

BACHELOR-THESIS

# Lévyprozesse und deren Anwendung in der Finanzmathematik

von Marvin Raab (2328820)



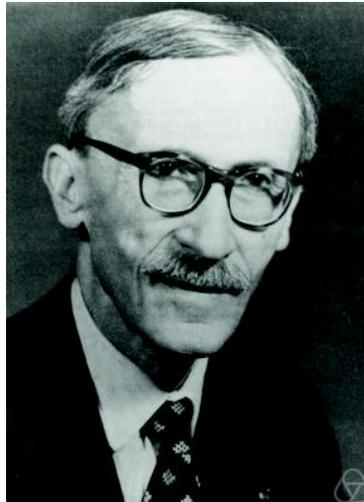
betreut durch Prof. Dr. Christian Klingenberg und vorgelegt am  
22.02.2022

am Lehrstuhl für mathematische Strömungsmechanik des Instituts für  
Mathematik der Julius-Maximilians-Universität Würzburg

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>Danksagung</b>	<b>5</b>
<b>1 Stochastische Prozesse</b>	<b>6</b>
1.1 Grundlagen und Definitionen . . . . .	6
1.2 Beispiele . . . . .	7
1.2.1 Stochastische Abhängigkeiten . . . . .	7
1.2.2 Zeitdiskrete Prozesse . . . . .	8
1.2.3 Zeitstetige Prozesse . . . . .	9
<b>2 Lévyprozesse</b>	<b>12</b>
2.1 Charakteristische Funktionen . . . . .	12
2.2 Das Sprung- und Lévymaß . . . . .	15
2.3 Struktursätze . . . . .	18
2.3.1 Die Lévy-Itô-Zerlegung . . . . .	18
2.3.2 Die Lévy-Chinčin-Formel . . . . .	20
2.4 Kumulanten . . . . .	21
<b>3 Optionsbewertung</b>	<b>22</b>
3.1 Wiederholung und Grundlagen . . . . .	22
3.2 Die Esscher-Transformation . . . . .	24
3.2.1 Existenz . . . . .	25
3.2.2 Eindeutigkeit . . . . .	26
3.2.3 Folgerung – Herleitung der Black-Scholes-Formel . . . . .	27
3.3 Ausblick . . . . .	29
3.3.1 Das CGMY-Modell . . . . .	29
3.3.2 Die Fourier-Methode . . . . .	31
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>34</b>
<b>Literatur- und Quellenverzeichnis</b>	<b>35</b>

## Vorwort



**Abbildung 1:** Paul Lévy (1886–1971)

K napp vier Jahre nach seinem Tod im Jahre 1971, schrieb S. J. Taylor in [Tay75] in Form eines Nekrologs über den französischen Mathematiker Paul Lévy bereits in den ersten Zeilen: „At that time [1919, Anm. d. Verf.] there was no mathematical theory of probability – only a collection of small computational problems. Now it is a full-fledged branch of mathematics using techniques from all branches of modern analysis and making its own contribution of ideas, problems, results and useful machinery to be applied elsewhere. If there is one person who has influenced the establishment and growth of probability theory more than any other, that person must be Paul Lévy“. Schon diese wenigen Worte verdeutlichen die Rolle Lévy's in der Wahrscheinlichkeitstheorie; angefangen bei stochastischen „Grundlagen“ wie dem nach ihm benannten Stetigkeitssatz, welcher nicht nur schwache Konvergenz charakterisiert, sondern auch zum Beweis des ebenso nach ihm benannten zentralen Grenzwertsatzes nach Lindeberg-Lévy dient. Die gewiss größte Bedeutung trägt Lévy in der Theorie der stochastischen Prozesse. Ein stochastischer Prozess ordnet dabei Zufallsvariablen zeitbezüglich ein, beschreibt also beispielsweise die Anzahl der noch übrigen Jetons am Roulette-Tisch, ermöglicht die Berechnung der durchschnittlichen Wartezeit an einem Schalter oder erlaubt die effiziente Bepreisung derivativer Finanzinstrumente. Das Black-Scholes-Modell zur Bewertung europäischer Finanzoptionen, für welches die Ausarbeiter 1997 den Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften verliehen bekamen, basiert in diesem Fall auf einem sogenannten Wienerprozess. Dieser wiederum zählt zu der Klasse der Lévyprozesse, deren mathematische Theorie zentrales Thema im ersten Teil dieser Arbeit sein soll. All jene in dieser Kategorie angesiedelten Prozesse verbinden dabei die gleichen spezifischen Eigenschaften und die Gültigkeit verschiedenster Theoreme. Es scheint doch erstaunlich, schmälert aber nicht den Wahrheitsgehalt, dass sich jeder Lévyprozess durch Angabe dreier stochasti-

scher Größen eindeutig strukturell charakterisieren lässt. Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit der risikoneutralen, also arbitragefreien Bewertung von europäischen Optionen, deren zugehöriger Basiswert durch einen Lévyprozess beschrieben wird. Wie wir sehen werden, ist dabei die Esscher-Transformation ein probates Mittel zur Sicherstellung der Risikoneutralität in Lévymärkten. Durch die allgemein gehaltene Lévytheorie und mithilfe der Esscher-Transformation ergibt sich im Nachgang die Black-Scholes-Formel quasi als interessantes Nebenprodukt und zeigt überdies, dass diese nicht nur auf klassischem Wege als Lösung der Black-Scholes-Differentialgleichung resultiert, sondern auch auf alternative Weise herleitbar ist. Zuletzt setzten wir uns mit einem weiteren Marktmodell, welches durch einen Lévyprozess bestimmt ist, auseinander und befassen uns mit einer möglichen numerischen Methode zur Berechnung des Werts einer Calloption. Hintergrund meiner Themenwahl war ursprünglich der von meinem Betreuer Prof. Dr. Klingenberg empfohlene Blick in das Buch [Pas11] von Andrea Pascucci, mit besonderem Augenmerk auf den letztlich auch in der Finanzmathematik Anwendung findenden Satz von Girsanov und möglichen numerischen Methoden bezüglich stochastischer Differentialgleichungen. Beim digitalen Überfliegen des Textes erweckte jedoch eher das Folgekapitel mit dem Namen „Introduction to Lévy processes“ mein Interesse, woraufhin ich mich nach erster intensiverer Beschäftigung mit dem Thema und Lesen des Journals „RISIKO MANAGER“ über Risikomanagement mit Sprungprozessen, siehe dafür [Khe+15], entschloss, genau in diesem Bereich meine Bachelor-Thesis verfassen zu wollen.

## Danksagung

Mein Dank geht an erster Stelle an meinen Betreuer Prof. Dr. Christian Klingenberg für seine vollste Unterstützung und Hilfe bei Fragen und Problemen meinerseits. Die jeweiligen Eingangsgespräche mit ihm über mögliche Inhalte oder literarische Quellen und die letztendliche Festlegung meines Seminarthemas im vergangenen Sommersemester und jenes der Bachelorarbeit wiesen mich in die richtige Richtung und brachten mich auf eines der interessantesten Themengebiete der angewandten Mathematik.

Weiter bedanke ich mich bei Kathrin Hellmuth aus der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Klingenberg, welche mich ebenso tatkräftig unterstützte.

Zu guter Letzt danke ich auch meinem Kommilitonen und Kollegen Okan für das Korrekturlesen meiner Arbeit.

# 1 Stochastische Prozesse

Zuallererst soll der Begriff des stochastischen Prozesses, ähnlich wie in [Mür14], definiert werden. Diese stellen die Grundlage der stochastischen Analysis zur Modellierung zufälliger und risikobehafteter Vorgänge dar.

## 1.1 Grundlagen und Definitionen

**Definition.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozess  $X := (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  ist eine nicht-leere Familie von Zufallsvariablen mit Werten in einem messbaren Raum  $(E, \mathcal{E})$ .

**Bemerkung.** Im obigen Fall bezeichnet  $(E, \mathcal{E})$  den Zustandsraum und  $\mathcal{T}$  den Zeitraum von  $X$ . Die Mengen  $E$  und  $\mathcal{T}$  heißen Werte- bzw. Indexmenge und können jeweils sowohl diskret als auch kontinuierlich sein. Je nachdem nennt man einen stochastischen Prozess wert- bzw. zeitdiskret oder reellwertig<sup>1</sup> bzw. zeitstetig. Ein stochastischer Prozess ordnet also jeder Zeit  $t \in \mathcal{T}$  eine Zufallsvariable mit einem bestimmten Wert zu und ist demnach eine Abbildung der Form  $X : \Omega \times \mathcal{T} \rightarrow E$ .

