (x_1 + x_5)^2)^{3/2}} + \frac{2x_1x_{10}x_9}{x_5} - 2x_6x_9 + x_2x_9^2 \\
 a_6 &= p_{10} \cdot \left(-\frac{\mu}{x_5} + x_5x_9^2 \right)
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

und

$$rest = a_1 - p_8 \cdot a_2 + a_3 + p_6 \cdot a_4 - p_7 \cdot a_5 + a_6.$$

Somit ergibt sich für H :

$$\begin{aligned} H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) &= -u_x - u_y - u_z + a_1 + p_8 \cdot (u_z - a_2) + a_3 + p_6 \cdot (u_x + a_4) + p_7 \cdot (u_y - a_5) + a_6 \\ &= -u_x + p_6 u_x - u_y + p_7 u_y - u_z + p_8 u_z + a_1 - p_8 a_2 + a_3 + p_6 a_4 - p_7 a_5 + a_6 \\ &= -u_x + p_6 u_x - u_y + p_7 u_y - u_z + p_8 u_z + rest \\ &= u_x \cdot (p_6 - 1) + u_y \cdot (p_7 - 1) + u_z \cdot (p_8 - 1) + rest. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Aus letzterem lässt sich leicht ablesen welche $u := (u_x, u_y, u_z)$ das H maximieren, also für welche u das H , abhängig von $(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$, am größten ist. Daraus ergibt sich zu dem betrachteten Rendezvous- und Docking-Beispiel folgende Definition für R :

$$\begin{aligned} R : [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10} &\rightarrow 2^{\mathbb{R}^3} \text{ mit} \\ R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) &= \begin{pmatrix} R_1(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \\ R_2(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \\ R_3(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \text{ wobei} \\ u_x &= \begin{cases} 0, & \text{falls } p_6 < 1 \\ [0, u_{xmax}], & \text{falls } p_6 = 1 \\ u_{xmax}, & \text{falls } p_6 > 1 \end{cases}, \\ u_y &= \begin{cases} 0, & \text{falls } p_7 < 1 \\ [0, u_{ymax}], & \text{falls } p_7 = 1 \text{ und} \\ u_{ymax}, & \text{falls } p_7 > 1 \end{cases} \\ u_z &= \begin{cases} 0, & \text{falls } p_8 < 1 \\ [0, u_{zmax}], & \text{falls } p_8 = 1 \\ u_{zmax}, & \text{falls } p_8 > 1 \end{cases}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Im Folgenden wird $\mathbf{u}(t) = (u_x(t), u_y(t), u_z(t))$ durch das eben ermittelte, offensichtlich mengenwertige R ersetzt. Trotz dieser scheinbaren Wahl von $\mathbf{u}(t)$ wird dieses hierdurch nicht fest gesetzt, sondern nur abhängig von $\mathbf{p}(t)$ bestimmt, welches sich selbst noch während der Berechnung der Lösung verändert, bzw. dessen optimaler Wert noch ermittelt wird. Somit wird durch $\mathbf{p}(t)$ im Verlauf des Lösungsalgorithmus indirekt weiterhin nach einer optimalen Steuerung $\mathbf{u}(t)$ gesucht. Diese wurde durch R also nicht im Vorherein schon festgelegt.

Um das zu dem Rendezvous- und Docking- Beispiel gehörende Optimalsteuerungsproblem in ein Randwertproblem entsprechend 4.22 umformen zu können, sind außerdem die partiellen Ableitungen der Hamilton'schen nach den Komponenten von \mathbf{x} nötig. Dies ist jedoch zu umfangreich um es hier explizit anzugeben. Aus diesem Grund werden die partiellen Ableitungen im Folgenden nur durch $\frac{\partial H}{\partial x_1}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t))$ bis $\frac{\partial H}{\partial x_{10}}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t))$ angedeutet und nicht konkret ausformuliert.

Ein Beispiel für eine geeignete Wahl von M , N , M^\perp und N^\perp wäre $M = N^\perp = I_{10}$ und $N = M^\perp = 0$, wobei I_{10} die 10×10 -Einheitsmatrix und 0_{10} hier die aus ausschließlich Nullen bestehende 10×10 -Matrix bezeichnet. Es ist offensichtlich, dass die Spalten von M^\perp bzw. N^\perp die Spalten von M bzw. N zu einer Basis des \mathbb{R}^{10} ergänzen, da die Spalten von I_{10} bereits eine Basis des \mathbb{R}^{10} darstellen. Wegen $\text{kern}(I_{10}) = 0_{10}$, $\text{kern}(0_{10}) = \mathbb{R}^{10}$, $\text{im}(I_{10}) = \mathbb{R}^{10}$, $\text{im}(0_{10}) = 0_{10}$, $I_{10}^* = I_{10}$ und $0_{10}^* = 0_{10}$ sind außerdem auch die Bedingungen $\text{kern}(M^\perp) = \text{im}(M^*)$ und $\text{kern}(N^\perp) = \text{im}(N^*)$ erfüllt. Bei dem im Folgenden beschriebenen Randwertproblem könnte A so gewählt werden, dass alle Einträge gleich Null sind, bis auf $A(1, 6) = A(2, 7) = A(3, 8) = A(4, 9) = A(5, 10) = 1$ und $A(16, 11) = A(17, 12) = A(18, 13) = A(19, 14) = A(20, 15) = -1$. In diesem Fall kann gezeigt werden, dass zusammen mit den eben gewählten M, N, M^\perp, N^\perp nur die triviale Lösung das zugehörige homogene Randwertproblem löst.

Das zu Beginn des Abschnittes 4.6 formulierte R&D-Optimalsteuerungsproblem kann nun unter Verwendung der notwendigen Bedingungen des Maximumprinzips von Pontryagin, entsprechend dem vorherigen Abschnitt 4.5, mit Hilfe des eben Berechneten zu folgendem Randwertproblem transformiert werden:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix} \in & \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ 2x_9x_7 - \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_2 + x_9^2x_1 - \frac{\mu(x_5+x_1)}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{x_5^2} + R_1(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \\ -2x_9x_6 + \frac{2x_{10}x_9}{x_5}x_1 + x_9^2x_2 - \frac{\mu x_2}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + R_2(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \\ - \frac{\mu x_3}{[(x_5+x_1)^2+x_2^2+x_3^2]^{\frac{3}{2}}} + R_3(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \\ - \frac{2x_{10}x_9}{x_5} \\ x_5x_9^2 - \frac{\mu}{x_5^2} \\ - \frac{\partial H}{\partial x_1}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t)) \\ - \frac{\partial H}{\partial x_2}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t)) \\ - \frac{\partial H}{\partial x_3}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t)) \\ - \frac{\partial H}{\partial x_4}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t)) \\ - \frac{\partial H}{\partial x_5}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t)) \\ - \frac{\partial H}{\partial x_6}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t)) \\ - \frac{\partial H}{\partial x_7}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t)) \\ - \frac{\partial H}{\partial x_8}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t)) \\ - \frac{\partial H}{\partial x_9}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t)) \\ - \frac{\partial H}{\partial x_{10}}(t, \mathbf{x}(t), R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{p}(t)) \end{pmatrix} \\
 & \text{für fast alle } t \in [t_0, t_T]
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

mit der Randbedingung

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} I_{10} & 0_{10} \\ 0_{10} & 0_{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{p}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{10} & 0_{10} \\ 0_{10} & I_{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_T) \\ \mathbf{p}(t_T) \end{pmatrix} \\
 & = (x_0 \ y_0 \ z_0 \ \theta_0 \ r_0 \ \dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \dot{z}_0 \ \dot{\theta}_0 \ \dot{r}_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Das gegebene R&D-Optimalsteuerungsproblem wurde in diesem Abschnitt umgeformt zu einem Randwertproblem eines nichtlinearen Differentialinklusionssystems 1.Ordnung. Eine entsprechende Lösungsmethode hierzu wird im folgenden Kapitel allgemein beschrieben.

Diese und weitere Informationen lassen sich finden unter [9], [11], [12], [15], [18], [21], [22], [25] und [27].

Kapitel 5.

RWP eines nichtlinearen Differentialinklusionssystems 1.Ordnung

Ziel dieses Kapitels ist es, einen Lösungsansatz für Randwertprobleme nichtlinearer Differentialinklusionssysteme 1.Ordnung herzuleiten.

Hierfür wird zu Beginn eine Lösungsmethode für lineare Differentialgleichungssysteme 1.Ordnung beschrieben. Diese wird dann für entsprechende Randwertprobleme umgeformt. Anschließend werden Randwertprobleme nichtlinearer Differentialinklusionssysteme 1.Ordnung betrachtet und, mit Hilfe der vorherigen Überlegungen, zu Fixpunktproblemen eines mengenwertigen Operators reduziert.

Für dieses Kapitel sei die Abbildung $A(t) : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ auf $[t_0, t_T] \subset \mathbb{R}$ stetig mit $t_0 < t_T < \infty$ und $\xi : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine auf $[t_0, t_T]$ Lebesgue-messbare Abbildung mit $\int_{t_0}^{t_T} \|\xi(t)\| dt < \infty$. Außerdem sei $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $F : [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ eine mengenwertige Abbildung. Hierbei bezeichne $\mathbb{R}^{n \times n}$ die Menge aller reellen $(n \times n)$ -Matrizen und $2^{\mathbb{R}^n}$ die Menge aller Teilmengen, also die Potenzmenge, von \mathbb{R}^n .

Im Folgenden wird außerdem der Begriff der Fundamentalmatrix benötigt und soll daher nun kurz erklärt werden.

Als Fundamentalmatrix eines Gleichungssystems bezeichnet man eine Matrix, deren Spalten, jeweils als Vektor gesehen, eine Basis der Menge aller Lösungen des Systems bilden. Da eine Basis per Definition aus linear unabhängigen Vektoren besteht, sind die Spalten einer Fundamentalmatrix linear unabhängig. Die Matrix besitzt folglich vollen Rang und ist damit invertierbar, d.h. die Inverse einer Fundamentalmatrix existiert immer.

Im Folgenden sei die Inverse einer Matrix M durch ein hochgestelltes -1 angezeigt, also als M^{-1} geschrieben.

5.1. Lösen eines linearen Differentialgleichungssystems 1.Ordnung

Betrachte ein System von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung der folgenden, allgemeinen Form:

$$\dot{y}(t) = A(t) \cdot y(t) + \xi(t) \text{ für fast alle } t \in [t_0, t_T]. \quad (5.1)$$

Die Lösung $y : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dieses Differentialgleichungssystems lässt sich allgemein darstellen als

$$y(t) = y_h(t) + y_s(t), \quad (5.2)$$

wobei $y_h(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\dot{y}(t) = A(t) \cdot y(t)$ zu 5.1 und $y_s(t)$ eine spezielle Lösung der entsprechenden inhomogenen Gleichung $\dot{y}(t) = A(t) \cdot y(t) + \xi(t)$ ist.

Die Matrix $Y(t)$ sei Fundamentalmatrix zur homogenen Gleichung $\dot{y}(t) = A(t) \cdot y(t)$, also erfüllt $Y(t)$ die Matrix-Differentialgleichung $\dot{Y}(t) = A(t) \cdot Y(t)$ und es gilt:

$$y_h(t) = Y(t) \cdot c \text{ mit } c \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Eine spezielle Lösung $y_s(t)$ der inhomogenen Gleichung 5.1 lässt sich dann beispielsweise mittels Variation der Konstanten bestimmen.

Wähle hierzu als Ansatz $y_s(t) = Y(t) \cdot C(t)$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A(t) \cdot y(t) + \xi(t) \quad \parallel y(t) = y_s(t) = Y(t) \cdot C(t) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(Y(t) \cdot C(t)) &= A(t) \cdot Y(t) \cdot C(t) + \xi(t) \quad \parallel \text{ Kettenregel} \\ \Leftrightarrow \dot{Y}(t) \cdot C(t) + Y(t) \cdot \dot{C}(t) &= A(t) \cdot Y(t) \cdot C(t) + \xi(t) \quad \parallel \dot{Y}(t) = A(t) \cdot Y(t) \\ \Leftrightarrow A(t) \cdot Y(t) \cdot C(t) + Y(t) \cdot \dot{C}(t) &= A(t) \cdot Y(t) \cdot C(t) + \xi(t) \\ \Leftrightarrow Y(t) \cdot \dot{C}(t) &= \xi(t) \\ \Leftrightarrow \dot{C}(t) &= Y^{-1}(t) \cdot \xi(t) \\ \Leftrightarrow C(t) &= \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Daraus folgt:

$$y_s(t) = Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau, \quad (5.5)$$

also

$$y(t) = y_h(t) + y_s(t) = Y(t) \cdot c + Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \text{ mit } c \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Die allgemeine Lösungsformel für ein lineares Differentialgleichungssystem 1.Ordnung entsprechend 5.1 lautet folglich:

$$y(t) = Y(t) \cdot \left(c + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right), \quad c \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

5.2. Lösen eines RWP zu einem linearen Differentialgleichungssystem 1.Ordnung

Erweitere nun das Differentialgleichungssystem 5.1 zu einem Randwertproblem, siehe [22]:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y(t) + \xi(t) & \text{für fast alle } t \in [t_0, t_T] \\ M \cdot y(t_0) - N \cdot y(t_T) = a. \end{cases} \quad (5.8)$$

Es sei hierbei vorausgesetzt, dass das zugehörige homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung $y \equiv 0$ besitzt.

Setzt man nun die allgemeine Lösungsformel 5.7 in die Randbedingungen aus 5.8 ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & M \cdot \left(Y(t_0) \cdot \left(c + \int_{t_0}^{t_0} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right) \right) - N \cdot \left(Y(t_T) \cdot \left(c + \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right) \right) \\ &= a \\ \Leftrightarrow & M \cdot Y(t_0) \cdot c - N \cdot Y(t_T) \cdot \left(c + \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right) = a \\ \Leftrightarrow & M \cdot Y(t_0) \cdot c - N \cdot Y(t_T) \cdot c - N \cdot Y(t_T) \cdot \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau = a \\ \Leftrightarrow & (M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T)) \cdot c - N \cdot Y(t_T) \cdot \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau = a \\ \Leftrightarrow & (M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T)) \cdot c = a + N \cdot Y(t_T) \cdot \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \\ \Leftrightarrow & c = (M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot \left(a + N \cdot Y(t_T) \cdot \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Verwendet man dieses eben berechnete c in der Lösungsformel 5.7, so hat man bereits die Lösung für das Randwertproblem 5.8:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= Y(t) \cdot \left[(M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot \left(a + N \cdot Y(t_T) \cdot \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \\
 &= Y(t) \cdot \left[(M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot a \right. \\
 &\quad \left. + (M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot N \cdot Y(t_T) \cdot \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \\
 &= Y(t) \cdot \left[(M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot N \cdot Y(t_T) \cdot \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right] + Y(t) \cdot (M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot a.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Im Folgenden bezeichne $L^1[t_0, t_T]^n$ die Menge aller Lebesgue-messbaren Abbildungen $x(t) : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\int_{t_0}^{t_T} \|x(t)\| dt < \infty$ und $C[t_0, t_T]^n$ die Menge aller stetigen Abbildungen von $[t_0, t_T]$ nach \mathbb{R}^n . Für $x \in C[t_0, t_T]^n$ würde dies bedeuten, dass $x : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine auf $[t_0, t_T]$ stetige Abbildung darstellt.

Die eben in 5.10 ermittelte Lösungsformel lässt sich übersichtlicher mit Hilfe der folgenden linearen Operatoren G und H aus [22] schreiben:

$$\begin{aligned}
 G : L^1[t_0, t_T]^n &\rightarrow C[t_0, t_T]^n, \quad \xi(t) \mapsto \\
 Y(t) \cdot \left[(M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot N \cdot Y(t_T) \cdot \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right]
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

und

$$H : \mathbb{R}^n \rightarrow C[t_0, t_T]^n, \quad a \mapsto Y(t) \cdot (M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot a. \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D.h. } y(t) = & \\
 & \underbrace{Y(t) \cdot \left[(M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot N \cdot Y(t_T) \cdot \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right]}_{=:G\xi} \\
 & + \underbrace{Y(t) \cdot (M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot a}_{=:Ha}.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Bei einem Operator G bzw. H bedeutet „ $G\xi$ “ bzw. „ Ha “, dass der Operator G bzw. der Operator H auf ξ bzw. a angewandt wird.

Die hier definierten Operatoren G und H sind in ξ bzw. in a linear und werden daher als lineare Operatoren bezeichnet.

Damit lautet die Lösungsformel für ein, entsprechend 5.8 formuliertes, Randwertproblem eines linearen Differentialgleichungssystems 1.Ordnung:

$$y(t) = G\xi(t) + Ha, \tag{5.14}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 G : L^1[t_0, t_T]^n &\rightarrow C[t_0, t_T]^n, \quad \xi(t) \mapsto \\
 Y(t) \cdot \left[(M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot N \cdot Y(t_T) \cdot \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right]
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

und

$$H : \mathbb{R}^n \rightarrow C[t_0, t_T]^n, \quad a \mapsto Y(t) \cdot (M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot a. \tag{5.16}$$

5.3. Lösen eines RWP zu einem nichtlinearen Differentialinklusionssystem 1.Ordnung

5.3.1. Definition und Fixpunktproblem eines mengenwertigen Operators

Seien D und W beliebige Mengen. Ein Element $x \in D$ heißt Fixpunkt der Abbildung $f : D \rightarrow W : \Leftrightarrow f(x) = x$ gilt. D.h. ein Fixpunkt ist ein Element aus dem Definitionsbereich dessen Bild unter der Abbildung wieder das Element liefert, also ein Element, das auf sich selbst abgebildet wird. Bei einer beliebigen Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist dies gerade jeder Schnittpunkt der gegebenen Abbildung f mit der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

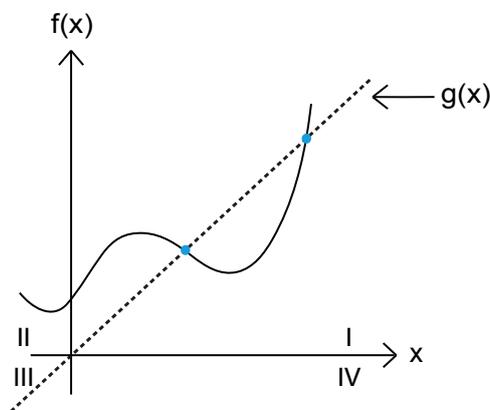


Abb. 5.1.: Schnittpunkte von $f(x)$ mit der Winkelhalbierenden $g(x)$

Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Winkelhalbierende genau der Abbildung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) := x$ entspricht und somit für jeden Schnittpunkt dieser beiden Abbildungen $f(x) = g(x) = x$ gilt. D.h. $f(x) = x$, also liegt ein Fixpunkt vor.

Im Folgenden werden sogenannte Differentialinklusionen verwendet und sollen daher an dieser Stelle nochmals genauer erklärt werden.