Fasst man einen Prozess – statt als Funktion zweier Argumente – als Funktion von  $t \in \mathcal{T}$  mit festem  $\omega \in \Omega$  auf, gelangt man zum Begriff des Pfads (vgl. [MS05]):

**Definition.** Für einen stochastischen Prozess  $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  heißt die Funktion

$$X(\cdot, \omega) : \mathcal{T} \rightarrow E, t \mapsto X_t(\omega)$$

Pfad von  $\omega \in \Omega$ .

Die Pfadabbildungen beschreiben somit genau die Funktionswerte der Zufallsvariablen. Zudem charakterisieren Pfade, wie beispielsweise [WW16] und [Kle13] zeigen, zeitstetige Prozesse:

**Definition.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum mit zugehöriger Wertemenge  $E$  und  $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  ein stochastischer Prozess.

- (1)  $X$  heißt fast sicher (rechts-/links-)stetig, wenn für fast alle  $\omega \in \Omega$  der zugehörige Pfad (rechts-/links-)stetig sind.
- (2)  $X$  heißt stochastisch stetig, wenn für alle  $t \in \mathcal{T}$  und  $\varepsilon > 0$  gilt:

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(\{|X_s(\omega) - X_t(\omega)| > \varepsilon\}) = 0.$$

---

<sup>1</sup>Streng genommen, kann  $E$  auch komplexwertig sein. Für unsere Zwecke genügt allerdings der reellwertige Fall.

(3)  $X$  ist ein càdlàg<sup>2</sup>-Prozess, wenn  $X$  fast sicher rechtsstetig ist und der linksseitige Grenzwert der Pfade von fast allen  $\omega \in \Omega$  in allen  $t \in \mathcal{T}$  existiert, d. h. es gilt stets

$$\lim_{s \rightarrow t^+} X_s(\omega) := X_{t+}(\omega) = X_t(\omega) \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow t^-} X_s(\omega) := X_{t-}(\omega) \quad \text{existiert.}$$

(4) Ein reellwertiger Prozess  $X$  heißt Prozess mit unabhängigen Zuwächsen, wenn für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und  $i \in \{1, \dots, n\}$  sowie für beliebige  $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$  mit  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  die Zufallsvariablen bzw. Zuwächse  $\Delta X_i := X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$  untereinander stochastisch unabhängig sind.

(5) Ein reellwertiger Prozess  $X$  heißt Prozess mit stationären Zuwächsen, wenn  $(\mathcal{T}, +, 0)$  ein Monoid<sup>3</sup> ist und die Verteilung der einzelnen Zuwächse  $\Delta X_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit beliebigem  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  nur der Intervalllänge<sup>4</sup> bedingt, das bedeutet, folgende Zuwächse sind für beliebige  $s \in \mathcal{T}$  identisch verteilt:

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \stackrel{d}{=} X_{t_i+s} - X_{t_{i-1}+s} \stackrel{d}{=} X_{t_i-t_{i-1}}. \quad (1)$$

## 1.2 Beispiele

### 1.2.1 Stochastische Abhängigkeiten

Um stochastische Prozesse konkreter klassifizieren zu können, benutzt man häufig bedingte Wahrscheinlichkeiten bzw. Erwartungswerte, welche wiederum Aussagen der (Un-)Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen zu unterschiedlichen Zeitpunkten liefern. *Martingale* modellieren faire Spiele: Vereinfacht gesagt, verhält sich (im diskreten Fall) ein Martingal im Schritt  $n + 1$  so wie in den ersten  $n$  gegebenen Schritten. Genaue Verläufe und Ausgänge der ersten  $n - 1$  Schritte sind somit nicht relevant (vgl. hierzu Kapitel 5 in [WW16]).

**Definition.** Ein stochastischer Prozess  $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  ist ein Martingal, wenn für jedes  $t \in \mathcal{T}$  die Zufallsvariable  $X_t$  bezüglich einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_t$  messbar ist – man sagt,  $X$  ist adaptiert an die Filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  mit  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  für alle  $s, t \in \mathcal{T}$  mit  $s \leq t$ . Zusätzlich muss  $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$  gelten und die eigentliche Martingaleigenschaft erfüllt sein, welche da ist:

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \quad \forall s, t \in \mathcal{T} \text{ mit } t > s. \quad (2)$$

<sup>2</sup>Frz. Akronym für continue à droite, limite à gauche (z. Dt. rechtsseitig stetig, mit Grenzwerten von links).

<sup>3</sup>Sprich,  $\mathcal{T}$  ist abgeschlossen unter Addition, erfüllt das Assoziativgesetz und besitzt das eindeutige neutrale Element 0.

<sup>4</sup>Meint den zeitlichen Unterschied zweier Zufallsvariablen, also die Differenz der Indizes von bspw.  $X_{t_i}$  und  $X_{t_{i-1}}$ .

Die einfachste aller Filtrationen ist die natürliche Filtration  $\mathbb{F}^X$ , welche definiert ist durch:

$$\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0} := \sigma(X_s : s \leq t).$$

Kommen wir zum Begriff des Markovprozesses:

**Definition.** Ein adaptierter Prozess mit Zustandsraum  $(B, \mathbb{B})$  heißt Markovprozess, wenn für jede Borelmenge  $H \in \mathbb{B}$  folgende Identität besteht:

$$\mathbb{E}(X_t \in H \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t \in H \mid X_s) \quad \forall s, t \in \mathcal{T} \text{ mit } t > s.$$

Zusammenfassend können wir festhalten, dass der zu erwartende Wert eines stochastischen Prozesses zum Zeitpunkt  $t$  unter Berücksichtigung aller Ausgänge und Beobachtungen bis zum Zeitpunkt  $s$  im Falle eines Martingals gerade dem Wert im Zeitpunkt  $s$  entspricht und auch für einen Markovprozess sind Informationen vor dem Zeitpunkt  $s$  irrelevant; die einzig notwendige Information zur Berechnung des Erwartungswerts zum Zeitpunkt  $t$  ist die Situation in  $s$ . Während also ein Markovprozess lediglich  $X_s$  nutzt, um den Erwartungswert in einem späteren Zeitpunkt zu berechnen, entspricht  $X_s$  – im Falle eines Martingals – gerade diesem Erwartungswert. Alle obigen Definitionen stammen aus [Pas11].

### 1.2.2 Zeitdiskrete Prozesse

Eine *Irrfahrt* oder auch *Random Walk*  $S = (S_0, S_1, S_2, \dots)$  ist ein Prozess, dessen Wert in einem festen Zeitpunkt von den vorherigen Zuwächsen abhängt. Diese werden durch eine Folge unabhängiger und identisch verteilter (u.i.v.) Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  beschrieben. Mit  $S_0(\omega) = 0$  für jedes  $\omega$  gilt somit nach [FG96]:

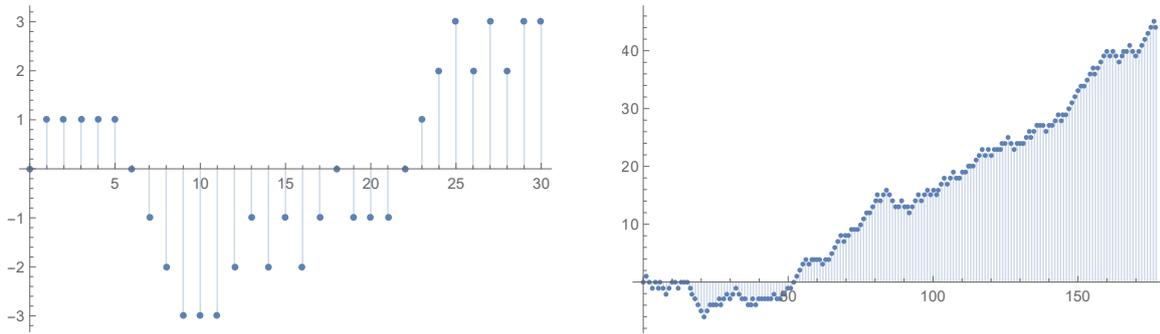
$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Wegen der Unabhängigkeit und der identischen Verteilung der  $X_i$  ist  $S$  ein Prozess mit unabhängigen und stationären Zuwächsen.