Als Differentialinklusion bezeichnet man eine Differentialgleichung bzw. ein System von Differentialgleichungen mit \in - statt $=$ -Zeichen und einer Menge, genauer einer mengenwertigen Abbildung, statt einer normalen Abbildung auf der rechten Seite dieses Zeichens.

Die Verwendung von Differentialinklusionen statt Differentialgleichungen in einem Randwertproblem bietet den Vorteil, dass auch Systeme mit nicht eindeutiger Dynamik, also speziell Systeme mit singulärer Steuerung, untersucht werden können. Außerdem lassen sich nach [22] Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite gegebenenfalls zu Differentialinklusionen mit oberhalb stetiger rechter Seite transformieren. Demnach lassen sich die folgenden Sätze indirekt auch auf diese Randwertprobleme mit nicht-stetiger rechter Seite anwenden.

Betrachte folgendes Randwertproblem einer nichtlinearen Differentialinklusion, siehe [22]:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in A(t) \cdot y(t) + F(t, y(t)) & \text{für fast alle } t \in [t_0, t_T] \\ M \cdot y(t_0) - N \cdot y(t_T) = a, \end{cases} \quad (5.17)$$

mit den Matrizen $A(t), M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a \in \mathbb{R}^n$ und der mengenwertigen Abbildung $F : [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$. Des Weiteren besitze das zugehörige homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung $y \equiv 0$.

Definiere nun zu diesem Randwertproblem entsprechend [22] einen mengenwertigen Operator τ mit den linearen Operatoren G und H , siehe 5.15 und 5.16:

$$\begin{aligned} \tau : C[t_0, t_T]^n &\rightarrow 2^{C[t_0, t_T]^n}, \quad x(t) \mapsto \\ &\{y(t) \mid y(t) = G\xi(t) + Ha, \xi(t) \in F(t, x(t)) \text{ für fast alle } t \in [t_0, t_T], \xi(t) \in L^1[t_0, t_T]^n\}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

wobei

$$\begin{aligned} G : L^1[t_0, t_T]^n &\rightarrow C[t_0, t_T]^n, \quad \xi(t) \mapsto \\ Y(t) \cdot &\left[(M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot N \cdot Y(t_T) \cdot \int_{t_0}^{t_T} Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

und

$$H : \mathbb{R}^n \rightarrow C[t_0, t_T]^n, \quad a \mapsto Y(t) \cdot (M \cdot Y(t_0) - N \cdot Y(t_T))^{-1} \cdot a. \quad (5.20)$$

Dabei bezeichne $C[t_0, t_T]^n$ die Menge aller stetigen Abbildungen von $[t_0, t_T]$ nach \mathbb{R}^n und $2^{C[t_0, t_T]^n}$ die dazugehörige Menge aller Teilmengen, also die Potenzmenge dieser Menge. Wie schon in 5.15 und 5.16 ist $Y(t)$ die Fundamentalmatrix der, zu dem obigen System passenden, homogenen Differentialgleichung.

Außerdem entspricht $G\xi(t) + Ha$ in dieser Formulierung von τ , für ein festes $\xi(t)$, also für eine feste, auf $[t_0, t_T]$ Lebesgue-messbare Abbildung $\xi : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, offensichtlich gerade einer Lösung zu dem folgenden Randwertproblem eines linearen Differentialgleichungssystems 1.Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y(t) + \xi(t) & \text{für fast alle } t \in [t_0, t_T] \\ M \cdot y(t_0) - N \cdot y(t_T) = a. \end{cases} \quad (5.21)$$

Wenn der obige Operator τ ein konkretes $\underline{x}(t)$ abbilden soll, dann wird dieses zuerst in $F(t, \underline{x}(t))$ eingesetzt, d.h. es wird $F(t, \underline{x}(t))$ betrachtet. Anschließend wird im Prinzip für jedes mögliche $\xi(t) \in F(t, \underline{x}(t))$ dann $y(t) = G\xi(t) + Ha$ berechnet, also indirekt das zu dem jeweiligen ξ gehörende, lineare Randwertproblem 5.21 gelöst. Das $\underline{x}(t)$ wird dann also auf die Menge aller $y(t)$ abgebildet, welche man im Schritt zuvor durch $G\xi(t) + Ha$ erhalten hatte.

Satz 2 Betrachte das Randwertproblem der nichtlinearen Differentialinklusion

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in A(t) \cdot y(t) + F(t, y(t)) & \text{für fast alle } t \in [t_0, t_T] \\ M \cdot y(t_0) - N \cdot y(t_T) = a \end{cases} \quad (5.22)$$

und den zugehörigen Operator τ :

$$\begin{aligned} \tau : C[t_0, t_T]^n &\rightarrow 2^{C[t_0, t_T]^n}, \quad x(t) \mapsto \\ \{y(t) \mid y(t) &= G\xi(t) + Ha, \xi(t) \in F(t, x(t)) \text{ für fast alle } t \in [t_0, t_T], \xi(t) \in L^1[t_0, t_T]^n\}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Sei hierbei $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $A(t) : [t_0, t_T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ auf $[t_0, t_T] \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 < t_T < \infty$ stetig und so konzipiert, dass das zugehörige homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung $y \equiv 0$ besitzt.

Außerdem existiere ein $m \in \mathbb{R}$, sodass für hinreichend großes $r \in \mathbb{R}$ gilt, dass die mengenwertige Abbildung $F : [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow CK(\mathbb{R}^n)$ auf dem Bereich $[t_0, t_T] \times B(t_0, r)$ oberhalb stetig ist und dass $\max_{f \in F(t, y)} \|f\| \leq m$ für alle $(t, y) \in [t_0, t_T] \times B(t_0, r)$ erfüllt ist.

Dann existiert in $B(t_0, r)$ ein Fixpunkt von τ , welcher durch den Simplicialalgorithmus approximiert werden kann.

Dieser Satz mit entsprechendem Beweis lässt sich finden unter [22].

Die in diesem Satz verwendete Formulierung $\max_{f \in F(t, y)} \|f\| \leq m$ für alle $(t, y) \in [t_0, t_T] \times B(t_0, r)$ bedeutet, dass die mengenwertige Abbildung F auf dem Bereich $[t_0, t_T] \times B(t_0, r)$ betragsmäßig durch m beschränkt ist. Hierbei bezeichnet $B(t_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ die Kugel um den t_0 -Punkt mit Radius r . Außerdem ist $CK(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller konvexen, kompakten, nichtleeren Teilmengen des \mathbb{R}^n . Demnach ist $CK(\mathbb{R}^n)$ eine Teilmenge des $2^{\mathbb{R}^n}$, also der Potenzmenge des \mathbb{R}^n . Der hier erwähnte, sogenannte Simplicialalgorithmus wird in den nächsten Kapiteln genauer beschrieben und erklärt.

Nun eine kurze Erklärung der Bedeutung eines Fixpunktes des mengenwertigen Operators τ anhand eines Beispiels.

5.3.2. Erklärung der Bedeutung eines Fixpunktes des mengenwertigen Operators τ an einem Beispiel

Folgende Zusammenhänge werden im anschließenden Beispiel verwendet werden:

$x(t)$ Fixpunkt von τ

$$\Leftrightarrow x(t) \in \tau x(t)$$

$$\Leftrightarrow x(t) \in \{y(t) \mid y(t) = G\xi(t) + Ha, \xi(t) \in F(t, x(t)) \text{ für fast alle } t \in [t_0, t_T], \\ \xi(t) \in L^1[t_0, t_T]^n\} =: \tau x(t)$$

$$\Leftrightarrow \text{es existiert mindestens ein } \xi(t) \in F(t, x(t)), \text{ sodass } (y(t) =) G\xi(t) + Ha = x(t).$$

Betrachte nun das Beispiel

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot y(t) + F(t, y(t)) \text{ für fast alle } t \in [0, T], \text{ wobei } F(t, y(t)) := y(t) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 + e^T \\ 0 & 1 + e^T \end{pmatrix} \cdot y(0) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot y(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\text{also } A(t) := \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M := \begin{pmatrix} 1 & 1 + e^T \\ 0 & 1 + e^T \end{pmatrix} \text{ und } N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt offensichtlich $M, N, A(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $A(t)$ auf $[0, T]$ stetig.

Für den zugehörigen mengenwertigen Operator τ aus 5.18 gilt:

$$\begin{aligned} \tau : C[0, T]^2 \rightarrow 2^{C[0, T]^2}, \quad x(t) \mapsto \\ \left\{ y(t) \mid y(t) = \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\int_0^T \begin{pmatrix} 0 & e^{T-\tau} \\ 0 & e^{T-\tau} \end{pmatrix} \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1-\tau \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi(t) \in F(t, x(t)) := x(t) \text{ für fast alle } t \in [0, T], \xi(t) \in L^1[0, T]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die detaillierte Berechnung dieses Operators τ findet sich im Anhang A.

Angenommen, der in den nächsten Kapiteln genauer beschriebene, sogenannte Simplicialalgorithmus hat für das obige Beispiel zu dem mengenwertigen Operator τ den Fixpunkt $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ geliefert, so bedeutet dies:

Wendet man den, dem Beispiel entsprechenden, Operator τ aus 5.25 auf dieses $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ an, d.h. erzeugt man das Bild von $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ unter τ , so erhält man eine Menge, in welcher $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ wieder enthalten ist.

Hierbei bedeutet das Anwenden des Operators τ auf $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, dass dieses

$x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ in die konkrete Abbildungsvorschrift $F(t, x(t))$ innerhalb der Formulierung von τ eingesetzt wird und anschließend im Prinzip für jedes mögliche $\xi(t) \in F\left(t, \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, die folgende Formel aus τ durchgerechnet wird:

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\int_0^T \begin{pmatrix} 0 & e^{T-\tau} \\ 0 & e^{T-\tau} \end{pmatrix} \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1-\tau \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} \cdot \xi(\tau) d\tau \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\hat{=} G\xi(t) + H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}). \quad (5.26)$$

War das $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ tatsächlich ein Fixpunkt, so ist $\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Menge aller, durch obige Formel 5.25 erzeugten, $y(t)$ enthalten, d.h. es gibt mindestens ein solches $\xi(t) \in F\left(t, \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, für welches die Formel 5.25 wieder das ursprüngliche $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert, also für welches $y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} (= x(t))$ gilt.

Dieser Zusammenhang soll nun konkret für das betrachtete Beispiel durchgerechnet werden:

Setze hierfür $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ in die Abbildungsvorschrift $F(t, x(t))$ ein, d.h.

$F(t, x(t)) = F\left(t, \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}\right) \stackrel{F(t, x(t)) := x(t)}{=} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$. Folglich stellt hier $\xi(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ die

einzigste Möglichkeit für eine Wahl von $\xi(t) \in F\left(t, \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ für fast alle $t \in [0, T]$ mit $\xi(t) \in L^1[0, T]^n$ dar.

Unter Verwendung der linearen Operatoren G und H , siehe A.9 bzw. A.10, folgt

daraus:

$$\begin{aligned}
 \tau x(t) &= \tau \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def. } \tau}{=} G\xi(t) + H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Wahl } \xi(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}}{=} G \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\int_0^T \begin{pmatrix} 0 & e^{T-\tau} \\ 0 & e^{T-\tau} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^\tau \\ 0 \end{pmatrix} d\tau + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1-\tau \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^\tau \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \right] \\
 &\quad + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\int_0^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau + \int_0^t \begin{pmatrix} e^\tau \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\int_0^t \begin{pmatrix} e^\tau \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} e^\tau \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_0^t \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= x(t)
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Folglich gilt: $x(t) \in \tau x(t)$ für $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es existiert also ein $\xi(t) \in F\left(t, \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, sodass $G\xi(t) + Ha = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, nämlich

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Demnach ist $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ tatsächlich ein Fixpunkt von τ .

Kurz zusammengefasst bedeutet dies:

Setze ein konkretes $\underline{x}(t)$ in $F(t, \underline{x}(t))$ ein, wähle $\xi(t) \in F(t, \underline{x}(t))$ und berechne anschließend $y(t) = G\xi(t) + Ha$ für jedes mögliche $\xi(t)$. Falls für mindestens ein $\xi(t) \in F(t, \underline{x}(t))$ dann $y(t) = \underline{x}(t)$ gilt, so war $\underline{x}(t)$ ein Fixpunkt von τ .

5.3.3. RWP eines nichtlinearen Differentialinklusionssystems als Fixpunktproblem von τ

Um den Zusammenhang zwischen dem Randwertproblem einer nichtlinearen Differentialinklusion, zu welchem das ursprüngliche Optimalsteuerungsproblem mittlerweile transformiert wurde, und dem eben definierten Operator τ herauszustellen, wird nun der folgende Satz formuliert:

Satz 3 *Jeder Fixpunkt des mengenwertigen Operators τ aus 5.23 entspricht einer Lösung des Randwertproblems der nichtlinearen Differentialinklusion 1.Ordnung aus 5.22.*

Beweis:

Sei x ein Fixpunkt von τ aus 5.23. D.h. der mengenwertige Operator τ , angewandt auf x , liefert eine Menge, in welcher auch wieder x selbst liegt, also $\tau x \ni x$.

Ausführlicher formuliert bedeutet dies:

$$\begin{aligned} x(t) \in \{y(t) \mid y(t) = G\xi(t) + Ha, \xi(t) \in F(t, x(t)) \text{ für fast alle } t \in [t_0, t_T], \\ \xi(t) \in L^1[t_0, t_T]^n\} =: \tau x(t), \end{aligned} \quad (5.28)$$

d.h. es existiert mindestens ein $\xi(t) \in F(t, \underline{x}(t))$ für fast alle $t \in [t_0, t_T]$ mit $\xi(t) \in L^1[t_0, t_T]^n$, sodass $(y(t) =) G\xi(t) + Ha = \underline{x}(t)$.

Um zu verdeutlichen, dass es sich bei dem in F eingesetzten und dem aus $G\xi(t) + Ha$ dann erhaltenen $x(t)$ um das gleiche $x(t)$ handelt, wurde dieses hier als $\underline{x}(t)$ markiert. $G\xi(t) + Ha$ liefert per Definition, bzw. entsprechend der Herleitung, eine Lösung $y(t)$ des linearen Randwertproblems

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y(t) + \xi(t) & \text{für fast alle } t \in [t_0, t_T] \\ M \cdot y(t_0) - N \cdot y(t_T) = a. \end{cases} \quad (5.29)$$

Da nun also $G\xi(t) + Ha = x(t)$ ergibt für ein $\xi(t) \in F(t, x(t))$, so löst $x(t)$ das obige lineare Randwertproblem 5.29, d.h.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + \xi(t) & \text{für fast alle } t \in [t_0, t_T] \\ M \cdot x(t_0) - N \cdot x(t_T) = a \end{cases} \quad (5.30)$$

und da $\xi(t) \in F(t, x(t))$ ist, gilt offensichtlich auch

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in A(t) \cdot x(t) + F(t, x(t)) & \text{für fast alle } t \in [t_0, t_T] \\ M \cdot x(t_0) - N \cdot x(t_T) = a. \end{cases} \quad (5.31)$$

D.h. $x(t)$ löst das Randwertproblem der nichtlinearen Differentialinklusion 1.Ordnung aus 5.22:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in A(t) \cdot y(t) + F(t, y(t)) & \text{für fast alle } t \in [t_0, t_T] \\ M \cdot y(t_0) - N \cdot y(t_T) = a, \end{cases} \quad (5.32)$$

q.e.d.

Sind die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt, so besitzt nach Satz 2 der, zu einem nichtlinearen Differentialinklusionssystem 1.Ordnung gehörende, Operator τ einen Fixpunkt, welcher durch den, in den nächsten beiden Kapiteln beschriebenen, Simplicialalgorithmus approximiert werden kann. Nach Satz 3 entspricht dieser Fixpunkt dann gerade einer Lösung der zugrundeliegenden nichtlinearen Differentialinklusion 1.Ordnung.

Ein entsprechend 5.22 gegebenes RWP eines nichtlinearen Differentialinklusionssystem 1.Ordnung kann also gelöst werden, indem man den zugehörigen Operator τ aufstellt und anschließend mittels Simplicialalgorithmus einen Fixpunkt zu diesem approximiert. Dieser entspricht nach Satz 3 dann der Lösung des ursprünglichen RWP.

Ein Randwertproblem eines nichtlinearen Differentialinklusionssystems 1.Ordnung entsprechend 5.22 lässt sich folglich auf ein Fixpunktproblem eines mengenwertigen Operators und dadurch für ein jeweils konkret betrachtetes $x(t)$ im Prinzip zu einem Randwertproblem eines linearen, inhomogenen Differentialgleichungssystems reduzieren, siehe Formel 5.21 inklusiver darauf folgendem Textabschnitt.

Es ist leicht ersichtlich, dass das eigentlich zu lösende Randwertproblem 4.22 aus dem vorherigen Kapitel genau der hier in 5.22 erwähnten Form einer nichtlinearen Differentialinklusion entspricht. Folglich ist dieses Problem entsprechend dem mengenwertigen Operator 5.23 umzuformen. Aufgrund der in 4.14 dem System hinzugefügten Kovariable \mathbf{p} und der daraus resultierenden doppelten Anzahl an Komponenten bzw. Dimensionen, sind hierfür kleine Anpassungen an diesem Operator τ nötig. Verwende weiterhin die linearen Operatoren entsprechend 5.15 und 5.16, jedoch nun auf folgenden Räumen: $G : L^1[t_0, t_T]^{2n} \rightarrow C[t_0, t_T]^{2n}$ und $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow C[t_0, t_T]^{2n}$. Für das zu dem RWP 4.22 gehörende τ gilt nun, vgl.[22]:

$$\tau : C[t_0, t_T]^{2n} \rightarrow 2^{C[t_0, t_T]^{2n}},$$

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{array} \right) \mapsto \{ \mathbf{y}(t) \mid \mathbf{y}(t) = GF(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) + Ha, \\ \mathbf{u}(t) \in R(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \text{ für fast alle } t \in [t_0, t_T], \mathbf{u}(t) \in L^1[t_0, t_T]^m \}.$$

(5.33)

Die genauen Erklärungen der hier verwendeten Komponenten lassen sich finden unter Abschnitt 4.5.

Statt jeweils ein $\xi(t) \in F(t, \underline{\mathbf{x}}(t))$ zu wählen, wird hierbei jeweils ein $\mathbf{u}(t) \in R(t, \underline{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t))$ gewählt und dieses anschließend in F eingesetzt. Es sei hier angemerkt, dass R nur für singuläres $\mathbf{u}(t)$ mengenwertig ist. Für Zeitabschnitte ohne singuläre Steuerung ist $\mathbf{u}(t)$ durch $R(t, \underline{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t))$ bereits eindeutig festgelegt.

Sind zu dem Randwertproblem 4.22, mit fest vorgegebenen Randwerten, gewisse Voraussetzungen erfüllt, wie die Kompaktheit des Steuerbereiches \mathbb{U} , die Stetigkeit der Abbildung $F : [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ und die Tatsache, dass $F(y, R(y))$ für alle $y \in [t_0, t_T] \times \mathbb{R}^{2n}$ konvex und beschränkt ist, so existiert nach [22] und [25] ein Fixpunkt zu dem nun angepassten Operator τ . Dieser Fixpunkt entspricht dann gerade

einer möglichen Lösung des Randwertproblems eines nichtlinearen Differentialinklusionssystems 1.Ordnung aus dem vorherigen Kapitel.