Gilt verschärfend  $X_i \sim \text{Ber}(p)$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots\}$  und  $p \in ]0; 1[$ , wird  $X = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zum *Bernoulli-Prozess*. Die daraus resultierende Irrfahrt zu einem fixen Zeitpunkt beschreibt lediglich die Anzahl an Erfolgen bis dorthin.

Eine Irrfahrt ist also ein Markovprozess, da die sogenannte Übergangswahrscheinlichkeit des Prozesses  $S$  zwischen dem jetzigen Zeitpunkt  $n$  und dem nächsten Zeitpunkt  $n + 1$  ausschließlich vom Status quo, also von  $S_n$ , abhängt. Tatsächlich sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen  $S_k$  und  $S_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  aufgrund der Unabhängigkeit und der identischen Verteilung der  $X_i$  konstant, womit eine Irrfahrt sogar ein homogener Markovprozess ist.

Genauer über homogene Markovprozesse findet man in Kapitel 4.2 in [WW16].



**Abbildung 2:** Zwei Pfade einer Irrfahrt mit gleichen Parametern: Die  $X_i$  nehmen mit Wahrscheinlichkeit  $p = 0,5$  den Wert 1, mit  $q = 0,3$  den Wert  $-1$  und mit  $1 - p - q = 0,2$  den Wert 0 an.

### 1.2.3 Zeitstetige Prozesse

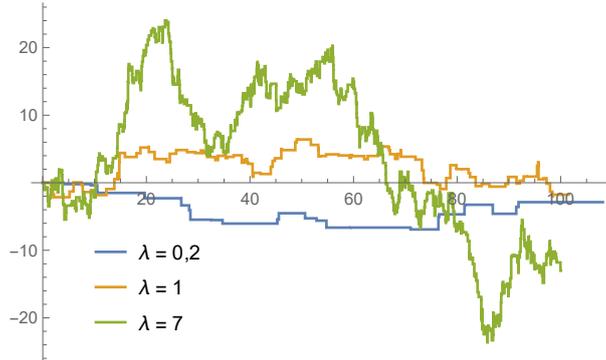
Ein càdlàg-Prozess  $P = (P_t)_{t \geq 0}$  ist ein (homogener) *Poissonprozess* mit Intensität  $\lambda$ , wenn  $P_0 = 0$  ( $\mathbb{P}$ -f. s.) gilt und er unabhängige und poissonverteilte Zuwächse besitzt, d.h.  $\Delta P_i \sim \text{Poi}(\lambda \cdot (t_i - t_{i-1}))$  für streng monoton steigende  $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$  mit beliebigem  $n \in \mathbb{N}$ . Ebenso sind die einzelnen  $P_t$  poissonverteilt. Da die Verteilung der Zuwächse nicht vom Zeitpunkt, sondern nur von der Zeitspanne abhängt, ist ein Poissonprozess per Definition stets ein Prozess mit stationären Zuwächsen und ein wertdiskreter Markovprozess, d.h. er erfüllt die Markoveigenschaft nach Satz 11.4 in [Mür14] im folgenden Sinne:

$$\mathbb{P}(P_{t_{n+1}} = e_{n+1} \mid P_{t_0} = e_0, \dots, P_{t_n} = e_n) = \mathbb{P}(P_{t_{n+1}} = e_{n+1} \mid P_{t_n} = e_n).$$

Summiert man stattdessen u.i.v. Zufallsvariablen  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  bis zu  $i = P_t$  auf erhält man durch die Festlegung

$$X_t = \sum_{i=1}^{P_t} Y_i$$

einen *zusammengesetzten Poissonprozess*, wenn gleichzeitig  $(P_t)_{t \geq 0}$  ein von  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  unabhängiger Poissonprozess ist.



**Abbildung 3:** Pfade eines zusammengesetzten Poissonprozesses von standardnormalverteilten Zufallsvariablen  $Y_i$  in Abhängigkeit der Intensität  $\lambda$ : Diese kontrolliert die Häufigkeit der Sprünge des Prozesses.

Ein Beispiel für einen *Gaußprozess* – ein Prozess, bei welchem jedes  $n$ -Tupel  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  mit  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$   $n$ -dimensional normalverteilt ist – ist der *Wienerprozess*. Man klassifiziert einen Wienerprozess als speziellen Gaußprozess mit Erwartungswert  $\mathbb{E}(W_t) = \lambda t$  und Kovarianz  $\text{Cov}(W_t, W_s) = \sigma^2 \cdot \min(s, t)$  für alle  $s, t \geq 0$ . Alternativ lässt sich ein Wienerprozess (gemäß Definition 6.1 aus [WW16]) mit Drift  $\lambda \in \mathbb{R}$  und Volatilität  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  ähnlich wie ein Poissonprozess charakterisieren: Hier gilt ebenso  $W_0 = 0$  ( $\mathbb{P}$ -f. s.), ferner ist  $W$  ein stetiger, adaptierter Prozess mit unabhängigen Zuwächsen  $\Delta W_i$ , welche abermals normalverteilt mit den Parametern  $\lambda \cdot (t_i - t_{i-1})$  und  $\sigma^2 \cdot (t_i - t_{i-1})$  sind.

Hat ein Prozess unabhängige Zuwächse, dann sind diese Zuwächse auch unabhängig von der natürlichen Filtration, d. h. für  $t \geq s$  ist  $X_t - X_s$  unabhängig von  $\mathcal{F}_s^X$  (vgl. dazu Satz 12.2 [MS05]). Deshalb ist der sogenannte *standardisierte Wienerprozess*  $\bar{W}$  mit  $\lambda = 0$  und  $\sigma = \sigma^2 = 1$  ein Martingal, was sich sofort aus dem nun folgenden Resultat ergibt (Satz 13.2 [MS05]).

**Satz.** *Besitzt ein reellwertiger Prozess  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  mit  $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$  für alle  $t \geq 0$  unabhängige Zuwächse, so ist  $(X_t - \mathbb{E}(X_t))_{t \geq 0}$  ein Martingal.*

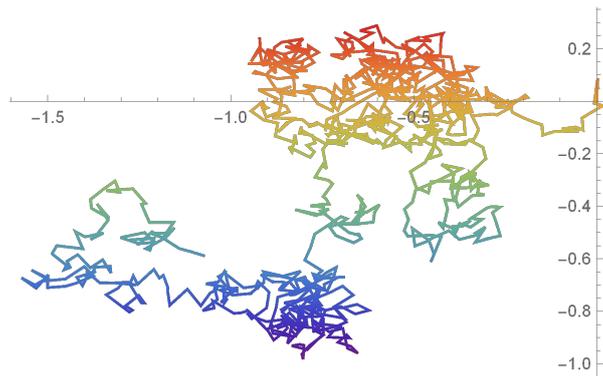
*Beweis.* Da  $X$  unabhängige Zuwächse besitzt, sind diese auch unabhängig von der natürlichen Filtration  $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_u : u \leq s)$ , weiter folgt für  $t > s$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s^X) &= \mathbb{E}((X_t - X_s) + X_s | \mathcal{F}_s^X) \\ &= \mathbb{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s^X) + \mathbb{E}(X_s | \mathcal{F}_s^X) \\ &= \mathbb{E}(X_t - X_s) + X_s \\ &= \mathbb{E}(X_t) + (X_s - \mathbb{E}(X_s)) \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}(X_t - \mathbb{E}(X_t) | \mathcal{F}_s^X) &= X_s - \mathbb{E}(X_s). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wendet man bei der Subtraktion von  $\mathbb{E}(X_t)$  die tower rule bzw. das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit an und gelangt durch die Linearität der bedingten Erwartung auf den linksstehenden Ausdruck. ■

Da ein standardisierter Wienerprozess für jedes  $t$  Erwartungswert  $\lambda t = 0 \cdot t = 0$  besitzt, folgt die Martingaleigenschaft sofort aus obigem Satz. Ferner ist festzuhalten, dass sich ein Wienerprozess  $(W_t)_{t \geq 0}$  mit Drift  $\lambda$  und Volatilität  $\sigma$  folgendermaßen aus einem standardisierten Wienerprozess  $(\bar{W}_t)_{t \geq 0}$  ergibt:

$$W_t = \lambda t + \sigma \bar{W}_t, \quad t \geq 0.$$



**Abbildung 4:** Pfad eines zweidimensionalen, standardisierten Wienerprozesses

Die Kategorie der *Lévyprozesse* ist der zentrale Bestandteil dieser Arbeit und soll im nachfolgenden Kapitel genauer ausgearbeitet werden.

## 2 Lévyprozesse

Bei den folgenden Resultaten in diesem Kapitel wurde sich weitestgehend an [TC03] und [Pas11] orientiert.

**Definition.** Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger càdlàg-Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  mit  $X_0 = 0$  ( $\mathbb{P}$ -f. s.).

$X$  heißt Lévyprozess, wenn er folgende Eigenschaften erfüllt:

- (1)  $X$  hat unabhängige Zuwächse.
- (2)  $X$  hat stationäre Zuwächse.
- (3)  $X$  ist stochastisch stetig.

### 2.1 Charakteristische Funktionen

Die charakteristische Funktion

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi \cdot X_t}), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$$

eines stochastischen Prozesses  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  weist im Falle eines Lévyprozesses eine besondere Identität auf:

**Satz.** Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  ein Lévyprozess. Dann existiert ein eindeutiges  $\psi_X \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  mit  $\psi_X(0) = 0$  und

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \exp(t \cdot \psi_X(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, t \geq 0. \quad (3)$$

Man nennt  $\psi_X$  den Lévyexponenten von  $X$ .

*Beweis.* Wir schreiben  $X_{t+s} = X_s + (X_{t+s} - X_s)$  für  $t > s$ . Da  $X$  ein Lévyprozess ist, sind die beiden Summanden  $X_s$  und  $X_{t+s} - X_s$  stochastisch unabhängig, womit die charakteristische Funktion der Summe mit dem Produkt der charakteristischen Funktionen übereinstimmt. Zudem erhalten wir gemäß (1) die identische Verteilung von  $X_{t+s} - X_s$  und  $X_t$ , woraus wiederum die Gleichheit der jeweiligen charakteristischen Funktionen resultiert. Zusammenfassend ergibt sich die Multiplikativität von  $\varphi_{X_t}(\xi)$  für feste  $\xi$ :

$$\varphi_{X_{t+s}}(\xi) = \varphi_{X_s + X_{t+s} - X_s}(\xi) = \varphi_{X_s}(\xi) \varphi_{X_{t+s} - X_s}(\xi) = \varphi_{X_s}(\xi) \varphi_{X_t}(\xi).$$

Zudem bedeutet stochastische Stetigkeit eines Lévyprozesses nichts weiter, als stochastische Konvergenz von  $X_s$  gegen  $X_t$  während  $s \rightarrow t$ , welche wiederum bekanntermaßen die Konvergenz in Verteilung impliziert. Per Definition bedeutet Konvergenz in Verteilung lediglich schwache Konvergenz von den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßen, also punktweise Konvergenz in allen Stetigkeitsstellen der entsprechenden Verteilungsfunktion, woraus gerade aus dem Stetigkeitssatz von Lévy die punktweise Konvergenz von  $\varphi_{X_s}(\xi)$  gegen  $\varphi_{X_t}(\xi)$  und damit die Stetigkeit der Abbildung  $t \mapsto \varphi_{X_t}(\xi)$  folgt.

Tatsächlich ist die einzig stetige Funktion mit  $\varphi_{X_0}(\xi) = 1$  und der oben aufgezeigten multiplikativen Eigenschaft die Exponentialfunktion der Form  $t \mapsto e^{at}$  mit  $a \in \mathbb{R}$  (als Lösung einer speziellen Cauchyschen, exponentiellen Funktionalgleichung). ■

Da die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen deren Verteilung eindeutig bestimmt, folgt aus (3), dass die Verteilung eines Lévyprozesses  $(X_t)_{t \geq 0}$  hinreichend durch die Verteilung einer beliebigen Zufallsvariablen  $X_{t_0}$  mit  $t_0 > 0$  charakterisiert wird. Speziell für  $t_0 = 1$  stimmt der Lévyexponent mit der sogenannten *kumulantenerzeugenden Funktion*  $\mathcal{K}_{X_1}(\xi)$  überein, welche im Allgemeinen für eine Zufallsvariable  $X_t$  die Gleichheit

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \exp(\mathcal{K}_{X_t}(\xi)) \quad (4)$$

erfüllt. Demgemäß gilt folgender zeitlich linearer Zusammenhang zwischen der kumulantenerzeugenden Funktion einer Zufallsvariablen und dem Lévyexponenten eines Lévyprozesses:

$$\mathcal{K}_{X_t} = t\mathcal{K}_{X_1} = t\psi_X. \quad (5)$$

Über den Begriff der unendlichen Teilbarkeit lässt sich die charakteristische Funktion eines Lévyprozesses weiter vereinfachen:

**Definition.** Eine Zufallsvariable  $X$  heißt unendlich teilbar, wenn für jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  u.i.v. Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  existieren, so dass

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n X_i.$$

**Korollar.** Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  ein Lévyprozess. Dann ist  $X_t$  für jedes  $t \geq 0$  unendlich teilbar und es gilt

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \left( \varphi_{X_{\frac{t}{n}}}(\xi) \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Da  $X$  ein Lévyprozess ist, sind die Zuwächse

$$Y_i := X_{\frac{it}{n}} - X_{\frac{(i-1)t}{n}}$$

für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  unabhängig und identisch verteilt. Addiert man alle  $Y_i$  auf, erhält man eine Teleskopsumme und damit

$$\sum_{i=1}^n Y_i = X_t,$$

was die unendliche Teilbarkeit von  $X_t$  zeigt. Die multiplikative Darstellung von  $\varphi_{X_t}$  ergibt sich durch die Rechenregeln für charakteristische Funktionen. ■

Nachfolgend soll die Berechnung des Lévyexponenten anhand von Beispielen bereits bekannter Prozesse konkret ausgeführt werden.

**Beispiel** (Wienerprozess mit Drift). Da die fast sichere Stetigkeit, ähnlich wie bei den entsprechenden Konvergenzbegriffen, die stochastische Stetigkeit impliziert, ist der Wienerprozess, definiert durch  $W_t = \lambda t + \sigma \bar{W}_t$  mit dem standardisierten Wienerprozess  $(\bar{W}_t)_{t \geq 0}$ , ein Lévyprozess. Somit gilt unter Berücksichtigung von  $\bar{W}_t \sim \mathcal{N}(0, t)$  und damit  $\varphi_{\bar{W}_t}(\xi) = e^{-\frac{t\xi^2}{2}}$ :

$$\varphi_{W_t}(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi W_t}) = \mathbb{E}(e^{i\xi(\lambda t + \sigma \bar{W}_t)}) = e^{i\lambda t \xi} \cdot \mathbb{E}(e^{i\xi \sigma \bar{W}_t}) = e^{i\lambda t \xi} \cdot e^{\frac{t(i\xi\sigma)^2}{2}} = e^{t(i\lambda\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2)},$$

wobei bei der Berechnung von  $\mathbb{E}(e^{i\xi\sigma\bar{W}_t})$  die lineare Transformierbarkeit der charakteristischen Funktion im Sinne von  $\varphi_{aX}(\xi) = \varphi_X(a\xi)$  eingeht. Der eindeutige Lévyexponent von  $W_t$  lautet somit für beliebige  $t \geq 0$

$$\psi_W(\xi) = i\lambda\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}. \quad (6)$$

Im  $d$ -dimensionalen Fall, also wenn  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  und  $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times N}$ , gilt mit  $\mathcal{C} := \sigma\sigma^\top$ :

$$\psi_W(\xi) = i\lambda\xi - \frac{\langle \mathcal{C}\xi, \xi \rangle}{2}. \quad (7)$$

**Beispiel** (Poissonprozess). Ein Poissonprozess  $P = (P_t)_{t \geq 0}$  mit Intensität  $\lambda$  ist ebenso ein Lévyprozess. Aufgrund der stationären Zuwächse gilt

$$\mathbb{P}(|P_s(\omega) - P_t(\omega)| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|P_{t-s}(\omega)| > \varepsilon)$$

und damit ist  $P$  genau dann stochastisch stetig, wenn  $X_{t-s}$  in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, währenddessen  $s$  gegen  $t$  läuft, was aufgrund der Rechtsstetigkeit, genauer gesagt wegen der càdlàg-Eigenschaft von  $P$ , erfüllt ist (vgl. [saz14]).