Um das Fixpunktproblem des mengenwertigen Operators τ nun zu lösen, beginnt der später beschriebene Simplicialalgorithmus mit einem konkret vorgegebenen Startpunkt $\mathbf{c}(t)$, welcher eine beliebige Schätzung für einen Fixpunkt von τ darstellt, also $\mathbf{c}(t) \sim \tau\mathbf{c}(t) = F(t, \mathbf{c}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) + Ha$.

Um diesen Startpunkt herum wird dann ein sogenanntes vollständig markiertes n -Simplex aufgebaut. Bei diesem beginnend, geht der Algorithmus anschließend in immer wieder neue, vollständig markierte n -Simplizes über, bis er in einem vollständig markierten Simplex am Rand angelangt.

In jedem dieser durchlaufenen Simplizes liegt jeweils ein immer besser approximierter Fixpunkt. Da der beste approximative Fixpunkt folglich am Rand liegt, wird dieser nun, im Gegensatz zu den vorhergehenden, konkret berechnet. Ist dieser approximative Fixpunkt $\mathbf{x}^*(t)$ ermittelt, so ist dessen Approximationsfehler zu bestimmen. Hierfür setze $\mathbf{x}^*(t)$ als $\mathbf{x}(t)$ in F ein und berechne

$$\mathbf{y}(t) = GF(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) + Ha. \quad (5.34)$$

Im Falle eines exakten Fixpunktes $\mathbf{x}^*(t)$ würde gelten:

$$\mathbf{y}(t) = GF(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) + Ha = \mathbf{x}^*(t). \quad (5.35)$$

Aus diesem Grund liefert $\mathbf{x}^*(t) - GF(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) + Ha$ gerade den Approximationsfehler eines approximativen Fixpunktes $\mathbf{x}^*(t)$. Anschließend kommt es gegebenenfalls zu einem Restart des Algorithmus, um eine noch bessere Approximation zu bestimmen.

Im Verlauf des Algorithmus muss die Abbildung $GF(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) + Ha$ nur an den Ecken eines jeweiligen Simplizes bzw. gegebenenfalls zusätzlich für den enthaltenen approximativen Fixpunkt ausgewertet werden.

D.h. $GF(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) + Ha$ wird für verschiedene, feste Werte $\mathbf{x}(t)$ ausgerechnet und auf mögliche Fixpunkte überprüft. Für ein festes $\mathbf{x}(t)$ ist $GF(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) + Ha$ nach 5.21 linear. Demnach ist hier also ein Fixpunkt einer, auf einem jeweiligen Simplex linearen, Abbildung $GF(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) + Ha$ zu bestimmen. Dies entspricht gerade den späteren Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Simplicialalgorithmus: Die zu untersuchende Problemfunktion muss stückweise affin sein. Folglich kann der Simplicialalgorithmus auf die hier betrachtete Problemfunktion $GF(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t)) + Ha$ und damit zur Bestimmung eines Fixpunktes des mengenwertigen Operators τ angewandt werden.

Zusammenfassend lässt sich also folgende Vorgehensweise für das Lösen eines entsprechend 4.2 vorliegenden Optimalsteuerungsproblems formulieren:

Ein entsprechend Abschnitt 4.2 aus Kapitel 4 gegebenes Optimalsteuerungsproblem wird als erstes, unter Verwendung der notwendigen Bedingungen aus dem Pontryagin'schen Maximumprinzip, in ein Randwertproblem eines nichtlinearen Differentialinklusionssystems 1.Ordnung, siehe 4.22 Kapitel 4 transformiert. Anschließend wird für dieses System der, entsprechend 5.23 bzw. 5.33 definierte, mengenwertige Operator

5.3. Lösen eines RWP zu einem nichtlinearen Differentialinklusionssystem 1.Ordnung

τ aufgestellt. Da ein Fixpunkt dieses Operators gerade einer Lösung des Randwertproblems entspricht, lässt sich das Randwertproblem nun auf ein Fixpunktproblem des Operators τ reduzieren. Der gesuchte Fixpunkt kann dann mittels Simplicialalgorithmus approximiert werden und entspricht folglich einer möglichen Lösung des ursprünglichen Optimalsteuerungsproblems.

Grundlage dieses Kapitels waren [22], [25] und [28].

Kapitel 6.

Grundlagen und Definitionen zum Simplizialalgorithmus

Im folgenden Kapitel sollen, nach einer kurzen Beschreibung des Simplizialalgorithmus, die nötigen mathematischen Grundlagen zu diesem erklärt werden. Hierzu gehören lineare bzw. affine Unabhängigkeit, Simplizes, Triangulationen, affine Funktionen, Pivotisierung, LP-Basen und Markierungen einer Triangulation.

6.1. Allgemeine Beschreibung des Simplizialalgorithmus

Bei einem Simplizialalgorithmus geht es darum, den Lösungsraum zu triangulieren, also in Simplizes zu zerlegen, und auf diesem eine Lösung zu dem gegebenen Problem zu approximieren.

Hierbei wird ausgehend von einem vollständig markierten Startsimplex zu einem eindeutig bestimmten, vollständig markierten, benachbarten Simplex übergegangen und von diesem ausgehend wieder zu einem geeigneten benachbarten Simplex. Dies führt man solange durch, bis man auf ein vollständig markiertes Simplex am Rand der Triangulation stößt. In letzterem liegt die in diesem Durchlauf beste approximative Lösung. Ist die Approximation jedoch noch nicht ausreichend genau, wird sooft ein sogenannter Restart durchgeführt, bis der Approximationsfehler die vorgegebene Schranke nicht mehr überschreitet. Bei einem Restart wird der Algorithmus mit der zuvor berechneten, approximativen Lösung als Startwert und einem geringeren Triangulationsdurchmesser ausgeführt.

Genau genommen bezeichnet ein Simplizialalgorithmus eigentlich nur die Vorgehensweise bis zum Erreichen des Simplizes am Rand der Triangulation. Ausgehend von diesem und unter Verwendung diverser Sätze, wird dann in einem nächsten Schritt eine dem zugrunde liegenden Problem entsprechende Lösung berechnet. Um gewisse Anforderungen an die Qualität, also die Genauigkeit, der Lösung erfüllen zu können, kommt es anschließend zu einem Restart-Schritt, in welchem ein Algorithmus im Allgemeinen unter gewissen Veränderungen der Ausgangssituation erneut ausgeführt wird. Der hier speziell beschriebene Restart entspricht der von O.H. Merrill vorgeschlagenen Variante. Der Einfachheit wegen wird im Folgenden jedoch das gesamte Vorgehen als Simplizialalgorithmus bezeichnet.

6.2. Lineare Unabhängigkeit, affine Unabhängigkeit und affine Hülle

Für $m \in \mathbb{N}$ seien $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ und v^0, \dots, v^m Elemente eines \mathbb{R} -Vektorraums, kurz \mathbb{R} -VR (z.B. $v^0, \dots, v^m \in \mathbb{R}^2$).

Dann definiere:

Die Elemente v^0, v^1, \dots, v^m sind linear unabhängig

$$:\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^m \lambda_i v^i = 0 \Rightarrow (\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0) \right), \quad (6.1)$$

d.h. genau dann, wenn die sogenannte Linearkombination der Elemente v^0, v^1, \dots, v^m nur genau dann den Nullvektor ergibt, falls alle $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ gleich Null sind.

Die Elemente v^0, v^1, \dots, v^m heißen linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig sind, d.h. falls es $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ gibt mit mindestens einem $\lambda_i \neq 0$ für $i \in \{0, \dots, m\}$, sodass

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i v^i = 0.$$

Die Elemente v^0, v^1, \dots, v^m sind affin unabhängig

$$\begin{aligned} &:\Leftrightarrow \left(\left(\sum_{i=0}^m \lambda_i v^i = 0 \wedge \sum_{i=0}^m \lambda_i = 0 \right) \Rightarrow (\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0) \right), \text{ d.h.} \\ &\Leftrightarrow v^1 - v^0, v^2 - v^0, \dots, v^m - v^0 \text{ linear unabhängig.} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Betrachtet man die Definitionen zu linearer Unabhängigkeit und affiner Unabhängigkeit, so fällt auf, dass linear unabhängige Elemente eines \mathbb{R} -Vektorraums auch affin unabhängig sind. Die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht. So sind beispielsweise die zwei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ affin unabhängig, aber offensichtlich linear abhängig.

Das Element v ist affine Kombination von v^0, v^1, \dots, v^m

$$:\Leftrightarrow v = \sum_{i=0}^m \lambda_i v^i \text{ mit } \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1. \quad (6.3)$$

Sei S Teilmenge eines \mathbb{R} -Vektorraums und $v^0, \dots, v^m \in S$, dann bezeichne

$$aff(S) := \{v \in \mathbb{R}\text{-VR} \mid v \text{ affine Kombination von endlich vielen Elementen aus } S\} \quad (6.4)$$

die affine Hülle von S .

6.3. Simplizes

Für die Definition von Simplizes sind Begriffe wie das Innere oder die konvexe Hülle einer Menge nötig und sollen daher an dieser Stelle kurz erklärt werden.

Für das Innere einer Menge M gilt: $inn(M) = \{x \in M \mid x \notin \theta M\}$ mit dem Rand $\theta M = \{x \in M \mid \forall \delta > 0 \exists y \notin M : y \in U_\delta(x)\}$, d.h. der Rand von M , besteht aus genau den Elementen von M , zu welchen in jeder noch so kleinen Umgebung um das jeweilige Element immer mindestens ein Punkt liegt, der nicht zur Menge M gehört. Damit besteht also das Innere einer Menge aus allen Elementen der Menge, die nicht auf deren Rand liegen.

Außerdem ist $cov\{M\}$, die konvexe Hülle einer Menge M , definiert als die kleinste konvexe Menge, welche alle Elemente der ursprünglichen Menge enthält. Eine konvexe Menge ist dabei definiert als eine Menge von Elementen, zu welchen die Verbindungsstrecke zwischen jeweils zwei Elementen der Menge ebenfalls komplett in der Menge enthalten ist.

Seien nun $m, n, k \in \mathbb{N}, k \leq m$ und $v^0, \dots, v^m \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig.

Dann bezeichne das Innere der konvexen Hülle von $\{v^0, \dots, v^m\}$ als offenes m -Simplex σ und schreibe $\sigma = \langle v^0, \dots, v^m \rangle$. Ein offenes Simplex $\langle v^0, \dots, v^m \rangle$ ist also gerade die kleinste konvexe Menge, welche die Elemente v^0, \dots, v^m enthält.

Des Weiteren nenne den Abschluss von σ , also die konvexe Hülle $cov\{v^0, \dots, v^m\}$ selbst, abgeschlossenes m -Simplex und schreibe $\bar{\sigma} = [v^0, \dots, v^m]$.

Die Elemente v^0, \dots, v^m werden hierbei die Ecken von σ genannt und E_σ sei die Menge aller Ecken des Simplex σ .

Demnach ist ein abgeschlossenes (offenes) 0-Simplex ein Punkt, ein abgeschlossenes (offenes) 1-Simplex eine (offene) Strecke, ein abgeschlossenes (offenes) 2-Simplex (das Innere) ein(es) Dreieck(s) und ein abgeschlossenes (offenes) 3-Simplex (das Innere) ein(es) Tetraeder(s). Dies ist graphisch in der folgenden Abbildung dargestellt, vgl. [29]:

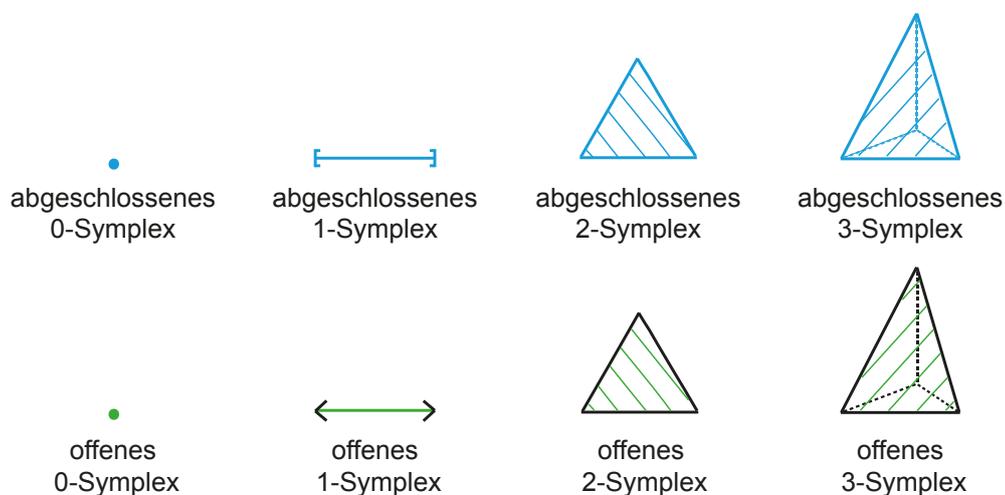


Abb. 6.1.: Beispiel verschiedener Simplizes

Im Folgenden bezeichne der Begriff „Simplex“ immer ein offenes Simplex.

Ist $\langle v^0, \dots, v^m \rangle$ ein m -Simplex, so bezeichne jedes k -Simplex $\langle v^{i_0}, \dots, v^{i_k} \rangle$ mit $\{v^{i_0}, \dots, v^{i_k}\} \subset \{v^0, \dots, v^m\}$ als k -Seite des m -Simplex $\langle v^0, \dots, v^m \rangle$.

Es folgt ein Satz über den Zusammenhang zwischen einem abgeschlossenen und den zugehörigen offenen Simplizes:

Satz 4 *Das abgeschlossene Simplex $\bar{\sigma}$ wird durch die Seiten des offenen Simplex σ partitioniert.*

Dies soll nun an einem Beispiel verdeutlicht werden, vgl. [29]:

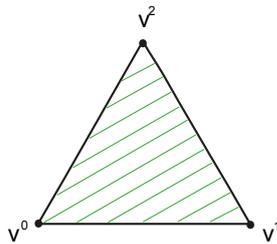


Abb. 6.2.: Beispiel 2-Simplex

Das hier dargestellte Simplex $\sigma = \langle v^0, v^1, v^2 \rangle$ ist ein 2-Simplex, d.h. das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten v^0, v^1, v^2 . Es lässt sich leicht erkennen, dass $\bar{\sigma}$, also das abgeschlossene Dreieck, durch die Seiten von σ partitioniert wird, denn $\langle v^0, v^1, v^2 \rangle$ ist die 2-Seite zu σ , also das Innere des Dreiecks, $\langle v^0, v^1 \rangle$, $\langle v^1, v^2 \rangle$ und $\langle v^2, v^0 \rangle$ sind die 1-Seiten zu σ , also jeweils die offene Strecke zwischen zwei Ecken und $\langle v^0 \rangle$, $\langle v^1 \rangle$ und $\langle v^2 \rangle$ sind die 0-Seiten zu σ , also die Eckpunkte v^0, v^1 und v^2 .

Außerdem heißen zwei m -Simplizes genau dann benachbart, wenn es ein $(m - 1)$ -Simplex gibt, das zu jedem der beiden $(m - 1)$ -Seite ist, d.h. wenn ein $(m - 1)$ -Simplex existiert, dessen Ecken Teilmenge der Ecken sowohl des einen als auch des anderen m -Simplex sind. Dies lässt sich anschaulich an Räumen und Türen eines Gebäudes erklären, wenn man Räume als m -Simplizes und Türen als $(m - 1)$ -Simplizes interpretiert: Zwei Räume heißen nach obiger Definition also genau dann benachbart, wenn sie durch eine Tür miteinander verbunden sind. Die Tür selbst hat mit beiden Räumen Teile gemeinsam, nämlich jeweils die Anteile der Tür, welche man bei geschlossener Tür von dem jeweiligen Raum aus sehen kann.

Bezeichnet σ ein m -Simplex, so bezeichnet σ_i jene $(m - 1)$ -Seite von σ , welche sich hinsichtlich ihrer Ecken um genau die Ecke v^i von σ unterscheidet, d.h. σ_i besitzt alle Ecken aus σ bis auf v^i .

Man sagt σ_i sei die Seite von σ , welche gegenüber von v^i liegt.

6.4. Triangulationen

6.4.1. Definition Triangulation

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $\dim(\text{aff}(C)) = n$. Dann definiere:
 T ist eine Triangulation von C $:\Leftrightarrow$

- (1) T ist eine (nicht zwingend endliche) Ansammlung von Simplexes;
- (2) mit jedem Simplex ist auch jede Seite dieses Simplex in T enthalten;
- (3) zwei Simplexes aus T sind entweder disjunkt oder haben eine gemeinsame Seite;
- (4) ist $K \subset C$ kompakt, dann schneidet K nur endlich viele Simplexes aus T ;
- (5) C ist disjunkte Vereinigung aller Simplexes aus T , d.h. die Simplexes partitionieren C .

Folglich beschreibt eine Triangulation T eine Zerlegung von $C \subset \mathbb{R}^n$ in Simplexes.

Nun ein Beispiel einer Triangulation des folgenden, abgeschlossenen Quadrates zur Verdeutlichung von Punkt (5) der Definition, siehe [29]:

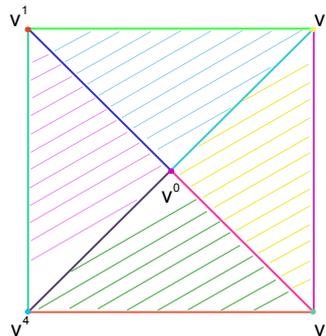


Abb. 6.3.: Beispiel Triangulation eines abgeschlossenen Quadrates

Hier wäre $T = \{\langle v^0, v^1, v^2 \rangle, \langle v^0, v^2, v^3 \rangle, \langle v^0, v^4, v^3 \rangle, \langle v^0, v^1, v^4 \rangle\}$ eine mögliche Triangulation dieses abgeschlossenen Quadrates. In dieser Triangulation sind die folgenden Simplexes enthalten:

die 2-Simplexes $\langle v^0, v^1, v^2 \rangle$, $\langle v^0, v^2, v^3 \rangle$, $\langle v^0, v^4, v^3 \rangle$ und $\langle v^0, v^1, v^4 \rangle$, also das Innere der Dreiecke, die 1-Simplexes $\langle v^0, v^1 \rangle$, $\langle v^1, v^2 \rangle$, $\langle v^2, v^3 \rangle$, $\langle v^3, v^0 \rangle$, $\langle v^0, v^4 \rangle$, $\langle v^1, v^4 \rangle$, $\langle v^2, v^4 \rangle$ und $\langle v^3, v^4 \rangle$, also die offenen Strecken zwischen zwei Ecken, und die 0-Simplexes $\langle v^0 \rangle$, $\langle v^1 \rangle$, $\langle v^2 \rangle$, $\langle v^3 \rangle$ und $\langle v^4 \rangle$, also die Eckpunkte. All diese Simplexes sind offensichtlich disjunkt und ergeben zusammen das abgeschlossene Quadrat, d.h. sie partitionieren das Quadrat.