Weiter ist

$$\varphi_{P_t}(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi P_t})$$

und mit der Eigenschaft charakteristischer Funktionen für Zähldichten

$$= \sum_{n \geq 0} e^{i\xi n} \mathbb{P}(P_t = n) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(e^{i\xi} \lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t e^{i\xi}}$$

und demnach

$$\psi_P(\xi) = \lambda(e^{i\xi} - 1).$$

**Beispiel** (Zusammengesetzter Poissonprozess). Sei  $X_t = \sum_{j=1}^{P_t} Y_j$  zusammengesetzt poissonverteilt.  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  ist ein càdlàg-Prozess, da die Sprünge von  $X$  zugleich mit denen von  $P = (P_t)_{t \geq 0}$  eintreten.  $X$  ist ein Lévyprozess, da er außerdem unabhängige und stationäre Zuwächse besitzt; dies folgt aus den Eigenschaften des ursprünglichen Poissonprozesses  $P$ , für Details sei auf Theorem 2.10 in [Sch11] verwiesen.

Hinsichtlich der charakteristischen Funktion erhält man zunächst mithilfe der tower rule

$$\begin{aligned}\varphi_{X_t}(\xi) &= \mathbb{E}(e^{i\xi X_t}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{i\xi X_t} | P_t)) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{P_t} e^{i\xi Y_j} | P_t\right)\right) = \mathbb{E}((\varphi_{Y_1}(\xi))^{P_t}) \\ &= \sum_{n \geq 0} (\varphi_{Y_1}(\xi))^n \mathbb{P}(P_t = n) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t \varphi_{Y_1}(\xi))^n}{n!} \\ &= \exp(-\lambda t) \exp(\lambda t \varphi_{Y_1}(\xi)) = \exp(t \cdot (\lambda \cdot (\varphi_{Y_1}(\xi) - 1))),\end{aligned}$$

womit der Lévyexponent folgende Darstellung hat:

$$\psi_X(\xi) = \lambda(\varphi_{Y_1}(\xi) - 1) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\xi x} - 1) \lambda \mu_{Y_1}(dx). \quad (8)$$

Hierbei beschreibt das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_{Y_1}$  die Verteilung der Sprunggröße von  $Y_1$  (und wegen der identischen Verteilung auch jene aller anderen  $Y_j$ ); man deutet das Produkt von Intensität und Maß  $\lambda \mu(dx)$  als die erwartete Anzahl an Sprüngen im Zeitintervall  $[x; x + dx]$ .

## 2.2 Das Sprung- und Lévymaß

Grundsätzlich finden wir zu jedem càdlàg-Prozess  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  ein Maß auf  $[0; \infty[ \times \mathbb{R}^d$ , welches die Anzahl an Sprüngen von  $X$  mit jeweiliger Sprunggröße in einer messbaren Menge  $B \subset \mathbb{R}^d$  bis zu einem Zeitpunkt  $t$  zählt – ein zufälliges Zähl- oder auch Sprungmaß. Dieses definieren wir wie folgt mittels [App05]:

$$J_X(t, B) := \#\{0 \leq s \leq t; \Delta X_s \in B\} = \sum_{0 \leq s \leq t} \chi_B(\Delta X_s).$$

Im Falle eines wertdiskreten, zusammengesetzten Poissonprozesses ergibt sich für den Erwartungswert von  $J_X$ <sup>5</sup>:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(J_X(t, B)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{P_t} \chi_B(Y_j)\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(P_t = n) \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(\chi_B(Y_j)) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} n \mu_{Y_1}(B) = t \lambda \mu_{Y_1}(B).\end{aligned}$$

Ergo steigt der Erwartungswert von  $J_X$  linear in  $t$  an und wir definieren die erwartete Anzahl an Sprüngen mit  $\Delta X_s \in B$  pro Einheitszeitintervall als Intensitätsmaß und analog für beliebige Lévyprozesse als *Lévymaß* mit

$$\begin{aligned}\nu_X(B) &:= \mathbb{E}(J_X(1, B)) \\ &= \lambda \mu_{Y_1}(B) \text{ für zusammengesetzte Poissonprozesse, } B \subset \mathbb{R}^d.\end{aligned} \quad (9)$$

<sup>5</sup>Dieser ist definiert, da ein zufälliges Maß lediglich eine Zufallsvariable mit Maßen als Werte ist.

In (9) wird deutlich, dass das Lévymaß im Allgemeinen kein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, denn im Falle eines zusammengesetzten Poissonprozesses gilt  $\int_{\mathbb{R}^d} \nu_X(dx) = \lambda \neq 1$ . Des Weiteren definiert das Sprungmaß eines Lévyprozesses einen neuen Prozess, wie folgendes Korollar zeigt.

**Korollar.** Sei  $J_X$  das Sprungmaß eines Lévyprozesses mit Lévymaß  $\nu_X$ . Dann wird durch die Abbildung

$$(1) \quad t \mapsto J_X(t, B) = \sum_{0 \leq s \leq t} \chi_B(\Delta X_s) \quad (10)$$

ein Poissonprozess mit Intensität  $\nu_X(B)$  definiert, wenn zusätzlich  $B \subset \mathbb{R}^d$  und  $0 \notin B$  gilt.

$$(2) \quad t \mapsto J_X(t, B; f) := \int_0^t \int_B f(s, x) J_X(ds, dx) := \sum_{0 \leq s \leq t} f(s, \Delta X_s) \chi_B(\Delta X_s) \quad (11)$$

ein zusammengesetzter Poissonprozess definiert, wenn  $B \subset \mathbb{R}^d$  mit  $0 \notin B$  und  $f$  messbar ist.

*Beweisidee.* (1) lässt sich dadurch beweisen, dass ein monoton steigender Lévyprozess mit Zuwachs-Wertemenge  $\{0, 1\}$  einen Poissonprozess eindeutig charakterisiert. Mittels (1) und der Typisierung der Verteilung anhand der charakteristischen Funktion zeigt man (2).

Die genauen Beweise zu beiden Aussagen findet man in [App05] unter Theorem 2.3.5 und 2.3.8. ■

Das Integral in (2) heißt *Poissonintegral* von  $f$  und definiert sich durch die Summe der einzelnen Funktionswerte ausgewertet in den Sprunggrößen von  $X$  bezüglich der Zeit. Der nachfolgende Satz trifft eine Aussage über die Konvergenz dieses Integrals.

**Satz.** Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  ein  $d$ -dimensionaler Lévyprozess mit Lévymaß  $\nu_X$  und Sprungmaß  $J_X$ . Wenn für beliebige  $\varepsilon > 0$  und eine messbare Funktion  $f$  das Integral

$$\int_0^t \int_{|x| \leq \varepsilon} |f(s, x)| \nu_X(dx) ds \quad (12)$$

endlich ist, dann ist ebenso das Poissonintegral von  $f$  ( $\mathbb{P}$ -f. s.) endlich, also

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s, x) J_X(ds, dx) = \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ \Delta X_s \neq 0}} f(s, \Delta X_s) < \infty.$$

Wenn  $f$  zusätzlich auf  $[0; \infty[ \times \mathbb{R}^d$  integrierbar ist, dann ist der Prozess  $\tilde{X}$  mit

$$\tilde{X}_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s, x) \tilde{J}_X(ds, dx) \quad (13)$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s, x) (J_X(ds, dx) - \nu_X(dx) ds) \quad (14)$$

ein Martingal mit  $\mathbb{E}(\tilde{X}_t) = 0$  und

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s, x) J_X(ds, dx) \right) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s, x) \nu_X(dx) ds. \quad (15)$$

Ist weiter  $f$  auf selbigem Raum quadratintegrierbar, dann ist auch  $\tilde{X}_t$  quadratintegrierbar und es ist

$$\text{Var}(\tilde{X}_t) = \mathbb{E} \left( \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s, x) \tilde{J}_X(ds, dx) \right)^2 \right) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f^2(s, x) \nu_X(dx) ds. \quad (16)$$

*Beweisidee.* Aufgrund der càdlàg-Eigenschaft eines Lévyprozesses besitzt er für beliebige  $\varepsilon > 0$  nur endliche viele „große“ Sprünge, also Sprünge mit höherer Sprunggröße als  $\varepsilon$  (dies zeigt u. a. Lemma 13.12 in [Pas11]). „Kleine“ Sprünge wiederum können (abzählbar) unendlich oft auftreten, die lokale Integrierbarkeitsbedingung (12) und (15) gewährleisten allerdings im Endeffekt die Konvergenz des Poissonintegrals. Die Identitäten für Erwartungswert und Varianz folgen mithilfe eines Grenzwertarguments aus Theorem 13.30 aus [Pas11]<sup>6</sup>. ■

Das sogenannte kompensierte Poissonintegral bzw. Sprungmaß  $\tilde{J}_X$  in (13) beseitigt analytische Komplikationen, die in Verbindung mit unendlichen vielen „kleinen“ Sprünge auftreten können. In diesem Fall kann man es sich als unendliche Überlagerung unabhängiger und zentrierter Poissonprozesse vorstellen.

<sup>6</sup>Theorem 13.30 zeigt die Aussage für einen sogenannten Sprung-Diffusionsprozess, welcher speziell ein Lévyprozess mit zwingend endlicher Aktivität ist und aus der Summe eines Wienerprozesses und einem zusammengesetzten Poissonprozess besteht.

## 2.3 Struktursätze

### 2.3.1 Die Lévy-Itô-Zerlegung

Das kompensierte Sprungmaß ist zudem von großer Bedeutung für das kommende Resultat, welches die Struktur eines Lévyprozesses eindeutig beschreibt.

**Satz** (Lévy-Itô-Zerlegung). *Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  ein  $d$ -dimensionaler Lévyprozess mit Lévymaß  $\nu_X$  und Sprungmaß  $J_X$ . Dann gilt*

$$\int_{|x| \geq 1} \nu_X(dx) < \infty, \text{ sowie} \quad (17)$$

$$\int_{|x| < 1} |x|^2 \nu_X(dx) < \infty. \quad (18)$$

Weiter existiert ein  $d$ -dimensionaler standardisierter Wienerprozess  $\bar{W} = (\bar{W}_t)_{t \geq 0}$ , ein  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^d$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so dass

$$X_t = \lambda_1 t + \sqrt{C} \bar{W}_t + X_t^l + \tilde{X}_t^\varepsilon, \text{ mit} \quad (19)$$

$$X_t^l = \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_X(ds, dx) \text{ und}$$

$$\tilde{X}_t^\varepsilon = \int_0^t \int_{\varepsilon \leq |x| < 1} x \tilde{J}_X(ds, dx).$$

Zudem sind alle Summanden in (19) voneinander stochastisch unabhängig.

*Beweis.* Zu finden in [Sat05] (S. 125-135); dort wird dem Beweis ein eigenes Kapitel gewidmet. ■

Angesichts des Stellenwerts dieses Theorems gehen wir an dieser Stelle ein wenig genauer auf die einzelnen Summanden und deren Bedeutung ein: Wie wir bereits wissen, beschreibt  $\lambda_1 t + \sqrt{C} \bar{W}_t$  einen (stetigen) Wienerprozess und stellt in Konsequenz den stetigen Teil des Prozesses dar, während die unstetige Komponente in den letzten beiden Summanden steckt. Bedingung (17) gewährleistet die Endlichkeit „großer“ Sprünge, also die fast sichere endliche Anzahl an Summanden in der Summendarstellung des zusammengesetzten Poissonprozesses  $X_t^l$  getreu (11). Und auch der nicht-kompensierte Anteil „kleiner“ Sprünge

$$X_t^\varepsilon = \int_0^t \int_{\varepsilon \leq |x| < 1} x J_X(ds, dx)$$

ist ein zusammengesetzter Poissonprozess; wenn jedoch  $\varepsilon$  gegen 0 läuft, könnte aufgrund einer möglichen Singularität von  $\nu_X$  im Nullpunkt die Summe unendlich vieler „kleiner“ Sprünge nicht konvergieren, weshalb man  $X_t^\varepsilon$  durch die kompensierte, also gewissermaßen gemittelte oder zentrierte Version  $\tilde{X}_t^\varepsilon$  ersetzt.

Der kompensierte zusammengesetzte Poissonprozess ist wie in (13) ein quadratintegrierbares Martingal mit  $\mathbb{E}(\tilde{X}_t) = 0$ , wodurch letztlich durch Anwendung des kolmogorovschen Dreireihensatzes und der Kolmogorov-Ungleichung wie in der Beweisskizze zu Proposition 3.7 in [TC03] die Konvergenz folgt.

**Bemerkung.** Der Index von  $\lambda_1$  zeigt an, dass  $\lambda$  vom Trennwert  $R$  zwischen „kleinen“ und „großen“ Sprüngen abhängt. Grundsätzlich kann man diesen beliebig wählen, für uns genügt hingegen zumindest vorerst der Fall  $R = 1$ . Der Driftparameter gleicht die Abweichung des kompensierten Prozesses  $\tilde{X}_t^\varepsilon$  aus, konkreter ist

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \lambda_R - \int_{r < |x| \leq R} x \nu_X(dx) \\ \Leftrightarrow \lambda_R &= \lambda_r + \int_{r < |x| \leq R} x \nu_X(dx) \quad \text{für } 0 < r \leq R. \end{aligned} \quad (20)$$

**Bemerkung.** Aus (18) folgt zusammen mit (12) die ( $\mathbb{P}$ -f. s.) Konvergenz von

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 J_X(ds, dx) = \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ \Delta \tilde{X}_s \neq 0}} |\Delta X_s|^2.$$

Dieses Poissonintegral für  $f(x) = |x|^2$  nennt man im Falle eines reinen Sprungprozesses<sup>7</sup> die quadratische Variation des zugehörigen Prozesses.

Zusammengefasst kann für einen Lévyprozess durchaus gleichzeitig

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ \Delta \tilde{X}_s \neq 0}} |\Delta X_s| &= \infty \quad \text{und} \\ \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ \Delta \tilde{X}_s \neq 0}} |\Delta X_s|^2 &< \infty \end{aligned}$$

gelten. Dieser Fall tritt auf, wenn  $X$  ein Lévyprozess unendlicher Variation ist, also wenn  $\mathcal{C} \neq 0$  und/oder  $\int_{|x| < 1} |x| \nu_X(dx) = \infty$  gilt (s. Proposition 3.9 in [TC03]).

---

<sup>7</sup>Also für einen Lévyprozess  $X$  genau dann, wenn  $X_t = X_t^l + \tilde{X}_t^\varepsilon$ .

### 2.3.2 Die Lévy-Chinčĭn-Formel

Aus der Lévy-Itô-Zerlegung folgt unmittelbar, dass jeder Lévyprozess durch den Driftkoeffizienten  $\lambda := \lambda_1$  und der Kovarianzmatrix  $\mathcal{C}$  des Wienerprozesses sowie durch das Lévymaß  $\nu_X$  als Intensität des Poissonprozesses  $J_X$  gemäß (10) eindeutig bestimmt ist.

**Definition.** Das 3-Tupel  $(\lambda, \mathcal{C}, \nu_X)$  heißt charakteristisches Tripel von  $X$ .

Konsequenterweise erhalten wir durch die eindeutige Struktur eines Lévyprozesses eine ebenso unikale Darstellung des Lévyexponenten, wie folgender Satz zeigt.

**Satz (Lévy-Chinčĭn-Formel).** Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  ein  $d$ -dimensionaler Lévyprozess mit charakteristischem Tripel  $(\lambda, \mathcal{C}, \nu_X)$ . Dann ist der Lévyexponent  $\psi_X$  in

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi \cdot X_t}) = \exp(t \cdot \psi_X(\xi))$$

gegeben durch

$$\psi_X(\xi) = i\lambda\xi - \frac{1}{2}\langle \mathcal{C}\xi, \xi \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x \cdot \chi_{\{|x|<1\}}) \nu_X(dx). \quad (21)$$

*Beweis.* Gemäß der Lévy-Itô-Zerlegung lässt sich  $X_t$  als Summe eines Wienerprozesses (mit Drift  $\lambda$  und Volatilität  $\sqrt{\mathcal{C}}$ ) und eines reinen Sprungprozesses darstellen. Wegen der Unabhängigkeit der Summanden entspricht dem Lévyexponenten der Summe die Summe der einzelnen Lévyexponenten, also

$$\psi_{\lambda t + \sqrt{c} \bar{w}_t + X_t^l + \tilde{X}_t^\varepsilon}(\xi) = \psi_{\lambda t + \sqrt{c} \bar{w}_t}(\xi) + \psi_{X_t^l}(\xi) + \psi_{\tilde{X}_t^\varepsilon}(\xi).$$

Wir kennen bereits den Lévyexponenten eines Wienerprozesses aus (7) und den eines zusammengesetzten Poissonprozesses aus (8).