Des Weiteren sei E_σ die Menge aller Ecken eines Simplex σ und damit $E_T := \{v \mid v \in E_\sigma, \sigma \in T\}$ die Menge aller Ecken aus der Triangulation T , also die Menge aller Ecken aller Simplexes der Triangulation.

Der Triangulationsdurchmesser ist definiert als $\delta = \sup\{\|v^i - v^j\|_2 \mid v^i, v^j \in \sigma, \sigma \in T\}$.¹

Satz 5 Sei T eine Triangulation von $C \subset \mathbb{R}^n$ und σ ein $(n-1)$ -Simplex aus T . Dann gilt, nach [22], entweder

(i) $\sigma \notin \partial T \Rightarrow \sigma$ ist $(n-1)$ -Seite zu genau zwei n -Simplizes aus T
oder

(ii) $\sigma \in \partial T \Rightarrow \sigma$ ist $(n-1)$ -Seite zu genau einem n -Simplex aus T .

Ist also τ ein n -Simplex aus T und σ eine $(n-1)$ -Seite zu τ mit $\sigma \notin \partial T$, d.h. σ liegt nicht auf dem Rand der Triangulation, dann gibt es genau ein anderes n -Simplex $\tilde{\tau}$ aus T , zu welchem σ ebenfalls $(n-1)$ -Seite ist.

Speziell diese Eigenschaft von Triangulationen wird beim Simplicialalgorithmus ausgenutzt. Bei diesem wird immer von einer $(n-1)$ -Seite zu einem zugehörigen n -Simplex übergegangen, also eine Ecke hinzugefügt, und anschließend eine andere Ecke entfernt, d.h. es erfolgt ein Übergang zu einer neuen $(n-1)$ -Seite. Von dieser ausgehend muss dann wieder ein zugehöriges n -Simplex bestimmt werden etc.

Nach obigem Satz gibt es zu einer $(n-1)$ -Seite, welche nicht am Rand der Triangulation liegt, neben dem n -Simplex aus dem vorhergehenden Schritt, also immer ein weiteres n -Simplex, in welches nun übergegangen werden kann. Ein solcher Übergang ist folglich immer möglich. Liegt die $(n-1)$ -Seite am Rand der Triangulation, so gibt es kein weiteres Simplex für einen Übergang. Ein solcher ist hier aber auch gar nicht nötig, da dies bereits das Ende eines Durchlaufs des Simplicialalgorithmus darstellt.

6.4.2. Beispiele für Triangulationen

6.4.2.1. K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^n

Für die Ecken der sogenannten K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^n gilt:

$$E_{K_1} := \{v \mid v \in \mathbb{Z}^n\}, \quad (6.5)$$

d.h. die Ecken dieser Triangulation besitzen ausschließlich ganzzahlige Komponenten.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $v^0 \in \mathbb{R}^n$ eine Ecke der Triangulation. Sei außerdem $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ eine Permutation der natürlichen Zahlen $(1, \dots, n)$ und $\{e^1, \dots, e^n\}$ die Einheits-Basis des \mathbb{R}^n , d.h. $e^1, e^2, \dots, e^n \in \mathbb{R}^n$ und

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann besitzt ein n -Simplex der K_1 -Triangulation allgemein folgende Form:

$$[v^0; \pi] := \langle v^0, v^1, \dots, v^n \rangle \quad \text{mit } v^i := v^{i-1} + e^{\pi(i)} \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (6.6)$$

¹Als Norm wurde die euklidische Norm verwendet

In einem n -Simplex der K_1 -Triangulation unterscheidet sich eine Ecke v^i von der vorhergehenden Ecke v^{i-1} für $i = 1, \dots, n$ also nur in einer Komponente und dort auch nur um genau eine Einheit.

Die Triangulation K_1 ist dann definiert als die Ansammlung aller n -Simplizes $[v^0; \pi]$ von obiger Form 6.6, sowie deren k -Seiten für $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k < n$.

Um eine solche Triangulation zu erzeugen, berechnet man von jeder ganzzahligen Ecke² v^0 ausgehend, für jede mögliche Permutation $\pi_1, \dots, \pi_n!$ mit Hilfe obiger Formel 6.6 alle weiteren Ecken des jeweiligen Simplex. Pro Ecke gibt es offensichtlich $n!$ verschiedene Permutationen und eine Ecke mit fester Permutation liefert genau ein Simplex, d.h. pro Ecke erhält man genau $n!$ Simplizes.

Nun ein kurzes Beispiel, um zu verdeutlichen, wie sich die einzelnen Simplizes der Form $[v^0; \pi]$ speziell für die K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2 berechnen lassen:

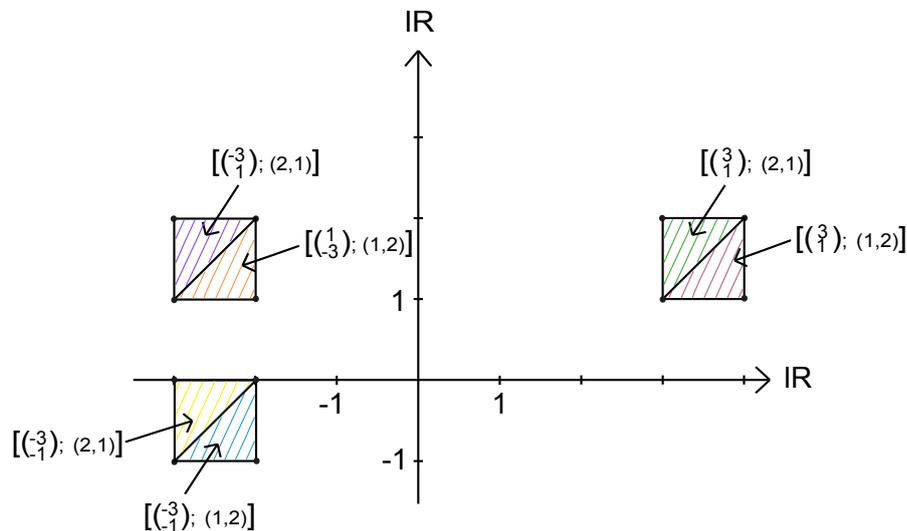


Abb. 6.4.: Beispiel Simplizes der K1-Triangulation des R2

Ein Beispiel für ein 2-Simplex der K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2 wäre: $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; (1, 2) \right]$.

Dieses entsteht durch folgende Rechnung:

$$v^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v^1 = v^0 + e^{\pi(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + e^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v^2 = v^1 + e^{\pi(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + e^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; (1, 2) \right] = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

²Element des \mathbb{R}^n mit ausschließlich ganzzahligen Komponenten

Ein weiteres Beispiel wäre: $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; (2, 1) \right]$, d.h.

$$v^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v^1 = v^0 + e^{\pi(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + e^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$v^2 = v^1 + e^{\pi(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + e^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; (1, 2) \right] = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Mit diesen und analogen Rechnungen für $v^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; (1, 2) \right]$ liefert das Simplex $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, also das Innere des in

der obigen Abbildung rechten Dreiecks von $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus gesehen,

$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; (2, 1) \right]$ liefert das Simplex $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, also das Innere des

linken Dreiecks von $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus gesehen,

$\left[\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}; (1, 2) \right]$ liefert das Simplex $\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, also das Innere

des rechten Dreiecks von $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus gesehen,

$\left[\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}; (2, 1) \right]$ liefert das Simplex $\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, also das Innere

des linken Dreiecks von $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus gesehen,

$\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}; (1, 2) \right]$ liefert das Simplex $\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, also das Innere

des rechten Dreiecks von $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus gesehen,

$\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}; (2, 1) \right]$ liefert das Simplex $\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, also das Innere

des linken Dreiecks von $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus gesehen.

Analog lassen sich weitere 2-Simplizes der K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2 , ausgehend von Elementen des \mathbb{R}^2 mit ganzzahligen Komponenten, berechnen.

In K_1 sind neben diesen Simplizes außerdem auch alle 0- und 1-Seiten der einzelnen Simplizes enthalten.

Die K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2 besteht also aus den Inneren aller Dreiecke obiger Art, den offenen Strecken zwischen den Ecken dieser Dreiecke, sowie den Eckpunkten der Dreiecke, also den Elementen des \mathbb{R}^2 mit ausschließlich ganzzahligen Komponenten.

Zur Veranschaulichung folgt eine graphische Darstellung der K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2 , vgl. [22]:

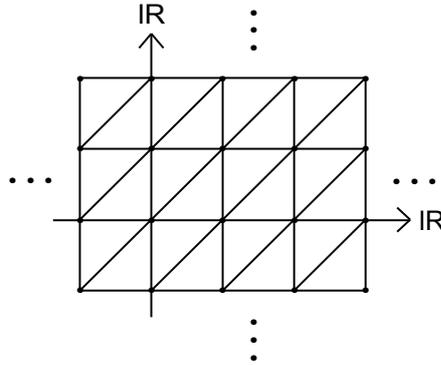


Abb. 6.5.: K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2

Wie sich leicht nachrechnen lässt, besitzt die K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^n einen Triangulationsdurchmesser von \sqrt{n} .

Speziell für den \mathbb{R}^2 ergibt dies also einen Triangulationsdurchmesser von $\sqrt{2}$, welcher gerade der Länge der Diagonale in einem Quadrat mit Seitenlänge 1 entspricht und damit offensichtlich genau mit der vorliegenden Situation übereinstimmt.

6.4.2.2. $K(\delta)$ -Triangulation des \mathbb{R}^n

Die $K(\delta)$ -Triangulation des \mathbb{R}^n mit $\delta > 0$ wird analog der K_1 -Triangulation definiert, jedoch mit dem Triangulationsdurchmesser $\sqrt{n} \cdot \delta$, vgl. [22].

Für die Ecken der $K(\delta)$ -Triangulation gilt:

$$E_{K(\delta)} := \{\delta \cdot v \mid v \in \mathbb{Z}^n\}, \quad (6.7)$$

d.h. die Komponenten der Simplexecken sind jeweils ganzzahlige Vielfache von δ .

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $v^0 \in \mathbb{R}^n$ eine Ecke der Triangulation. Sei außerdem $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ eine Permutation der natürlichen Zahlen $(1, \dots, n)$ und $\{e^1, \dots, e^n\}$ die Einheits-Basis des \mathbb{R}^n .

Dann besitzt ein n -Simplex der $K(\delta)$ -Triangulation allgemein folgende Form:

$$[v^0; \pi] := \langle v^0, v^1, \dots, v^n \rangle \text{ mit } v^i := v^{i-1} + \delta \cdot e^{\pi(i)} \text{ für } i = 1, \dots, n. \quad (6.8)$$

In einem n -Simplex der $K(\delta)$ -Triangulation unterscheidet sich eine Ecke v^i von der vorhergehenden Ecke v^{i-1} für $i = 1, \dots, n$ also nur in einer Komponente und dort um genau δ , d.h. die beiden Ecken haben einen Abstand von δ .

$K(\delta)$ ist dann definiert als die Ansammlung aller n -Simplizes $[v^0; \pi]$ der Form 6.8, sowie deren k -Seiten für $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k < n$.

Es lässt sich erkennen, dass die $K(\delta)$ -Triangulation eine Erweiterung der K_1 -Triangulation darstellt. Für $\delta = 1$ entspricht $K(\delta)$ gerade K_1 .

6.4.2.3. Spezielle Triangulation

Sei T eine Triangulation des $[0, 1] \times C$ mit $C \subset \mathbb{R}^n$ und $E_T \subset (\{0\} \times C) \cup (\{1\} \times C)$, dann bezeichne T als spezielle Triangulation, vgl. [22].

Eine Ecke v dieser Triangulation besitzt also folgende allgemeine Form:

$$v = \begin{pmatrix} \lambda \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \{0, 1\} \text{ und } \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in C, \quad (6.9)$$

d.h. die jeweils erste Komponente einer Ecke trägt entweder den Wert 0 oder den Wert 1.

Der hier zu triangulierende Raum $[0, 1] \times C$ ist im Prinzip der \mathbb{R}^{n+1} , da $[0, 1] \times C \subset \mathbb{R}^{n+1}$, jedoch in einer Dimension eingeschränkt auf Werte in dem Bereich zwischen 0 und 1. Aus diesem Grund können die Ecken einer zugehörigen speziellen Triangulation gar keine Werte außerhalb dieses Bereichs annehmen.

Eine spezielle Triangulation lässt sich aus jeder beliebigen Triangulation des \mathbb{R}^{n+1} erzeugen.

So lässt sich beispielsweise die K_1 -Triangulation zur speziellen Triangulation \tilde{K}_1 reduzieren. Ist K_1 eine Triangulation des \mathbb{R}^{n+1} , dann ist \tilde{K}_1 definiert als die Beschränkung von K_1 auf $[0, 1] \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und damit per Definition eine spezielle Triangulation. Hierbei sind also als jeweils erste Komponente der Simplexecken nur noch ausschließlich die Werte 0 und 1 zugelassen. In \tilde{K}_1 liegen folglich genau die Simplizes aus \tilde{K}_1 , deren Ecken als erste Vektorkomponente den Wert $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ tragen.

In der folgenden Abbildung ist die spezielle Triangulation \tilde{K}_1 des \mathbb{R}^2 dargestellt. Hier erkennt man deutlich, dass diese Grafik tatsächlich im Prinzip der Abbildung mit der K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2 entspricht, jedoch in einer der beiden Dimensionen eingeschränkt auf den Bereich zwischen 0 und 1.

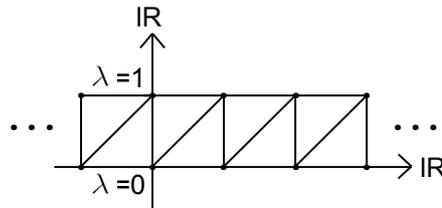


Abb. 6.6.: \tilde{K}_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2

Analog lässt sich auch die Triangulation $K(\delta)$ des \mathbb{R}^{n+1} in eine spezielle Triangulation transformieren. Dabei ist folgender Zusammenhang erkennbar:

$$\tilde{K}(\delta) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \delta v_1 \\ \vdots \\ \delta v_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \lambda \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \sigma, \sigma \in \tilde{K}_1 \right) \right\}. \quad (6.10)$$

Gerade diese spezielle Triangulation $\tilde{K}(\delta)$ ist für die Anwendung des Simplicialalgorithmus auf das Rendezvous- und Docking-Optimalsteuerungsproblem gut geeignet.

6.5. Affine Funktionen

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $C, D \subset \mathbb{R}^n$ und T eine Triangulation von C . Dann definiere:

Eine Abbildung $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt affin auf D $:\Leftrightarrow$

es existiert eine lineare Abbildung $\tilde{g} : aff(D) \rightarrow \mathbb{R}^m$ und ein $c \in \mathbb{R}^m$, sodass $g(x) = \tilde{g}(x) + c \forall x \in D$.

Eine Abbildung $f : C \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt stückweise affin bezüglich T $:\Leftrightarrow$

f ist auf jedem Simplex $\sigma \in T$ affin.

Unter Verwendung dieser Definitionen lassen sich folgende Aussagen treffen, welche in [22] bewiesen wurden:

Satz 6 Zu jedem $x \in \sigma = \langle v^0, v^1, \dots, v^n \rangle \in T$ gibt es eindeutig bestimmte $\alpha^i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, \dots, n$ mit $\alpha^i \geq 0$ und $\sum_{i=0}^n \alpha^i = 1$, sodass

$$x = \sum_{i=0}^n \alpha^i \cdot v^i.$$

Mit genau diesen $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^n$ gilt dann für jede auf σ affine Abbildung $g : \sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$g(x) = \sum_{i=0}^n \alpha^i \cdot g(v^i).$$

Jedes Element $x \in \mathbb{R}^n$ aus dem Inneren eines Simplex $\sigma \in T$ lässt sich also als eindeutig bestimmte, gewichtete Summe der Werte v^0, v^1, \dots, v^n an den Ecken von σ darstellen. Verwendet man nun in genau dieser gewichteten Summe, anstatt der Werte an den Ecken, die Funktionswerte einer auf σ affinen Funktion an den Ecken, so ergibt diese neue Summe gerade den Funktionswert des ursprünglichen Elements für die affine Funktion. Folglich genügt es, die Funktionswerte einer stückweise affinen Funktion f auf den Ecken der Triangulation T von C zu kennen, um alle Funktionswerte von f an jeder Stelle von C eindeutig bestimmen zu können. Die Funktion lässt sich also an jeder Stelle innerhalb eines beliebigen Simplex aus T allein aus deren

Werten an den Ecken dieses Simplex berechnen.

Speziell diese Tatsache wird im Simplicialalgorithmus ausgenutzt, da es ausreicht eine jeweilige Funktion an den Ecken der Triangulation zu betrachten, es also nicht nötig ist die gesamte Funktion anzugeben und zu untersuchen. Es müssen also nur die Werte an den Ecken ausgewertet werden und es sind dennoch indirekt alle Informationen der gesamten Funktion enthalten.

Aus diesem Grund muss später die Funktion, zu welcher hier ein Fixpunkt mit Hilfe des Simplicialalgorithmus bestimmt werden soll, stückweise affin sein. Auch die sogenannten Markierungsfunktion wird später stückweise affin sein und muss daher nur an den Ecken der Triangulation untersucht werden, um alle nötigen Informationen zu liefern.

6.6. Pivotisierung

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und T eine Triangulation des \mathbb{R}^n .

Sei außerdem $\sigma = \langle v^0, \dots, v^{k-1}, v^k, v^{k+1}, \dots, v^n \rangle \in T$ ein n -Simplex und $\tau = \langle v^0, \dots, v^{k-1}, v^{k+1}, \dots, v^n \rangle$ eine $(n-1)$ -Seite zu σ , welche nicht auf dem Rand der Triangulation liegt, d.h. $\tau \notin \partial T$.

Dann existiert nach Satz 5 genau ein weiteres n -Simplex $\tilde{\sigma}$ aus T , zu welchem τ ebenfalls $(n-1)$ -Seite ist, d.h. es existiert genau eine Ecke $\tilde{v}^k \neq v^k$, sodass $\tilde{\sigma} = \langle v^0, \dots, v^{k-1}, \tilde{v}^k, v^{k+1}, \dots, v^n \rangle$ dieses n -Simplex aus T ist, zu welchem τ offensichtlich auch $(n-1)$ -Seite ist.

Man sagt v^k wird in $\tilde{\sigma}$ hinein pivotisiert.

Betrachte als Beispiel die K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2 und hier speziell das 2-Simplex σ , also in der Zeichnung das blau markierte offene Dreieck, und die 1-Seite τ zu diesem, also die grün markierte offene Strecke zwischen zwei Eckpunkten von σ .

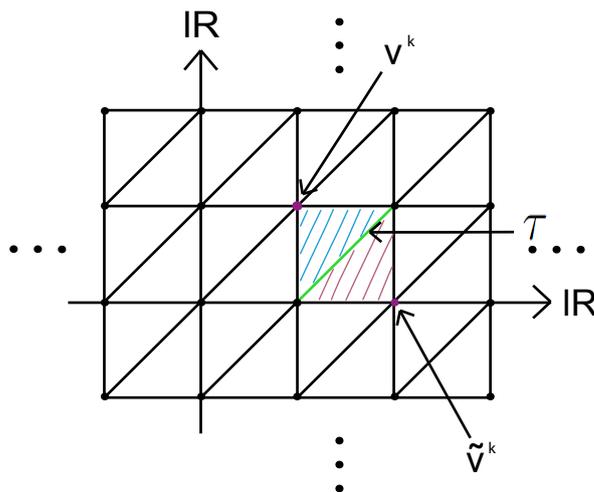


Abb. 6.7.: Pivotisieren bei K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2

Es lässt sich auf der Abbildung leicht erkennen, dass es in dieser Triangulation neben

σ genau ein weiteres 2-Simplex gibt, zu welchem τ ebenfalls 1-Seite ist, nämlich genau das, in der Zeichnung lila markierte offene Dreieck, $\tilde{\sigma}$ und es also auch nur genau eine Ecke \tilde{v}^k gibt, in die v^k übergehen kann.

Die im Folgenden verwendete Art des Pivotisierens wird als „Pivotisieren durch Reflexion“ bezeichnet. Um dieses Verfahren beschreiben zu können, ist es nötig für ein n -Simplex $\sigma = \langle v^0, \dots, v^n \rangle$ eine feste zyklische Ordnung der Ecken zu definieren.

Hierbei bezeichne

$$v^{k-} := \begin{cases} v^{k-1} & \text{für } k > 0 \\ v^n & \text{für } k = 0 \end{cases} \text{ jeweils den linken Nachbarn von } v^k \quad (6.11)$$

und

$$v^{k+} := \begin{cases} v^{k+1} & \text{für } k < n \\ v^0 & \text{für } k = n \end{cases} \text{ jeweils den rechten Nachbarn von } v^k, \quad (6.12)$$

für $k \in \{0, \dots, n\}$.

Das Pivotisieren der Ecke $v^k \in \sigma$ durch Reflexion entspricht nun dem Ersetzen von $\{v^0, \dots, v^{k-1}, v^k, v^{k+1}, \dots, v^n\}$ durch $\{v^0, \dots, v^{k-1}, \tilde{v}^k, v^{k+1}, \dots, v^n\}$, wobei $\tilde{v}^k := v^{k-} + v^{k+} - v^k$.

D.h. die Ecke v^k wird durch die eindeutig bestimmte Ecke $\tilde{v}^k := v^{k-} + v^{k+} - v^k$ ersetzt und $\sigma = \langle v^0, \dots, v^{k-1}, v^k, v^{k+1}, \dots, v^n \rangle$ geht über zu $\tilde{\sigma} = \langle v^0, \dots, v^{k-1}, \tilde{v}^k, v^{k+1}, \dots, v^n \rangle$. Also $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}$, indem man eine ausgewählte Ecke v^k von σ wegfällen lässt und eine neue, eindeutig bestimmte Ecke \tilde{v}^k hinzunimmt.

Aufgrund der Formel sagt man v^k wird entlang der benachbarten Kante $[v^{k-}, v^{k+}]$ reflektiert.

Speziell diese Art des Pivotisierens wird hier später für den Simplicialalgorithmus verwendet werden.

In der, dieser Arbeit beigefügten, Implementierung des Simplicialalgorithmus wird das Pivotisieren durch Reflexion über eine Hilfsfunktion realisiert.

Die Definition des Pivotisierens durch Reflexion soll nun an einem Beispiel verdeutlicht werden:

Sei $\sigma = \langle v^0, v^1, v^2, v^3 \rangle$, so bedeutet das Pivotisieren von v^1 durch Reflexion, d.h. das Reflektieren von v^1 entlang der benachbarten Kante $[v^0, v^2]$, dass $\sigma = \langle v^0, v^1, v^2, v^3 \rangle \rightarrow \tilde{\sigma} = \langle v^0, \tilde{v}^1, v^2, v^3 \rangle = \langle v^0, v^0 + v^2 - v^1, v^2, v^3 \rangle$.

Folgende, aus [7] stammende, Sätze verdeutlichen, warum es so interessant ist, speziell durch Reflexion zu Pivotisieren:

Satz 7 Sei $K(\delta)$ eine Triangulation des \mathbb{R}^n und σ ein Simplex aus $K(\delta)$.

Erzeugt man nun mittels Pivotisieren durch Reflexion $\tilde{\sigma}$ aus σ , so ist auch $\tilde{\sigma}$ ein Simplex der Triangulation $K(\delta)$.

D.h. Beginnt man in einem Simplex der Triangulation $K(\delta)$ des \mathbb{R}^n , so geht dieses Simplex beim Pivotisieren durch Reflexion automatisch immer in ein Simplex über, welches selbst ebenfalls zur Triangulation $K(\delta)$ gehört.

Dies lässt sich allgemeiner formulieren als:

Satz 8 *Beginnt man bei einem n -Simplex σ aus \mathbb{R}^n und führt eine endliche Anzahl an Pivotisierungsschritten durch Reflexion durch, so erzeugt man bei jedem Schritt ein weiteres n -Simplex und erhält letztendlich eine Ansammlung T von n -Simplizes. Diese Ansammlung T stellt dann eine Triangulation des \mathbb{R}^n dar.*

Demnach kann beim Pivotisieren durch Reflexion folgender Sachverhalt garantiert werden:

Beginnt man bei einem beliebigen n -Simplex einer Triangulation des \mathbb{R}^n , so erhält man mittels Pivotisieren durch Reflexion immer eine Ansammlung von n -Simplizes der gleichen Triangulation. Die Triangulation wird also nie verlassen.

Da hier im späteren Simplicialalgorithmus gerade durch Reflexion pivotisiert werden soll, kann also garantiert werden, dass ausschließlich Simplizes von genau einer Triangulation erzeugt werden und diese somit niemals verlassen wird.

6.7. Definition lexikographisch positiv und LP-Basis

Seien auch in diesem Abschnitt $k, n \in \mathbb{N}$.

Eine Matrix A wird genau dann als lexikographisch positiv bezeichnet, wenn das erste Element jeder Zeile der Matrix A , welches $\neq 0$ ist, positiv ist.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ beispielsweise ist lexikographisch positiv,
 die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ jedoch nicht.

Des Weiteren nenne eine Menge von Vektoren $v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R}^n$ genau dann eine LP-Basis, wenn die Matrix $V := (v^1 \ \dots \ v^n)$ invertierbar und V^{-1} lexikographisch positiv ist.

Hierbei stehen die Buchstaben LP für „Linear Programming“, also für lineare Optimierung, da der Begriff einer Basis dieser Form bei Untersuchungen spezieller linearer Optimierungsprobleme entstanden ist. Mit linearer Optimierung bezeichnet man allgemein Optimierungsprobleme mit linearer Zielfunktion und linearen Beschränkungen.

Ein, für den späteren Simplicialalgorithmus wichtiger, Satz zu der LP-Basis von Vektoren lautet:

Satz 9 Seien $\begin{pmatrix} 1 \\ v^1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ v^1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ v^n \end{pmatrix} \right\} \text{ eine LP-Basis.}$$

Dann gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ genau ein $k \in \{1, \dots, n\}$, sodass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ v^1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ v^{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ v^{k+1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ v^n \end{pmatrix} \right\} \text{ wieder eine LP-Basis}$$

darstellt.

D.h. fügt man einen beliebigen Vektor zu einer LP-Basis hinzu, so ist eindeutig bestimmt, welcher der Vektoren der ursprünglichen LP-Basis weggelassen werden muss, damit die neue Menge wieder eine LP-Basis bildet.

Dieser Sachverhalt wird im späteren Simplicialalgorithmus für den Übergang eines $(n+1)$ -Simplex zu einer der zugehörigen n -Seiten ausgenutzt werden. Nach Satz 9 ist hierbei eindeutig bestimmt, welche Ecke das Simplex $(n+1)$ -Simplex verlassen muss, also in welche n -Seite genau übergegangen wird. Außerdem sagt der Satz aus, dass eine solche, für einen Übergang geeignete, n -Seite immer existiert, ein Übergang also immer durchgeführt werden kann.

Ein entsprechender Beweis zu diesem Satz lässt sich finden unter [Schilling].

Nun ein kurzes Beispiel zu diesem Satz:

Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine LP-Basis, da $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar und $V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ lexikographisch positiv ist.

Soll nun das Element $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu der Menge hinzugefügt werden, so ist eindeutig bestimmt, welches Element diese Menge verlassen muss, damit sie weiterhin eine LP-Basis darstellt. Würde man das Element $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus der Menge nehmen, um es durch $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu ersetzen, so hätte man die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, welche jedoch keine LP-Basis darstellt, da $V = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ wegen der 0-Zeile nicht invertierbar sein kann.

Nach obigem Satz muss dann also $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ das Element sein, welches aus der Menge genommen und durch $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ersetzt werden kann.

Dies ergibt die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Das zugehörige $V = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar durch $V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, welches of-

fensichtlich lexikographisch positiv ist. Demnach war $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ das eindeutig bestimmte Element, welches die Menge verlassen musste und $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist die neue LP-Basis.

6.8. Markierung einer Triangulation

Seien auch in diesem Abschnitt $m, n \in \mathbb{N}$.

Beim Markieren von Simplexes einer Triangulation unterscheidet man im Allgemeinen zwischen Integer-Markierung und Vektor-Markierung.

In beiden Fällen handelt es sich um eine Abbildung, welche gewisse Informationen des zugrundeliegenden Problems trägt und Einfluss hat auf die Wahl des Simplex, in das im jeweiligen Schritt des Simplicialalgorithmus übergegangen werden soll.

Bei der Integer-Markierung werden die Ecken der Triangulation auf eine natürliche Zahl abgebildet. Betrachtet man z.B. eine Triangulation des $[0, 1] \times C, C \subset \mathbb{R}^n$, so besitzt eine Integer-Markierung die Form

$$l : [0, 1] \times C \longrightarrow \{0, 1, \dots, m\}. \quad (6.13)$$

Bei der Vektor-Markierung werden die Ecken dagegen auf einen Vektor abgebildet. D.h. betrachtet man wieder eine Triangulation des $[0, 1] \times C, C \subset \mathbb{R}^n$, so hat eine Vektor-Markierung die Form

$$l : [0, 1] \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n. \quad (6.14)$$

In dieser Arbeit soll ausschließlich die Vektor-Markierung verwendet werden und wird, der kürzeren Schreibweise wegen, hier nun nur noch als Markierung bzw. Markierungsfunktion bezeichnet.

Bei einem Simplicialalgorithmus wird allgemein eine approximative Nullstelle einer gegebenen Hilfsabbildung bestimmt, d.h. eine Stelle ermittelt, an welcher der jeweilige Funktionswert der Hilfsabbildung den Nullpunkt hinreichend genau approximiert, d.h. nahe 0 ist. Diese Hilfsabbildung beinhaltet dabei das eigentlich zu lösende Problem, muss also entsprechend gewählt werden. Die Hilfsabbildung ist hierbei gerade die in 6.14 definierte Markierungsfunktion.

Abhängig von dem jeweiligen Problem, muss also eine geeignete Markierung, d.h. eine konkrete Abbildung, bestimmt werden, sodass die Nullstellen dieser Markierung der Lösung des Ursprungsproblems entsprechen. Durch die Markierung fließt dann das eigentlich zu lösende Problem in den Algorithmus ein.

D.h. man wählt eine geeignete Markierungsfunktion, bestimmt dann mit Hilfe des Simplicialalgorithmus approximative Nullstellen dieser Markierungsfunktion und hat dadurch direkt approximative Lösungen der ursprünglichen Aufgabenstellung erhalten.

Ist man beispielsweise auf der Suche nach einem Fixpunkt einer stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, so würde sich als Markierung

$$l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto f(x) - x \quad (6.15)$$

anbieten.

Dieses Beispiel lässt sich auch auf einen anderen Raum übertragen:

Betrachte nun eine spezielle Triangulation T des $[0, 1] \times C \subset \mathbb{R}^{n+1}$, also mit $C \subset \mathbb{R}^n$.

D.h. Simplizes haben hier die Form $\left\langle \begin{pmatrix} \lambda^0 \\ v^0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} \right\rangle$ für $\lambda^i \in \{0, 1\}$, $v^i \in C$ und $i = 0, \dots, n + 1$.

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stückweise affin bezüglich der speziellen Triangulation von $\{1\} \times C$. Sucht man nun wieder einen Fixpunkt von f , so würde sich nach [Schilling] auch folgende Markierung für die Triangulation T eignen:

$$\begin{aligned} l : [0, 1] \times C &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \\ l(\lambda, x) &:= (1 - \lambda)g(x) + \lambda f(x) - x := (1 - \lambda)[A(c - x) + x] + \lambda f(x) - x, \end{aligned} \quad (6.16)$$

wobei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) := A(c - x) + x$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, $c \in \mathbb{R}^n$ und $c \notin \partial\sigma$ für alle Simplizes σ der speziellen Triangulation von $\{0\} \times C$ eine affine Abbildung sei.

Die Markierung $l(\lambda, x)$ hat offensichtlich genau dann eine Nullstelle und damit der Simplicialalgorithmus eine Lösung, wenn

$$\begin{aligned} &(\lambda = 0 \wedge g(x) - x = 0) \vee (\lambda = 1 \wedge f(x) - x = 0) \\ \Leftrightarrow &(\lambda = 0 \wedge A(c - x) + x - x = 0) \vee (\lambda = 1 \wedge f(x) = x) \\ \Leftrightarrow &(\lambda = 0 \wedge A(c - x) = 0 \mid A^{-1}) \vee (\lambda = 1 \wedge x \text{ Fixpunkt von } f) \quad (6.17) \\ \Leftrightarrow &(\lambda = 0 \wedge c - x = 0) \vee (\lambda = 1 \wedge x \text{ Fixpunkt von } f) \\ \Leftrightarrow &(\lambda = 0 \wedge c = x) \vee (\lambda = 1 \wedge x \text{ Fixpunkt von } f). \end{aligned}$$

Folglich liegt die einzige Nullstelle x von der Markierungsfunktion l in dem Bereich $\{0\} \times C$ bei $x = c$, also bei dem Fixpunkt von $g := A(c - x) + x$, und die einzige Möglichkeit für eine Nullstelle x von l in dem Bereich $\{1\} \times C$ ist, dass x Fixpunkt von f ist.

Beginnt man also in dem Bereich $\{0\} \times C$ bei einem Fixpunkt von g und verfolgt, bei diesem startend, die Nullstellen der Markierung l , geht dann über zu $\{1\} \times C$, so kommt man zu einem gesuchten Fixpunkt von f , d.h. man bewegt sich von einem bekannten Fixpunkt von g zu gesuchten Fixpunkten von f .

Der Simplicialalgorithmus verfolgt hier also die Nullstellen der Markierungsfunktion, d.h. er approximiert die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ x \end{pmatrix} \in [0, 1] \times C \mid l(\lambda, x) = 0 \right\}$.

Jede, durch den Simplicialalgorithmus erhaltene, Nullstelle der Markierungsfunktion l in dem Bereich $\{1\} \times C$ entspricht, wegen $l(1, x) = f(x) - x$, einem Fixpunkt der Abbildung f , also einer Lösung der ursprünglichen Aufgabenstellung.

Abhängig von der Wahl der Matrix A und des Wertes $c \in \mathbb{R}^n$ in $g(x) := A(c - x) + x$,

wird hierbei gegebenenfalls ein unterschiedlicher Fixpunkt von f geliefert. Den Wert c bezeichnet man für einen jeweiligen, kompletten Durchlauf des Simplicialalgorithmus als den sogenannten Startwert.

Variiert man A in weiteren Durchläufen des Algorithmus, so erhält man letztendlich mehrere Fixpunkte von f , falls solche existieren.

Definiere zu jedem n -Simplex $\sigma = \langle v^0, \dots, v^n \rangle$ einer Triangulation, abhängig von der gewählten Vektor Markierung l , die sogenannte Markierungsmatrix

$$L_\sigma := \begin{pmatrix} 1 & & \\ l(v^0) & \dots & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Die Markierungsmatrix zu einem Simplex $\sigma = \langle v^0, \dots, v^n \rangle$ entsteht also dadurch, dass man die Markierungsfunktion l an den einzelnen Ecken v^0, \dots, v^n dieses Simplex auswertet. Man sagt die Matrix markiert das Simplex unter l .

In dieser Markierungsmatrix ist, durch die Markierungsfunktion l , das ursprünglich zu lösende Problem enthalten.

Wie bereits erwähnt, ist es die Aufgabe des Simplicialalgorithmus Nullstellen der Markierungsfunktion zu bestimmen. Da diese Nullstellen der Markierungsfunktion gerade der Lösung des Problems entsprechen, werden im Laufe des Algorithmus Eigenschaften der Matrix untersucht, welche auf vorliegende Nullstellen, bzw. approximative Nullstellen, der Markierungsfunktion schließen lassen. Zu diesen Eigenschaften gehört beispielsweise die im folgenden definierte Eigenschaft:

Betrachtet man die Vektor-Markierung l für eine Triangulation, so heißt ein n -Simplex $\langle v^0, \dots, v^n \rangle$ vollständig markiert bezüglich l

$$:\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 & & \\ l(v^0) & \dots & \\ & & 1 \end{matrix} \right\} \text{ eine LP-Basis bildet.} \quad (6.19)$$

D.h. ein n -Simplex $\langle v^0, \dots, v^n \rangle$ ist genau dann vollständig markiert bezüglich der Markierungsfunktion, wenn die Spalten der zugehörigen Markierungsmatrix eine LP-Basis darstellen.

Mit diesen Definitionen lassen sich nun zwei, für den Simplicialalgorithmus essenzielle, Sätze aufstellen:

Satz 10 *Ist σ ein $n + 1$ -Simplex einer Triangulation von $[0, 1] \times C \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so hat σ entweder keine oder genau zwei vollständig markierte n -Seiten.*

Satz 11 *Ein vollständig markiertes Simplex liefert immer einen approximierten Fixpunkt.*

Hierbei sei angemerkt, dass ein „approximierter Fixpunkt“ bzw. ein „approximativer Fixpunkt“ nicht unbedingt bedeutet, dass dieser Punkt in der Nähe eines echten Fixpunkts liegt, sondern lediglich, dass sich dieser Punkt in der Nähe seines eigenen Bildpunktes befindet.

Der Begriff approximierter Fixpunkt bezieht sich hier auf die, später beschriebene, Homotopie. Alternativ ließe sich dieser Satz auch analog für eine Nullstelle der Markierungsfunktion ausdrücken.

Entsprechende Beweise zu diesen Sätzen lassen sich indirekt in [7] bzw. in [29] finden.

Bei dem im folgenden Kapitel genauer beschriebenen Simplizialalgorithmus geht es darum, letztendlich eine Folge vollständig markierter n -Seiten, also vollständig markierter n -Simplizes, zu erhalten.