Den Lévyexponenten eines kompensierten zusammengesetzten Poissonprozesses  $\tilde{X}$  erhält man leicht über die Beziehung zum zusammengesetzten Poissonprozess in (14) und (11). In der Gesamtheit ergibt sich

$$\psi_X(\xi) = i\lambda\xi - \frac{\langle \mathcal{C}\xi, \xi \rangle}{2} + \int_{|x| \geq 1} (e^{i\xi x} - 1) \nu_X(dx) + \int_{\varepsilon \leq |x| < 1} (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x) \nu_X(dx). \quad (22)$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  folgt die Aussage. ■

## 2.4 Kumulanten

Wir greifen erneut das Konzept der kumulantenerzeugenden Funktion  $\mathcal{K}$  aus (4) auf. Wie der Name bereits verrät, dient  $\mathcal{K}$  nicht nur als alternative Darstellung des Lévyexponenten (siehe (5)), sondern induziert auch Kumulanten, welche wiederum in Verbindung mit der Lévy-Chinčin-Formel präzisere Aussagen über stochastische Kenngrößen wie z. B. Erwartungswert oder Varianz liefern.

**Definition.** Die  $n$ -te Kumulante einer Zufallsvariablen  $X$  ist gegeben durch

$$k_n(X) = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{d\xi^n} \mathcal{K}_X(\xi) \Big|_{\xi=0}. \quad (23)$$

Für einen eindimensionalen Lévyprozess  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  folgt somit aus (5) für beliebige  $t$

$$k_n(X_t) = \frac{t}{i^n} \frac{d^n}{d\xi^n} \psi_X(\xi) \Big|_{\xi=0},$$

was folgende Darstellung der Kumulanten durch Differentiation von (21) zur Folge hat:

$$k_n(X_t) = t \int_{|x| \geq 1} x^n \nu_X(dx), \quad n \geq 3$$

Für  $n \in \{1; 2\}$  verschwindet bei der ersten bzw. zweiten Ableitung von (21) der Term vor dem Integral nicht oder nur teilweise, weshalb in diesem Fall speziellere Gleichheiten für die Kumulanten gelten:

$$\begin{aligned} k_1(X_t) &= \mathbb{E}(X_t) = t \left( \lambda + \int_{|x| \geq 1} x \nu_X(dx) \right) \\ k_2(X_t) &= \mathbb{V}\text{ar}(X_t) = t \left( \sigma^2 + \int_{|x| \geq 1} x^2 \nu_X(dx) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Dabei ergeben sich obige Identitäten unmittelbar aus den Ableitungsregeln für differenzierbare Parameterintegrale. Dass ferner die erste Kumulante dem Erwartungswert und die zweite Kumulante der Varianz von  $X_t$  entspricht, resultiert aus dem Zusammenhang zwischen der momenterzeugenden und der kumulantenerzeugenden Funktion respektive den (zentrierten) Momenten und den Kumulanten.

### 3 Optionsbewertung

Thema dieses Kapitels ist die finanzmathematische Theorie der Bewertung europäischer Optionen. Der Basiswert, also der Kontraktgegenstand, welcher dem Termingeschäft zugrunde liegt, bzw. dessen Preisprozess folgt hierbei nicht, wie beispielsweise im „klassischen“ Black-Scholes-Modell, konkret einem geometrischen Wienerprozess, sondern allgemeiner einem exponentiellen (man sagt auch geometrischen) Lévyprozess. Dabei beschränken wir uns auf den Fall eines einzigen Basiswerts, hier o. B. d. A. einer Aktie. In diesem Kapitel halten wir uns an die ersten vier Kapitel aus [Miy11] sowie an [TC03]. Im Folgenden seien alle Prozesse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  definiert und an eine Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  adaptiert.

#### 3.1 Wiederholung und Grundlagen

Zur Einführung sollen zum späteren Verständnis notwendige und tiefgründige Resultate aus der stochastischen Finanzmathematik kurz umrissen werden. Gemeint sind die beiden Fundamentalsätze der Arbitragepreistheorie, deren Beweise sich beispielsweise in Abschnitt 2.2.3 in [Pas11] nachvollziehen lassen:

**Satz** (Erster Fundamentalsatz der Arbitragepreistheorie). *Genau dann herrscht in einem Markt Arbitragefreiheit, d. h. Profit ohne Risiko über den Zins hinaus ist unmöglich, wenn es ein zu  $\mathbb{P}$  äquivalentes Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  gibt, also ein Wahrscheinlichkeitsmaß, sodass*

$$\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} : \quad \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}_T \quad \wedge \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\hat{S}_T | \mathcal{F}_t) = \hat{S}_t. \quad (25)$$

Wie (25) vermuten lässt, ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß genau dann ein Martingalmaß (auch: risikoneutrales Preismaß), wenn der diskontierte Preisprozess  $\hat{S}$  – bezüglich der obigen Filtration und dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaß – ein Martingal gemäß (2) ist. Im Fall von (25) und auch im weiteren Verlauf wird die Diskontierung bezüglich eines Numéraires, welcher hier schlicht einem deterministischen Bankkonto bzw. Anleihe mit Zinssatz  $r$ , beschrieben durch  $B_t = e^{rt}$ , entspricht, eines Preisprozesses  $S$  mit  $\hat{S}$  bezeichnet.

Bevor wir jetzt den zweiten Fundamentalsatz formulieren, gehen wir noch etwas genauer mithilfe von [Kor02] auf den Begriff der Vollständigkeit eines Marktes ein. Elementar zum Verständnis des Begriffs ist das Replikationsprinzip:

**Satz** (Replikationsprinzip). *Liefern in einem arbitragefreien Markt verschiedene Güter identische Zahlungsströme, so müssen deren Preise zu jedem Zeitpunkt übereinstimmen.*

Im Wesentlichen folgt die Aussage des Prinzips unmittelbar aus der angenommenen Arbitragefreiheit. Man nennt einen Markt demnach *vollständig*, wenn jede Art von Optionen replizierbar ist. Nun wollen wir das eben genannte Prinzip auf das einfachste, diskrete Modell zur Optionsbewertung anwenden; folgendes Beispiel soll eine mögliche Unvollständigkeit in einem Markt aufzeigen.

**Beispiel** (Trinomialmodell). Wir betrachten ein sogenanntes Ein-Perioden-Trinomialmodell. Das bedeutet, der Preis der Aktie in unserem Portfolio  $S_0$  verändert sich innerhalb einer Periode vom jetzigen Zeitpunkt zum Endzeitpunkt  $T$  in eine von drei möglichen Richtungen: Kursanstieg um den Faktor  $u$ , Kursverlust um den Faktor  $d$  oder gleichbleibender Preis<sup>8</sup>. Zusätzlich bestehe unser Portfolio aus einer risikolosen Geldanlage (z. B. Einheitsnullkuponanleihen) mit festem Zinssatz  $r$  pro Periode und einer Calloption zur Fälligkeit  $T$  mit Ausübungspreis  $K \neq 0$  auf die eben genannte Aktie. Ziel ist es nun, eine Investmentstrategie nach dem Replikationsprinzip zu finden, so dass der Payoff des Calls dieselbe Auszahlung wie das Portfolio mit einer im Startzeitpunkt festzulegenden Anzahl an Einheitsnullkuponanleihen  $\alpha$  und Aktien  $\beta$  besitzt. Dies führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (1 + r) + \beta \cdot uS_0 &= \max(uS_0 - K, 0) \\ \alpha \cdot (1 + r) + \beta \cdot S_0 &= \max(S_0 - K, 0) \\ \alpha \cdot (1 + r) + \beta \cdot dS_0 &= \max(dS_0 - K, 0).\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist überbestimmt, liefert also keine eindeutige Lösung für  $\alpha$  und  $\beta$ . Demzufolge kann diese Option durch keine Handelsstrategie mithilfe des Portfolios repliziert werden, weshalb das Trinomialmodell ein unvollständiges Modell ist.

Da wir nun über Kenntnis der (Un-)Vollständigkeit von Märkten verfügen, kommen wir zum zweiten Fundamentalsatz und damit zu einer Alternativcharakterisierung.

**Satz** (Zweiter Fundamentalsatz der Arbitragepreistheorie). *Genau dann ist ein Markt vollständig, wenn es ein eindeutiges zu  $\mathbb{P}$  äquivalentes Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  gibt.*

Unter der Annahme der Vollständigkeit und damit auch Arbitragefreiheit eines Marktes ergibt sich nach (25) der Preis einer Option  $H$  zu einer Zeit  $t$  mit Fälligkeit zum Zeitpunkt  $T$  unmittelbar aus

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H \mid \mathcal{F}_t), \quad (26)$$

womit der Wert einer Option direkt aus der diskontierten Erwartung dieser Option unter dem risikoneutralen Preismaß resultiert.