Hierbei soll von einer vollständig markierten n -Seite zu einem entsprechenden $(n+1)$ -Simplex übergegangen werden und anschließend von dort aus weiter zu einer neuen, zu dem $(n+1)$ -Simplex gehörenden, vollständig markierten n -Seite.

Satz 10 gewährleistet dabei, dass diese vollständig markierte n -Seite, in welche übergegangen werden soll, auch tatsächlich existiert und eindeutig ist.

Satz 11 beschreibt dann sozusagen den Zusammenhang zwischen dem Vorliegen einer approximativen Lösung der ursprünglichen Aufgabenstellung, also im Falle eines Fixpunktproblems zu einer stückweise affinen Funktion dem Vorliegen eines approximativen Fixpunktes, bzw. allgemein einer approximativen Nullstelle der Markierungsfunktion, und der neu definierten Eigenschaft eines Simplizes durch die Markierungsfunktion vollständig markiert zu sein.

Indem während der Ausführung des Simplizialalgorithmus überprüft wird, ob ein Simplex vollständig markiert ist, also ob die zu dem Simplex gehörende Markierungsmatrix eine LP-Basis darstellt, kann also nach obigem Satz 11 festgestellt werden, ob in diesem Simplex eine approximative Lösung, bzw. eine approximative Nullstelle der Markierungsfunktion liegt. Hierbei sollte nur in Simplizes übergegangen werden, in welchen auch eine approximative Lösung liegt, also welche vollständig markiert sind. Im ersten Schritt des Simplizialalgorithmus wird das n -Startsimplex um den Startpunkt so konstruiert, dass es vollständig markiert ist. Anschließend soll nun ausschließlich in vollständig markierte n -Simplizes übergegangen werden, deren Existenz und Eindeutigkeit, wie bereits erwähnt, durch Satz 10 sichergestellt ist.

Im Anschluss an die Erklärungen der mathematischen Grundlagen für den Simplizialalgorithmus in diesem Kapitel, soll nun im folgenden Kapitel der Algorithmus selbst detailliert beschrieben werden.

Grundlage dieses Kapitels waren [7], [8], [13], [22], [25], [29] und [30].

Kapitel 7.

Der Simplicialalgorithmus

Ziel dieses Kapitels ist die detaillierte Beschreibung des Simplicialalgorithmus. Dies beginnt mit dem Hinzufügen einer künstlichen Dimension zu dem gegebenen Problem. Anschließend wird der eigentliche Algorithmus genau erklärt und mit Hilfe des sogenannten Door-in-Door-out Prinzips nochmals veranschaulicht. Im darauf folgenden Abschnitt werden wichtige Eigenschaften des Simplicialalgorithmus genannt, um speziell dessen Eignung für den hier betrachteten Anwendungsfall des Fixpunktproblems herauszustellen. Abschließend werden Vor- und Nachteile des Simplicialalgorithmus dargestellt.

7.1. Hinzufügen einer künstlichen Dimension

Um das zu lösende Problem passend in die jeweilige Markierungsfunktion einbinden zu können, wird ihm eine künstliche Dimension hinzugefügt. Dies erfolgt, indem jedes Element des Raumes, also speziell die Ecken der Simplexes, eine neue erste Komponente λ vor ihrer eigentlichen ersten Komponenten erhalten, d.h.

$$\text{aus } v^0 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \text{ wird } v^0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Bei dem Startwert c setze $\lambda = 0$.

Mit Hilfe der künstlichen Dimension lässt sich entscheiden, ob ein Simplex am Rand oder im Inneren der Triangulation liegt.

Ein Simplex befindet sich am Rand der Triangulation, falls für die jeweils erste Komponente jeder Ecke dieses Simplexes $\lambda = 1$ gilt. Ist bei mindestens einer Ecke $\lambda = 0$, so liegt das betrachtete Simplex im Inneren der Triangulation.

Der folgende Simplicialalgorithmus ist nun so durchzuführen, dass er bei einem Simplex startet, dessen Ecken alle als jeweils erste Komponente den Wert $\lambda = 0$ tragen. Terminieren soll der Algorithmus genau dann, wenn alle Ecken als jeweils erste Komponente den Wert $\lambda = 1$ erhalten haben.

Sollte vor Einführung dieser künstlichen Dimension der \mathbb{R}^n trianguliert werden, so ist nun der Raum $[0, 1] \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zu triangulieren. D.h. es sind nun $(n + 1)$ -Simplexes und n -Simplexes statt n - und $(n - 1)$ -Simplexes zu betrachten.

Alternativ könnte man das Hinzufügen einer künstlichen Dimension auch interpretieren als Einschränken des \mathbb{R}^{n+1} auf den $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$, also eine entsprechend Abschnitt 6.4.2.3 definierte spezielle Triangulation betrachten.

7.2. Umformung der gegebenen Problemfunktion mittels Homotopie

Soll der Simplicialalgorithmus beispielsweise speziell dafür angewendet werden, Fixpunkte einer stückweise affinen Funktion $f(x)$ zu bestimmen, so bietet sich an, die gegebene Problemfunktion mittels sogenannter Homotopie umzuformen.

Hierbei transformiert man das ursprüngliche Problem auf die folgende, allgemein als Homotopie bezeichnete, Abbildung:

$$H : [0, 1] \times C \rightarrow \mathbb{R}^n, H(\lambda, x) := (1 - \lambda) \cdot g(x) + \lambda \cdot f(x), \quad (7.1)$$

wobei $f(x) : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ die ursprüngliche Problemfunktion mit zu bestimmenden Fixpunkten und $g(x) : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine, als Hilfsfunktion bezeichnete, affine Abbildung mit bekannten Fixpunkten darstellt. Das Skalar $\lambda \in \{0, 1\}$ entscheidet hierbei, nach welcher Funktionsvorschrift der entsprechende Funktionswert für x berechnet werden soll. Es gilt offensichtlich $H(0, x) = g(x)$ und $H(1, x) = f(x)$.

Außerdem sei $C \subset \mathbb{R}^n$ ein triangulierbarer Raum.

Das Fixpunktproblem zu der gegebenen Funktion $f(x)$ wurde somit auf das Problem, einen Fixpunkt der Homotopie H zu bestimmen, transformiert.

Es sei angemerkt, dass $H(\lambda, x) - x$ gerade der in 6.16 beschriebenen Markierung $l(\lambda, x)$ entspricht. Aus diesem Grund lassen sich die dort getroffenen Aussagen direkt auf den hier betrachteten Fall übertragen.

Beginnt der Simplicialalgorithmus auf dem Bereich $\{0\} \times C$ bei einem bekannten Fixpunkt der Hilfsfunktion $g(x)$ und verfolgt die Fixpunkte von $H(\lambda, x)$, so endet er schließlich im Bereich $\{1\} \times C$ bei einem Fixpunkt von $f(x)$. D.h. jeder, durch den Simplicialalgorithmus erhaltene, Fixpunkt von $H(\lambda, x)$ auf dem Bereich $\{1\} \times C$ entspricht einem Fixpunkt der ursprünglichen Problemfunktion $f(x)$.

Einzelne Ecken eines Simplexes erhalten folglich den Funktionswert $g(x)$, während für andere die Vorschrift $f(x)$ gilt. Die entsprechende Zuweisung erfolgt über die jeweilige λ -Komponente, also die erste Komponente der betrachteten Simplexecke. Da zu Beginn des Simplicialalgorithmus alle Ecken per Definition den Komponenten-Wert $\lambda = 0$ tragen, greift dort für alle Ecken die Funktionsvorschrift $g(x)$. Am Ende des Algorithmus wird schließlich für jede Ecke der Wert $f(y)$ betrachtet. Der Simplicialalgorithmus geht also von einem bekannten Fixpunkt von $g(x)$ zu einem gesuchten Fixpunkt von $f(x)$ über.

Durch Variation der Hilfsfunktion oder dem, als Startwert gegebenen, Fixpunkt von $g(x)$ lassen sich gegebenenfalls unterschiedliche Fixpunkte zu $f(x)$ bestimmen.

Fixpunkte der Homotopie H entsprechen offensichtlich gerade den Nullstellen der in 6.16 definierten Markierungsfunktion $l(\lambda, x)$. Der Simplicialalgorithmus bestimmt folglich sowohl Nullstellen der Markierungsfunktion, also auch Fixpunkte der Homotopie.

Für die Formulierung des Simplicialalgorithmus lassen sich also beide Begriffe verwenden.

7.3. Detaillierte Beschreibung des Simplicialalgorithmus mit Restart nach O.H. Merrill

Der kürzeren Schreibweise wegen wird im Folgenden die Formulierung „eine Ecke v^+ zu dem Simplex S_1 hinzufügen“ verwendet, gemeint ist aber eigentlich „das Simplex $S_1 = \text{cov}(v^0, v^1, \dots, v^n)$ zu dem Simplex $S_2 = \text{cov}(v^0, v^1, \dots, v^n, v^+)$ erweitern“. Analoges gilt auch für „eine Ecke v^- aus dem Simplex S_2 entfernen“.

Nun folgt eine detailliertere Beschreibung des Algorithmus:

Der Simplicialalgorithmus beginnt bei einem geschätzten Startwert c und baut um diesen ein vollständig markiertes n -Simplex, das sogenannte Startsimplex, auf. Hierbei muss gegebenenfalls der Startwert etwas gestört werden, damit er im Inneren des erzeugten Simplex liegt und somit die später berechnete invertierte Markierungsmatrix mit größerer Wahrscheinlichkeit lexikographisch positiv sein wird. Dies ist aus dem Grund relevant, da für lexikographisch nicht-positive Markierungsmatrizen der Algorithmus nicht fortgeführt werden kann und dadurch abgebrochen werden muss. Das Startsimplex ist bereits durch die Angabe einer Startecke v^0 und einer Permutation π eindeutig festgelegt. Schreibe Simplex $S(v^0; \pi)$.

Ausgehend von dem Startsimplex S wird mittels vorgegebener Pivotisierungsregel, also beispielsweise durch Pivotisierung mittels Reflexion, eine neue Ecke v^+ berechnet.

Fügt man v^+ zu dem n -Simplex S hinzu, so erhält man ein $(n + 1)$ -Simplex. Dieses besitzt nach Satz 10 genau zwei vollständig markierte n -Simplizes und diese haben eine gemeinsame Seite, sind also benachbart.

Da mit dem Startsimplex S bereits eines der beiden vollständig markierten n -Simplizes vorliegt, existiert ein zweites vollständig markiertes n -Simplex S' und ist eindeutig bestimmt. Demnach ist eindeutig festgelegt, welches Element v^- das $(n + 1)$ -Simplex verlassen muss, um S' zu erhalten.

Alternativ lässt sich diese, als Pivotisieren bezeichnete, Vorgehensweise auch unter Verwendung des Begriffs der LP-Basis beschreiben:

Nach Definition 6.19 heißt ein Simplex genau dann vollständig markiert, wenn die Vektoren der, durch die jeweilige Markierungsfunktion, markierten Ecken eine LP-Basis bilden.

Hier sei angemerkt, dass die genaue Form eines solchen Vektors für eine Ecke $v(1 : n + 1)^1$ mit der Markierungsfunktion $l(\lambda, v(2 : n + 1))$ folgendermaßen lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ l(\lambda, v(2 : n + 1)) \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

¹ $v(1 : n + 1)$ bezeichne die 1. bis $n + 1$ -te Komponente des Vektors v

aber entsprechend obiger Formulierung abgekürzt wird.

Erweitert man das vollständig markierte Simplex nun um eine Ecke v^+ , fügt man also in einem $n + 1$ -dimensionalen Raum zu einer aus $n + 1$ Vektoren bestehenden LP-Basis einen weiteren Vektor, genauer den Vektor der markierte Ecke v^+ , hinzu, so kann diese Menge keine LP-Basis mehr darstellen, da $n + 2$ Elemente in einem $n + 1$ -dimensionalen Raum nicht linear unabhängig sein können.

Nach Satz 9 ist eindeutig bestimmt, welches Element aus der Menge genommen werden muss, damit sie wieder eine LP-Basis darstellt. Es ist also eindeutig festgelegt, welcher Vektor einer markierten Ecke (v^-) aus der Menge zu entfernen ist, wenn man den Vektoren der markierten Ecke v^+ zuvor hinzugefügt hatte. Das bedeutet: Es ist also eindeutig bestimmt, welche Ecke v^- aus dem Simplex entfernt werden muss, um ein vollständig markiertes Simplex S' zu erhalten.

Nun ist zu überprüfen, ob das neue Simplex S' bereits am Rand der Triangulation liegt. Ist dies der Fall, so liegt eine approximative Lösung des zugrundeliegenden Problems bereits indirekt in diesem neuen Simplex S' .

Liegt das neue Simplex S' jedoch nicht auf dem Rand der Triangulation, wird ausgehend von S' analog oben mittels Pivot-Regel eine neue Ecke bestimmt, welche nun das n -Simplex S' zu einem $(n + 1)$ -Simplex erweitert.

Anschließend wird, wie schon beim Übergang von S zum benachbarten vollständig markierten S' via $(n + 1)$ -Simplex, das Element berechnet, welches das $(n + 1)$ -Simplex verlassen muss, um auf das vollständig markierte n -Simplex S'' zu kommen.

Dieser Vorgang wird sooft durchgeführt, bis man bei einem vollständig markierten Simplex am Rand der Triangulation angekommen ist. Aus diesem Simplex kann nun eine approximative Lösung des gegebenen Problems konkret berechnet werden, vgl. Satz 11.

Im Anschluss an die Bestimmung einer möglichen Lösung wird der Approximationsfehler dieser Lösung berechnet. Überschreitet er die vorgegebene Schranke nicht, so wurde eine gute Lösung zu dem gegebenen Problem gefunden und der Algorithmus terminiert hier. Ist der Approximationsfehler jedoch noch zu groß, kommt es zu einem Restart des Algorithmus mit der eben ermittelten approximativen Lösung als Startwert und unter Verwendung eines geringeren Triangulationsdurchmessers, d.h. mit kleineren Simplizes. Im Allgemeinen sollte der Triangulationsdurchmesser umgekehrt proportional zu dem a-priori Wissen über die gegebene Problemfunktion sein. Bei wenig Wissen über diese sollte der Durchmesser bzw. die Simplizes also groß sein, damit der Algorithmus selbst bei ungünstig gewähltem Startwert schnell terminieren kann und zumindest eine grobe Lösung liefert. Hat man bereits gute Kenntnis über die betrachtete Problemfunktion, so kann der Startwert entsprechend günstig gewählt werden und ein geringer Triangulationsdurchmesser führt zu einer genaueren Lösung.

Im Folgenden wird der Algorithmus mit Restart nach Merrill kurz mittels Pseudo-Code beschrieben:

7.3. Detaillierte Beschreibung des Simplicialalgorithmus mit Restart nach O.H. Merrill

1. Wähle Startpunkt c^\sim , Markierungsfunktion l , Triangulationsdurchmesser δ , Genauigkeit ep
2. Bestimme Startsimplex und gestörten Startpunkt c aus c^\sim und δ
3. Bestimme hinzuzufügende Ecke v^+ mittels Pivot-Regel
4. Bestimme zu entfernende Ecke v^- und damit neuen Simplex unter Anwendung von l
5. Überprüfe ob neuer Simplex am Rand der Triangulation liegt.
falls nein gehe zu 3.,
falls ja gehe zu 6.
6. Berechne approximierte Lösung x^*
7. Berechne Approximationsfehler und Überprüfe ob dieser $\leq ep$
falls ja STOP,
falls nein gehe zu 8.
8. Setze $c^\sim = x^*$ und $\delta = \delta/2$ und gehe zu 2.

Die eben beschriebene Vorgehensweise soll nun zusätzlich graphisch dargestellt werden:

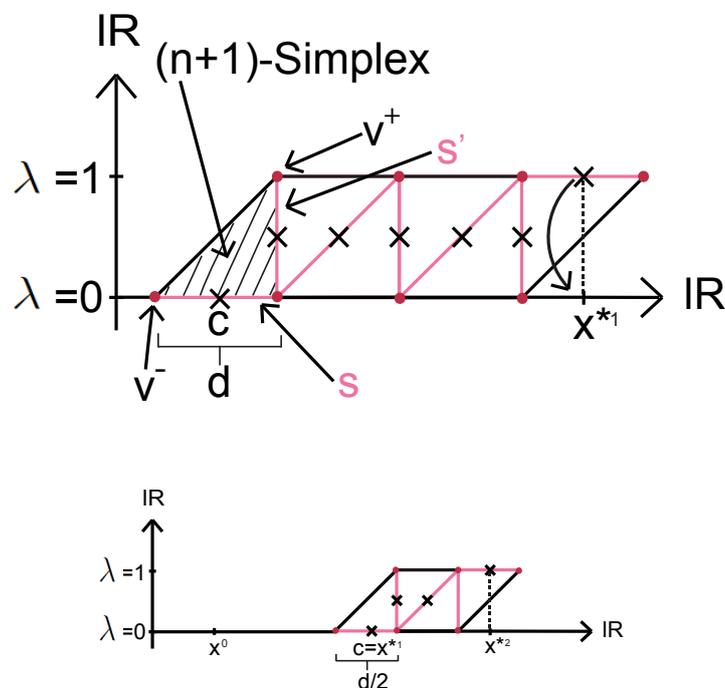


Abb. 7.1.: Simplicialalgorithmus mit einem Restart(untere Abbildung)

7.4. Der Algorithmus als Door-in-Door-out-Prinzip

Der Algorithmus lässt sich auch gut mit dem sogenannten Door-in-Door-out-Prinzip bildlich erklären:

Betrachte den Grundriss eines Gebäudestockwerks. Das Stockwerk besteht ausschließlich aus Räumen, welche durch Türen miteinander verbunden sind. Jeder Raum besitze genau zwei offene Türen. Es sei nicht erlaubt einen Raum durch die selbe Tür zu verlassen, durch die man den Raum betreten hat.

Man betritt den ersten Raum des Stockwerks durch die Eingangstüre. Da dieser Raum per Definition genau zwei offene Türen besitzt und man durch eine dieser beiden Türen den Raum eben betreten hat, ihn also durch diese nicht verlassen darf, ist eindeutig festgelegt durch welche Tür man den Raum verlassen muss. Durch diese Tür gelangt man in den nächsten Raum, welcher auch wieder genau zwei offene Türen besitzt: die Tür, durch welche man den Raum betreten hat und genau eine weitere. Der Raum ist also durch letztere zu verlassen und man gelangt in den nächsten Raum. Dies lässt sich so lange fortführen bis man zur Ausgangstüre gelangt und das Stockwerk verlassen kann.

Es ist offensichtlich nicht möglich im Kreis zu laufen und einen Raum zu betreten, den man bereits betreten hatte, da keiner der Räume mehr als zwei offene Türen besitzt. Es ist auch nicht möglich in einen Raum zu gelangen ohne die Möglichkeit diesen wieder verlassen zu können, da jeder Raum per Definition genau zwei offene Türen besitzt.

Bei obigen Vorgaben muss immer ein Raum mit Ausgangstüre existieren.

Die Türen stellen hier n -Simplizes dar, wobei offene Türen vollständig markierte n -Simplizes repräsentieren. Die Räume selbst sind die $(n + 1)$ -Simplizes, welche die beiden (genau zwei) vollständig markierten n -Simplizes beinhalten. Wenn von einer Tür zur anderen durch den Raum gegangen wird, bedeutet dies den Übergang von einem n -Simplex zu einem andern über das, die beiden verbindende, $(n + 1)$ -Simplex.

7.5. Wichtige Eigenschaften des Simplicialalgorithmus

Satz 12 *Der allgemeine Simplicialalgorithmus liefert eine Folge von abwechselnd vollständig markierten n -Seiten und entsprechender $(n + 1)$ -Simplizes, welche keine Wiederholungen aufweist.*

D.h. der Algorithmus liefert immer weiter neue, vollständig markierte Simplizes und durchläuft kein Simplex doppelt. Es ist also nicht möglich bei dem Simplicialalgorithmus selbst in eine Endlosschleife zu kommen.

Satz 13 *Existiert eine kompakte Teilmenge $C \subset |\mathbb{K}|$, in welcher alle durch den allgemeinen Simplicialalgorithmus erzeugten vollständig markierten n -Simplizes liegen, so terminiert der allgemeine Simplicialalgorithmus bei einem vollständig markierten n -Simplex.*

Des Weiteren erfüllen die, durch den Algorithmus erzeugten, Simplizes den folgenden Satz:

Satz 14 *Jedes vollständig markierte Simplex liefert einen approximativen Fixpunkt.*

D.h. endet der Algorithmus in einem vollständig markierten Simplex, also kommt er auf ein Simplex am Rand der Triangulation, so lässt sich daraus immer ein approximativer Fixpunkt der Problemfunktion, bzw. eine approximative Nullstelle der Markierungsfunktion, also eine Lösung des ursprünglichen Problems, berechnen.

Nach Satz 13 liefert der Algorithmus für eine kompakte Teilmenge $C \subset |\mathbb{K}|$ immer ein vollständig markiertes n -Simplex, also in diesem Fall nach Satz 14 immer einen approximativen Fixpunkt, also eine approximative Lösung.

Sind speziell für den mengenwertigen Operator τ aus 5.33 die dort beschriebenen Kompaktheitsanforderungen erfüllt, so terminiert der Simplicialalgorithmus nach Satz 13 für das Fixpunktproblem dieses mengenwertigen Operators τ mit einem vollständig markierten n -Simplex und liefert nach Satz 14 folglich einen approximativen Fixpunkt für τ und somit eine Lösung für das ursprüngliche Optimalsteuerungsproblem aus Abschnitt 4.2, Kapitel 4.

Satz 15 *Der Simplicialalgorithmus zur Bestimmung eines Fixpunkts einer kompakten Abbildung liefert, verzichtet man auf das Stop-Kriterium, eine unendliche Folge gleichmäßig beschränkter, immer genauerer approximativer Fixpunkte.*

Durch das Stop-Kriterium endet der Algorithmus jedoch nach endlich vielen Schritten mit hinreichend guter Approximation eines solchen Fixpunkts.

Der hier beschriebene Simplicialalgorithmus mit Restart nach O.H. Merrill terminiert also immer und liefert dabei eine approximative Lösung zu dem gegebenen Problem.

Ein entsprechendes MATLAB-Programm zu dem hier dargestellten Simplicialalgorithmus befindet sich auf der beiliegenden CD.

7.6. Vor- und Nachteile des Simplicialalgorithmus

Ein großer Vorteil des hier vorgestellten Simplicialalgorithmus, speziell bei der Lösung von Optimalsteuerungsproblemen, ist die Tatsache, dass er keine a-priori Informationen über die Lösungsstruktur benötigt.

Dies lässt sich dadurch begründen, dass der Simplicialalgorithmus auch auf Differentialinklusionen, also auf mengenwertige Abbildungen, anwendbar ist und somit auch Probleme mit singulärer Steuerung behandelbar sind. Es ist folglich nicht nötig vor der Ausführung des Algorithmus zu wissen, ob Abschnitte mit singulärer Steuerung existieren und an welchen Stellen diese genau auftreten können.

Außerdem konvergiert der Algorithmus im Gegensatz zu anderen indirekten Verfahren für alle, nicht nur für günstig gewählte, Startwerte.

Es müssen nur wenige Bedingungen, wie z.B. Stetigkeit und Kompaktheit, erfüllt sein, um die Konvergenz des Verfahrens garantieren zu können. Demnach lässt es sich auch bei nicht-glaten Problemen anwenden. Aus diesem Grund eignet sich der Algorithmus speziell auch für Optimalsteuerungsprobleme, bei welchen die Hamilton'sche nicht nach der Steuerung differenzierbar ist.

Des Weiteren lassen sich mit dem Simplicialalgorithmus gegebenenfalls sogar verschiedene Lösungen erzeugen. Hierfür wird der komplette Algorithmus mehrmals, mit jeweils verändertem Startwert oder anderer Matrix der Hilfsfunktion, ausgeführt.

Leider steigt jedoch der Rechenaufwand des Algorithmus mit der Dimension d des zu lösenden Problems in einer Größenordnung von d^3 . Sind schnellere Lösungsmethoden für eine Aufgabenstellung anwendbar, d.h. sind die entsprechenden Glattheitsanforderungen erfüllt und geeignete Startwerte bekannt, sodass Konvergenz hier sichergestellt ist, sollte man diese Methoden bevorzugen.

Der hier beschriebene Simplicialalgorithmus eignet sich folglich besonders für das Lösen von Optimalsteuerungsproblemen mit kompaktem Steuerbereich U , bei nicht nach der Steuerung $u \in U$ differenzierbarer Hamilton'schen oder bei Problemen ohne genauere Kenntnis der Lösungsstruktur, vgl. [25].

Er kann jedoch auch für andere Probleme, gemeinsam mit weiteren Verfahren, verwendet werden. Es bietet sich im Allgemeinen an, den hier beschriebenen Simplicialalgorithmus für wenige Zeitschritte, also bei niedriger Dimension, zu verwenden um nur erste approximative Lösungen zu bestimmen. Ausgehend von diesen Lösungen und dem nun gewonnenen Wissen über die grundlegende Lösungsstruktur, können anschließend andere schneller konvergierende Verfahren, welche aber eben geeignete Startwerte benötigen, verwendet werden, um genauere Lösungen zu erhalten.

Der Simplicialalgorithmus ist damit ein geeignetes Verfahren zur Berechnung optimaler Trajektorien für Fälle, in denen viele andere Lösungsmethoden nicht anwendbar sind. Speziell der kompakte Kontrollbereich ist für klassische indirekte Methoden problematisch.

Diese und weitere Informationen lassen sich finden in [7], [8], [13], [19], [22], [23], [24], [25], [29] und [30].

Kapitel 8.

Fazit und Ausblick

Die in dieser Arbeit beschriebene Vorgehensweise zur Trajektorienbestimmung mittels Simplizialalgorithmus soll nun abschließend nochmals in komprimierter Form dargestellt werden:

Es sei ein Optimalsteuerungsproblem zur Bestimmung optimaler Lösungstrajektorien in der Form aus Abschnitt 4.2, wie beispielsweise die R&D-Problematik, gegeben und soll mit Hilfe des Simplizialalgorithmus gelöst werden.

Hierfür muss das Optimalsteuerungsproblem zuerst, unter Verwendung der Optimalitätsbedingungen aus dem Pontryagin'schen Maximumprinzip, in ein Randwertproblem einer nichtlinearen Differentialinklusion 1.Ordnung umgeformt werden.

Anschließend definiert man zu diesem Randwertproblem einen entsprechenden mengenwertigen Operator. Da jeder Fixpunkt dieses Operators gerade einer Lösung des Randwertproblems der nichtlinearen Differentialinklusion entspricht, hat sich das zu lösende Problem nun auf ein Fixpunktproblem eines mengenwertigen Operators reduziert.

Dieses Fixpunktproblem lässt sich als Fixpunktproblem einer, auf einer entsprechenden Triangulation, stückweise affinen Abbildung interpretieren und kann daher nun mittels Simplizialalgorithmus gelöst werden.

Hierfür wird die Markierungsfunktion so definiert, dass eine Nullstelle dieser Funktion gerade einem Fixpunkt der stückweise affinen Abbildung entspricht. Es sind mit dem Algorithmus nun also Nullstellen der Markierungsfunktion zu bestimmen, bzw. zu approximieren.

Hierbei ist der Raum nach und nach mittels Simplizes zu triangulieren. Da gerade vollständig markierte Simplizes eine Nullstelle der Markierungsfunktion, also eine Lösung des Ursprungsproblems, beinhalten, beschränkt man sich im Algorithmus auf das Durchlaufen ausschließlich vollständig markierter Simplizes.

Der Algorithmus beginnt mit der Konstruktion eines vollständig markierten Simplizes um einen vorgegebenen Startpunkt. Anschließend geht er, bei diesem startend, immer wieder in ein neues, vollständig markiertes Simplex über, welches jeweils eine immer genauere Approximation an die Lösung beinhaltet. Sobald der Algorithmus auf ein Simplex am Rand der Triangulation stößt, liegt in diesem die für diesen Durchlauf beste approximative Lösung vor und wird konkret ermittelt.

Ist die Approximation genau genug, so stoppt das Programm. Andernfalls werden weitere Durchläufe des Simplizialalgorithmus durchgeführt mit jeweils geringerem Triangulationsdurchmesser und besserem Startpunkt, bis der Approximationsfehler der erhaltenen Lösung eine vorgegebene Schranke nicht mehr überschreitet.

Der Algorithmus terminiert also mit einer hinreichend genauen approximativen Nullstelle der Markierungsfunktion, also mit einem approximativen Fixpunkt der stückweise affinen Abbildung bzw. des mengenwertigen Operators. Damit liefert der Algorithmus eine approximative Lösung der Differentialinklusion und folglich eine approximative, optimale Lösungstrajektorie des ursprünglichen Optimalsteuerungsproblems.

Der hier beschriebene Simplicialalgorithmus eignet sich besonders gut um eine erste, grobe Abschätzung der Lösungstrajektorie zu erhalten, da man für dessen Anwendung keine vorab Informationen benötigt und nur gewisse Stetigkeits- und Kompaktheitsanforderungen erfüllt sein müssen.

Außerdem ist der Simplicialalgorithmus auch für mengenwertige Abbildungen anwendbar, d.h. speziell das Auftreten singulärer Teilbögen stellt bei diesem Ansatz, im Gegensatz zu den meisten anderen indirekten Verfahren, kein Problem dar.

Aufgrund des hohen Rechenaufwandes, speziell bei vielen Dimensionen, also für bessere Approximationen an die jeweilige Lösung, bietet sich an, diesen anschließend, unter Verwendung der durch den Simplicialalgorithmus gewonnenen Informationen über die Lösung, durch einen schneller konvergierenden Algorithmus zu ergänzen, um eine genauere Annäherung an die Lösung zu erhalten.

D.h. man berechnet erst eine Groblösung mit dem Simplicialalgorithmus und verwendet diese anschließend als Startwert für den zweiten Algorithmus, welcher dann schnell eine genauere Lösung liefert. Um diesen überhaupt anwenden zu können, wird eine hinreichend genaue Lösung aus dem Simplicialalgorithmus als Starttrajektorie benötigt.

Aufbauend auf diese Diplomarbeit könnte man, speziell für den Rendezvous- und Docking-Fall, durch den Simplicialalgorithmus berechnete, Lösungstrajektorien mit Lösungen aus weiteren Algorithmen, wie Multiple Shooting oder Model Predictive Control, vergleichen.

Eine andere Erweiterungsmöglichkeit wäre, die Objekte Chief und Deputy im R&D-Szenario nicht mehr nur als Punktmassen zu betrachten, sondern deren tatsächliche Ausmaße und Bewegungen um die jeweils eigenen Achsen, also auch mögliches Taumeln, zu berücksichtigen. D.h. man könnte die hier betrachteten Bewegungsgleichungen um eine Lageregelung ergänzen, also unter Verwendung der Orientierung formulieren.

Der stetige Zuwachs der in unserer Erdumlaufbahn befindlichen Trümmerteile stellt ein immer größeres Kollisionsrisiko für Satelliten, Raumfahrzeuge oder Raumstationen dar.

Um die Raumfahrt, bzw. allgemein die Nutzung des Weltraums, weiterhin gewährleisten zu können, ist es zwingend nötig, speziell größeren Weltraummüll umgehend zu entfernen. Hierfür können Techniken wie das Rendezvous und Docking angewandt werden und müssen daher weiter umfassend erforscht und stetig optimiert werden. Ein vielversprechender Lösungsansatz für die Bestimmung einer optimalen Bahnkurve stellt der hier beschriebene Simplicialalgorithmus dar.

Anhang A.

Anwendung des mengenwertigen Operators τ auf ein Beispiel

In diesem Abschnitt soll zur Verdeutlichung der Zusammensetzung des mengenwertigen Operators τ aus 5.18 ein entsprechendes Beispiel durchgerechnet werden.

Betrachte hierzu das Randwertproblem

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot y(t) + F(t, y(t)) \text{ für fast alle } t \in [0, T], \text{ wobei } F(t, y(t)) := y(t) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 + e^T \\ 0 & 1 + e^T \end{pmatrix} \cdot y(0) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot y(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

also $A(t) := \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 + e^T \\ 0 & 1 + e^T \end{pmatrix}$ und $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dabei sei speziell $[t_0, t_T] = [0, T] \subset \mathbb{R}$ mit $0 < T < \infty$ und $F : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine vorgegebene, mengenwertige Abbildung. Es gilt außerdem offensichtlich $M, N, A(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und die Abbildung $A(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist auf $[0, T]$ stetig. Hierbei wurden M und N so gewählt, dass $M \cdot Y(0) - N \cdot Y(T)$ die Einheitsmatrix ergibt und sich somit weitere Rechnungen vereinfachen.

Diese Differentialgleichung ließe sich sicherlich mit einem anderen, als dem hier vorgestellten, Verfahren schneller lösen. An dieser Stelle geht es jedoch darum, an einem einfachen Beispiel zu zeigen, wie eine gegebene Differentialinklusion in ein Fixpunktproblem des entsprechenden Operators τ umgewandelt wird und nicht darum, speziell dieses Beispiel zu lösen.

Im Folgenden bezeichne $C[0, T]^2$ die Menge aller stetigen Abbildungen von $[0, T]$ nach \mathbb{R}^2 und $2^{C[0, T]^2}$ die dazugehörige Menge aller Teilmengen, also die Potenzmenge von $C[0, T]^2$. Außerdem sei $L^1[0, T]^2$ die Menge aller Lebesgue-messbaren Abbildungen $x(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\int_0^T \|x(t)\| dt < \infty$.

Der mengenwertige Operator τ ist hier, entsprechend 5.18, 5.11 und 5.12, für $a \in \mathbb{R}^2$ wie folgt definiert:

$$\tau : C[0, T]^2 \rightarrow 2^{C[0, T]^2}, \quad x(t) \mapsto \{y(t) \mid y(t) = G\xi(t) + Ha, \xi(t) \in F(t, x(t)) \text{ für fast alle } t \in [0, T], \xi(t) \in L^1[0, T]^2\}, \quad (\text{A.2})$$

wobei

$$G : L^1[0, T]^2 \rightarrow C[0, T]^2, \quad \xi(t) \mapsto Y(t) \cdot \left[(M \cdot Y(0) - N \cdot Y(T))^{-1} \cdot N \cdot Y(T) \cdot \int_0^T Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_0^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \quad (\text{A.3})$$

und

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow C[0, T]^2, \quad a \mapsto Y(t) \cdot (M \cdot Y(0) - N \cdot Y(T))^{-1} \cdot a. \quad (\text{A.4})$$

Die zu dem Randwertproblem A.1 gehörende, homogene Differentialgleichung lautet:

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot y(t). \quad (\text{A.5})$$

Es ist leicht nachvollziehbar, dass $Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ eine Fundamentalmatrix dieser homogenen Differentialgleichung darstellt. Daraus ergibt sich:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$Y(T) = \begin{pmatrix} 1 & (T-1)e^T \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \text{ und} \quad (\text{A.7})$$

$$Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \text{ bzw. } Y^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 1-\tau \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

In dem hier betrachteten Beispiel gilt also für den linearen Operator G , angewandt auf eine Abbildung $\xi(t)$:

$$\begin{aligned}
G\xi(t) &= Y(t) \cdot \left[(M \cdot Y(0) - N \cdot Y(T))^{-1} \cdot N \cdot Y(T) \cdot \int_0^T Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \\
&= Y(t) \cdot \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 1+e^T \\ 0 & 1+e^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & (T-1)e^T \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \right)^{-1} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & (T-1)e^T \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \cdot \int_0^T Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \\
&= Y(t) \cdot \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & e^T \\ 0 & 1+e^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & e^T \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e^T \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \cdot \int_0^T Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \\
&= Y(t) \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e^T \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \cdot \int_0^T Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_0^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \\
&= Y(t) \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e^T \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \cdot \int_0^T Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_0^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \\
&= Y(t) \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & e^T \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \cdot \int_0^T Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_0^t Y^{-1}(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & e^T \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \cdot \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & 1-\tau \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} \cdot \xi(\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1-\tau \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\int_0^T \begin{pmatrix} 0 & e^{T-\tau} \\ 0 & e^{T-\tau} \end{pmatrix} \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1-\tau \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} \cdot \xi(\tau) d\tau \right].
\end{aligned}$$

(A.9)

Der Operator H lässt sich für das betrachtete Beispiel wie folgt auf das, hier vorgegebene, Skalar $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ anwenden:

$$\begin{aligned}
 Ha &= H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= Y(t) \cdot (M \cdot Y(0) - N \cdot Y(T))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \\
 &\quad \cdot \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 1+e^T \\ 0 & 1+e^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & (T-1)e^T \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \right)^{-1} \\
 &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & e^T \\ 0 & 1+e^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & e^T \\ 0 & e^T \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Damit lautet der Operator τ für dieses Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \tau : C[0, T]^2 &\rightarrow 2^{C[0, T]^2}, \quad x(t) \mapsto \\
 &\left\{ y(t) \mid y(t) = \begin{pmatrix} 1 & (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\int_0^T \begin{pmatrix} 0 & e^{T-\tau} \\ 0 & e^{T-\tau} \end{pmatrix} \cdot \xi(\tau) d\tau + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1-\tau \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} \cdot \xi(\tau) d\tau \right] \right. \\
 &\quad \left. + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi(t) \in F(t, x(t)) := x(t) \text{ für fast alle } t \in [0, T], \xi(t) \in L^1[0, T]^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Grundlage der Formeln aus diesem Abschnitt war [22].

Anhang B.

Modellierung der Relativbewegung an einem nicht-normierten Beispiel in MATLAB

Betrachte nun das Beispiel zur Modellierung der Relativbewegung zweier Satelliten aus Abschnitt 3.3 in nicht-normierter Form. Mit der Gravitationskonstanten $\mu = 3,986 \cdot 10^5 \frac{km^3}{s^2}$ und der gewählten großen Halbachse $a = 7000km$ gilt also für die Anfangswerte:

$$\begin{aligned}x(0) &= -0,01127 \cdot a = -78,8666km, & y(0) &= 0 \cdot a = 0km, & z(0) &= 0,1 \cdot a = 700km, \\ \theta(0) &= 0^\circ, & r(0) &= 0,9 \cdot a = 6300km, & \dot{x}(0) &= 0,02 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}} = 0,1509 \frac{km}{s}, & \dot{y}(0) &= \\ &0,02 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}} = 0,1509 \frac{km}{s}, & \dot{z}(0) &= 0 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}} = 0 \frac{km}{s}, & \dot{\theta}(0) &= 1,22838 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = 0,0013 \frac{1}{s}, \\ \dot{r}(0) &= 0 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}} = 0 \frac{km}{s}.\end{aligned}$$

Auch dieses Beispiel lässt sich, analog Abschnitt 3.3, mit MATLAB lösen und darstellen.

In den ersten drei Bildern wurden wieder auf der Abszissenachse die Orbital Periods, also t/T_{norm} mit ($T_{norm} = 2\pi$), und auf der Ordinatenachse in Kilometern die x- bzw. y- bzw. z-Position des Deputy relativ zum Chief abgetragen. In den vier darauf folgenden Bildern wurden, ebenfalls in Kilometern, die x- gegen die y-Position des Deputy bzw. die x- gegen die z-Position des Deputy bzw. die y- gegen die z-Position des Deputy bzw. die x- gegen die y- gegen die z-Position des Deputy geplottet. Das komponentenweise Plotten der Relativbewegung liefert:

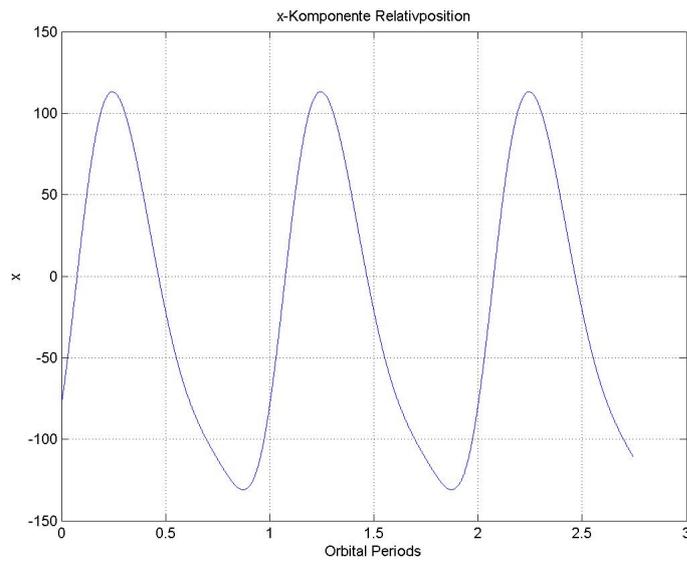


Abb. B.1.: Zeitlicher Verlauf der x-Position des Deputy relativ zum Chief

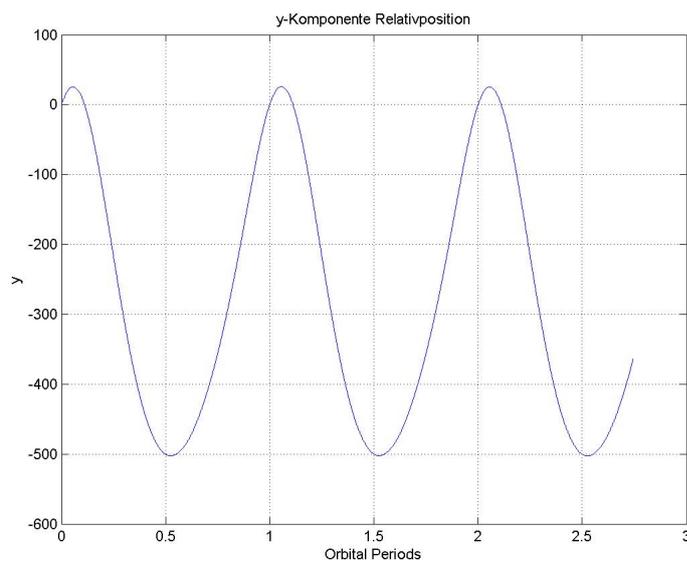


Abb. B.2.: Zeitlicher Verlauf der y-Position des Deputy relativ zum Chief

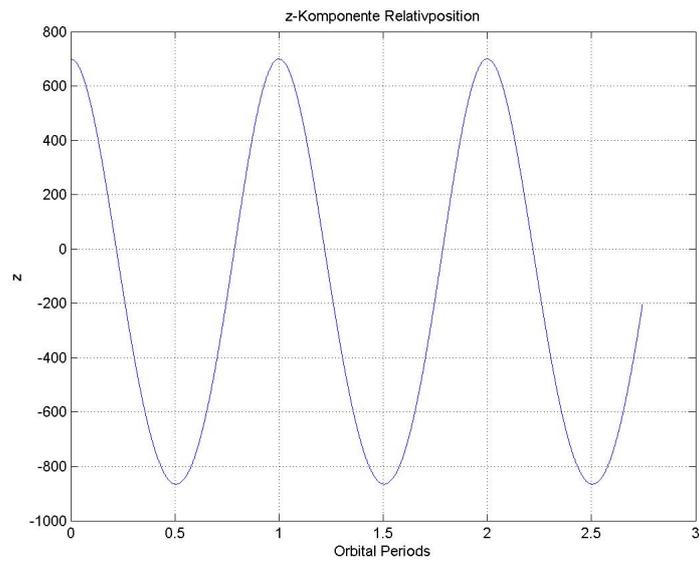


Abb. B.3.: Zeitlicher Verlauf der z-Position des Deputy relativ zum Chief

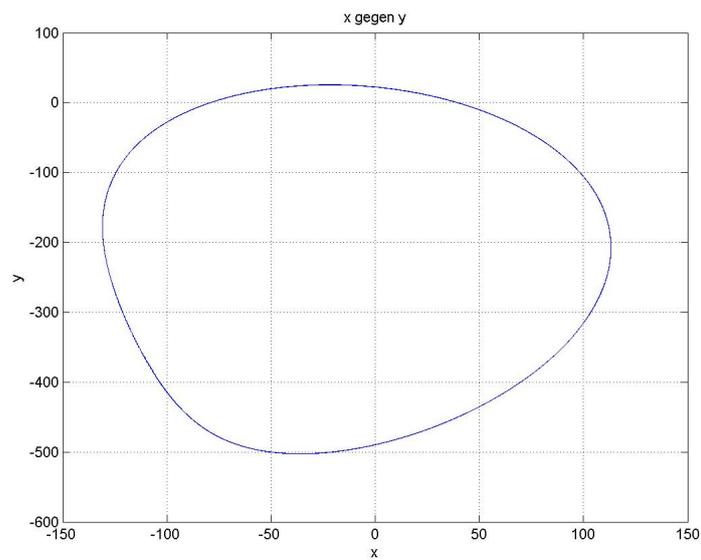


Abb. B.4.: x-Position gegen y-Position

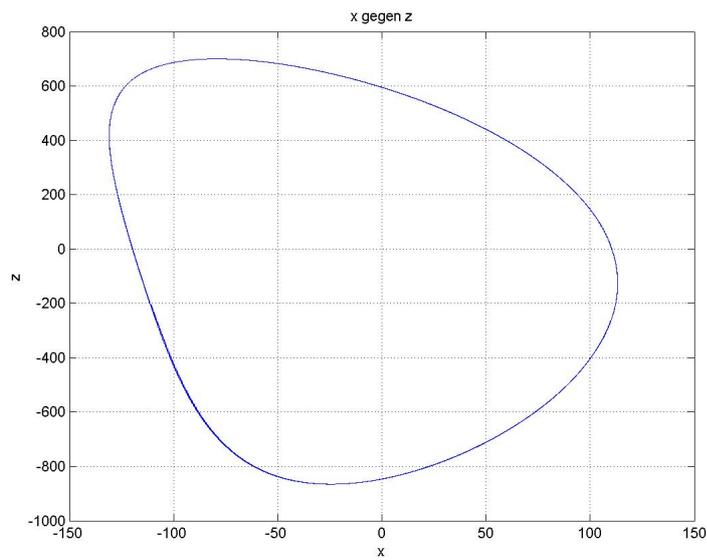


Abb. B.5.: x-Position gegen z-Position

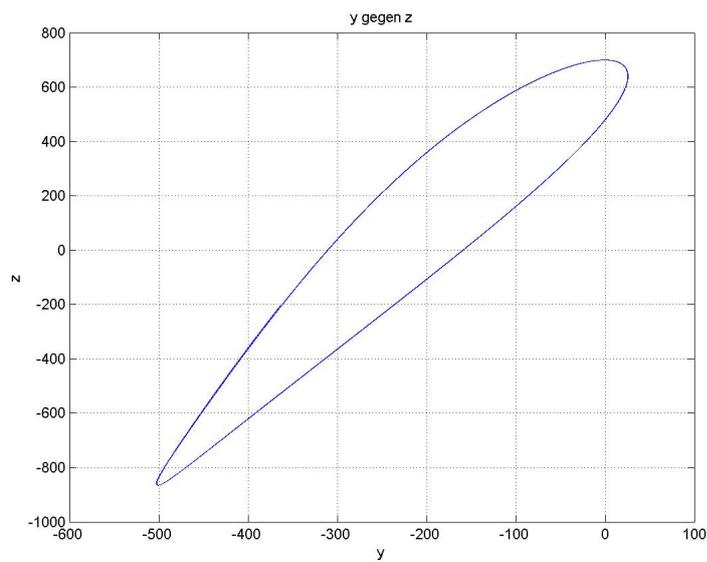


Abb. B.6.: y-Position gegen z-Position

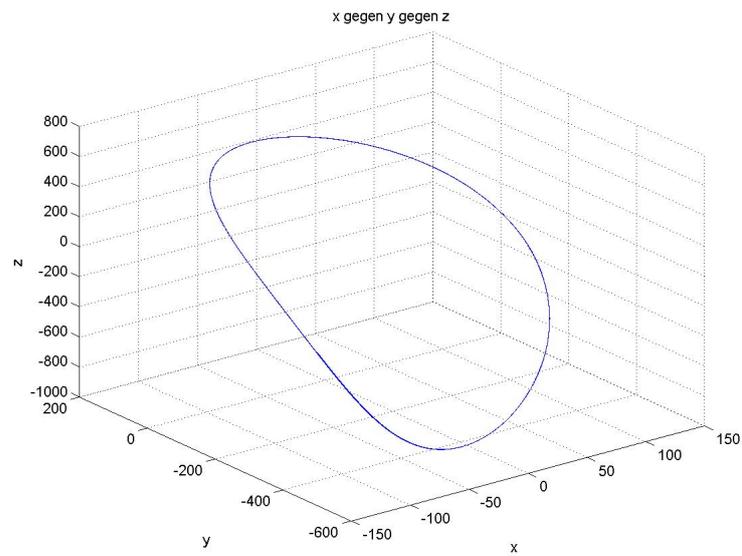


Abb. B.7.: x-Position gegen y-Position gegen z-Position

Wie bereits im Abschnitt 3.3 lässt sich auch hier auf den ersten drei Plots erkennen, dass eine beschränkte Relativbewegung vorliegt. Dies lässt sich wieder auf eine günstige Wahl der Anfangswerte zurückführen.

Für diesen Abschnitt wurden Informationen aus [6] verwendet.

Abbildungsverzeichnis

2.1. Richtungsfeld	9
2.2. Lösungsschar	9
2.3. Lösung aus Lösungsschar	10
2.4. Lösung Randwertproblem	11
3.1. Chief C, Deputy D und Erde E im LVLH-Koordinatensystem	13
3.2. Frühjahrspunkt und ECI-Koordinatensystem	14
3.3. Relativposition r_1-r_0 des Deputy im LVLH-Koordinatensystem bzw. Position r_1 des Deputy im ECI-Koordinatensystem	15
3.4. Relativbewegung des Deputy D im LVLH-Koordinatensystem	16
3.5. Zeitlicher Verlauf der normierten x-Position des Deputy relativ zum Chief	19
3.6. Zeitlicher Verlauf der normierten y-Position des Deputy relativ zum Chief	19
3.7. Zeitlicher Verlauf der normierten z-Position des Deputy relativ zum Chief	20
3.8. Normierte x-Position gegen normierte y-Position	20
3.9. Normierte x-Position gegen normierte z-Position	21
3.10. Normierte y-Position gegen normierte z-Position	21
3.11. Normierte x-Position gegen normierte y-Position gegen normierte z- Position	22
4.1. Brachistochrone-Problem	24
4.2. Relativbewegung des Deputy D im LVLH-Koordinatensystem	27
4.3. Mengenwertige Abbildung (links), gewöhnliche Abbildung (rechts)	32
4.4. Beispiel mengenwertige Abbildung $F(x)=[x,x+1]$	32
4.5. Singuläre Steuerung (links), Bang-bang-Steuerung (rechts)	34
5.1. Schnittpunkte von $f(x)$ mit der Winkelhalbierenden $g(x)$	50
6.1. Beispiel verschiedener Simplizes	63
6.2. Beispiel 2-Simplex	64
6.3. Beispiel Triangulation eines abgeschlossenen Quadrates	65
6.4. Beispiel Simplizes der K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2	67
6.5. K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2	69
6.6. \tilde{K}_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2	70
6.7. Pivotalisieren bei K_1 -Triangulation des \mathbb{R}^2	72
7.1. Simplicialalgorithmus mit einem Restart(untere Abbildung)	85

B.1. Zeitlicher Verlauf der x-Position des Deputy relativ zum Chief	98
B.2. Zeitlicher Verlauf der y-Position des Deputy relativ zum Chief	98
B.3. Zeitlicher Verlauf der z-Position des Deputy relativ zum Chief	99
B.4. x-Position gegen y-Position	99
B.5. x-Position gegen z-Position	100
B.6. y-Position gegen z-Position	100
B.7. x-Position gegen y-Position gegen z-Position	101

Literaturverzeichnis

- [1] Website ATV Sensor.
<http://www.jena-optronik.de/de/lageregelungssensoren/rendezvous-und-docking-sensor-rvs.html> Stand: 20.06.2013.
- [2] Website DEOS Projekt.
<http://www.weblab.dlr.de/rbrt/OOS/DEOS/DEOS.html> Stand: 20.06.2013.
- [3] Website esa Space Debris.
http://www.esa.int/ger/ESA_in_your_country/Germany/Weltraumschrott_Internationale_Experten_einig_ueber_dringenden_Handlungsbedarf Stand: 20.06.2013.
- [4] Website esa Space Debris growing Threat.
http://www.esa.int/Our_Activities/Operations/Space_Debris/Focus_on_growing_threat_of_space_debris Stand: 20.06.2013.
- [5] Website NASA Space Debris.
<http://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/faqs.html> Stand: 20.06.2013.
- [6] K. T. Alfriend, S. R. Vadali, P. Gurfil, J. How, and L. Breger. *Spacecraft Formation Flying: Dynamics, control and navigation*. Elsevier Astrodynamics Series. Butterworth Heinemann, 1st edition, 2010.
- [7] E. L. Allgower and K. Georg. *Simplicial and Continuation Methods for Approximating Fixed Points and Solutions to Systems of Equations*, volume 22 of *SIAM Review*. 1980.
- [8] E. L. Allgower and K. Georg. *Introduction to Numerical Continuation Methods*, volume 45 of *SIAM Classics in Applied Mathematics*. 2003.
- [9] T. Christiaans. *Neoklassische Wachstumstheorie: Darstellung, Kritik und Erweiterung*. Books on Demand, 2004.
- [10] G. Dobner and H.-J. Dobner. *Gewöhnliche Differenzialgleichungen: Theorie und Praxis*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2004.
- [11] K.-H. Elster, editor. *Modern Mathematical Methods of Optimization*. Akademie Verlag Berlin, 1993.
- [12] M. Gerdts. *Vorlesungsskript Optimale Steuerung, WS 2009/2010, Universität Würzburg*. 2010.

- [13] A. J. P. Gomes, I. Voiculescu, J. Jorge, B. Wyvill, and C. Galbraith. *Implicit Curves and Surfaces: Mathematics, Data Structures and Algorithms*. Springer Verlag, 2009.
- [14] W. J. Larson and J. R. Wertz. *Space Mission Analysis and Design*. Microcosm Press & Kluwer Academic Publishers, 3rd edition, 2005.
- [15] E. B. Lee and I. Markus. *Foundations of Optimal Control Theory*. The SIAM Series in Applied Mathematics. 1967.
- [16] W. Ley, K. Wittmann, and W. Hallmann, editors. *Handbuch der Raumfahrt-technik*. Carl Hanser Verlag, 3rd edition, 2008.
- [17] E. Messerschmid and S. Fasoulas. *Raumfahrtsysteme: Eine Einführung mit Übungen und Lösungen*. Springer Verlag, 4th edition, 2011.
- [18] H. J. Oberle. *Skript zur Vorlesung Variationsrechnung und Optimale Steuerung, Universität Hamburg*. 2008. <http://www.math.uni-hamburg.de/home/oberle/skripte/varopt.html>.
- [19] H.-O. Peitgen and H.-O. Walther, editors. *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, volume 730 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1979.
- [20] V. L. Pisacane, editor. *Fundamentals of Space Systems*. JHU/APL Series in Science and Engineering. Oxford University Press, 2nd edition, 2005.
- [21] L. S. Pontrjagin, V. G. Boltjanskij, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Miscenko. *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*. R. Oldenbourg, 1964.
- [22] K. Schilling. *Simpliziale Algorithmen zur Berechnung von Fixpunkten mengenwertiger Operatoren*. Wissenschaftlicher Verlag Trier, 1986.
- [23] K. Schilling. *An approach to control theory by fixed point algorithms*, volume 95 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, 1987.
- [24] K. Schilling. *Constructive proofs of fixed point theorems for set valued operators by simplicial algorithms*, volume 12 of *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*. Pergamon Press, 1988.
- [25] K. Schilling. *An algorithm to solve boundary value problems for differential inclusions and applications in optimal control*, volume 10, Issue 7-8 of *Numerical Functional Analysis and Optimization*. Taylor & Francis, 1989.
- [26] R. Strehlow. *Mathematik-Klausurtrainer*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2007.
- [27] H. J. Sussmann and J. C. Willems. *300 Years of Optimal Control: From The Brachystochrone to the Maximum Principle*. IEEE Control Systems. 1997.

- [28] S. Timmann. *Repetitorium der Gewöhnlichen Differentialgleichungen*. Binomi Verlag, 2005.
- [29] M. J. Todd. *Computation of Fixed Points and Applications*, volume 124 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer Verlag, 1976.
- [30] Z. Yang. *Computing Equilibria and Fixed Points: The Solution of Nonlinear Inequalities*. Kluwer Academic Publishers, 1999.