Darüber hinaus folgt aus der Festsetzung in (26), dass ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß stets eine solche „Preisbildungsregel“  $\Pi$  definiert.

Tatsächlich korrespondieren beide Faktoren aufgrund des ersten Fundamentalsatzes direkt miteinander; die genauere Beziehung wird in Kapitel 9.1 in [TC03] behandelt. Des Weiteren bedeutet Äquivalenz zweier Maße, welche im ersten Teil von (25) durch die Eigenschaft gleicher Nullmengen charakterisiert wird, nichts anderes, als absolute Stetigkeit des einen Maßes bezüglich des anderen Maßes und umgekehrt. Die absolute Stetigkeit ist in diesem Zusammenhang maßgeblich für folgendes maßtheoretisches Resultat, welches wir im späteren Verlauf noch benötigen (vgl. Proposition 2.3 in [TC03]).

<sup>8</sup>Wir gehen von einem „echten“ Kursanstieg bzw. Kursverlust aus und fordern daher zusätzlich  $d < 1 < u$ .

**Satz** (Satz von Radon-Nikodým). Wenn ein Maß  $\mu_2$  bezüglich eines anderen Maßes  $\mu_1$  absolut stetig ist, dann existiert eine messbare Funktion  $Z : E \rightarrow [0; \infty[$ , so dass für jede messbare Menge  $A$  gilt:

$$\mu_2(A) = \int_A Z d\mu_1 = \mu_1(Z\chi_A).$$

Man nennt  $Z$  infolgedessen die Radon-Nikodým-Dichte von  $\mu_2$  bezüglich  $\mu_1$  und schreibt für sie  $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$ . Ferner gilt für jede  $\mu_2$ -integrierbare Funktion  $f$ :

$$\mu_2(f) = \int_E f d\mu_2 = \mu_1(fZ) = \int_E fZ d\mu_1. \quad (27)$$

Kommen wir nun zu der recht intuitiven Definition eines exponentiellen Lévyprozesses.

**Definition.** Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein Lévyprozess. Dann heißt der Prozess  $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$  mit Startwert  $S_0$  und

$$S_t = S_0 e^{X_t} \quad (28)$$

exponentieller Lévyprozess. Der zugehörige diskontierte Preisprozess bezüglich des Numéraires  $B_t = e^{rt}$  und einem risikolosen Zinssatz  $r$  ist gegeben durch

$$\hat{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = S_0 e^{X_t - rt}.$$

Grundproblem und auch -unterschied zum Black-Scholes-Modell ist, dass ein Lévymarkt in der Regel nicht vollständig ist, was zunächst wahrscheinlich nicht als wünschenswert erachtet wird, diese Eigenschaft aber dennoch mit echten Märkten teilt, da auch hier eine vollständige Risikoabsicherung in Form von perfekten Hedges zu keiner Zeit möglich ist. Nach dem zweiten Fundamentalsatz der Arbitragepreistheorie existiert also kein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß, womit die Optionsbewertung nicht ohne Weiteres gelingt. Für die Konstruktion muss also ein dementsprechend geeignetes Martingalmaß gefunden werden. Dies wird Thema des Folgekapitels sein.

## 3.2 Die Esscher-Transformation

Eine der einfachsten Methoden zur Konstruktion eines geeigneten Martingalmaßes geht zurück auf den schwedischen Aktuar Frederik Esscher und dessen Werk aus dem Jahr 1932, ehe dies 1994 in der Arbeit von Hans Gerber und Elias Shiu [GS94] erstmals konkret im Finanzwesen Anwendung fand.

**Definition.** Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  ein stochastischer Prozess und  $\theta \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Esscher-Transformierte  $\mathbb{P}^\theta$  eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mathbb{P}$  definiert durch die Radon-Nikodým-Dichte

$$\left. \frac{d\mathbb{P}^\theta}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{e^{\theta X_t}}{\mathbb{E}(e^{\theta X_t})}. \quad (29)$$

Damit nun das Esscher-transformierte Wahrscheinlichkeitsmaß zum Martingalmaß für einen Preisprozess  $S$  wird, müssen wir die Konstante  $\theta$  passend wählen. Nachfolgend sollen Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Martingalmaßes ergründet werden.

### 3.2.1 Existenz

Unter der Annahme, dass anknüpfend alle Erwartungen existieren und mit der Definition eines exponentiellen Lévyprozesses aus (28), erhalten wir für die Martingalbedingung (wie im zweiten Teil von (25)):

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\theta}(\hat{S}_1 | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\theta}(e^{-r} S_1) = e^{-r} S_0 \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\theta}(e^{X_1}) \stackrel{(\star)}{=} e^{-r} S_0 \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{(\theta+1)X_1})}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{\theta X_1})} = \hat{S}_0 = S_0. \quad (30)$$

Derweil ergibt sich  $(\star)$  aus (27) und der Definition eines Esscher-transformierten Wahrscheinlichkeitsmaßes; in unserem Fall ist dies die Zufallsvariable, welche durch den Kehrrbruch von (29) entsteht. Aus der Bedingung (30) resultiert unmittelbar das folgende Kriterium für das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  und damit für die charakteristische Funktion von  $X_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{(\theta+1)X_1}) &= e^r \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{\theta X_1}) \\ \Leftrightarrow \varphi_{X_1}(-i(\theta+1)) &= e^r \varphi_{X_1}(-i\theta). \end{aligned}$$

Mithilfe der Potenzgesetze und der Beziehung zwischen charakteristischer Funktion und Lévyexponenten bzw. hier speziell für  $t = 1$  der kumulantenerzeugenden Funktion  $\mathcal{K}_{X_1}$  gilt weiter

$$\mathcal{K}_{X_1}(-i(\theta+1)) - \mathcal{K}_{X_1}(-i\theta) = r, \quad (31)$$

womit wir beim eigentlichen Existenzresultat angekommen sind.

**Satz.** *Wenn die Gleichheit (31) erfüllt ist, also wenn nach (21) bzw. (22) die Gleichung*

$$f(\theta) := \lambda + \frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2 \theta + \int_{|x| \geq 1} (e^x - 1) e^{\theta x} \nu_X(dx) + \int_{|x| < 1} ((e^x - 1) e^{\theta x} - x) \nu_X(dx) = r \quad (32)$$

eine Lösung  $\theta^*$  hat, dann existiert ein Esscher-transformiertes und zu  $\mathbb{P}$  äquivalentes Martingalmaß  $\mathbb{P}^{\theta^*}$  eines exponentiellen Lévypreisprozesses  $S$  gemäß (29). Außerdem ist der Lévyprozess  $X$  auch unter  $\mathbb{P}^{\theta^*}$  ein Lévyprozess mit neuem charakteristischem Tripel

$$(\lambda + \theta^* \sigma^2 + \int_{|x| < 1} x(e^{\theta^* x} - 1) \nu_X(dx), \sigma^2, e^{\theta^* x} \nu_X(dx)).$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass das charakteristische Tripel die oben angegebene Darstellung hat: Die charakteristische Funktion unter dem Esscher-transformierten Martingalmaß ist definiert durch

$$\varphi_{X_t}^{\mathbb{P}^{\theta^*}}(\xi) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\theta^*}}(e^{i\xi X_t}) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{(i\xi + \theta^*) X_t})}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{\theta^* X_t})} = \frac{\varphi_{X_t}^{\mathbb{P}}(\xi - i\theta^*)}{\varphi_{X_t}^{\mathbb{P}}(-i\theta^*)}. \quad (33)$$

Berechnung des letzten Bruchterms liefert letztlich

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}^{\mathbb{P}^{\theta^*}}(\xi) &= \exp \left( t \left( -\frac{\sigma^2 \xi^2}{2} + i\xi \left( \lambda + \theta^* \sigma^2 + \int_{|x| < 1} x(e^{\theta^* x} - 1) \nu_X(dx) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{|x| < 1} (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x) e^{\theta^* x} \nu_X(dx) + \int_{|x| \geq 1} (e^{i\xi x} - 1) e^{\theta^* x} \nu_X(dx) \right) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Dies zeigt die Aussage. ■

Für jede Lösung  $\theta^*$  von  $f$  finden wir also ein Martingalmaß für den Preisprozess  $S$ , sodass der Markt arbitragefrei ist. Dass ein solches eindeutig ist und damit auch nur ein einziges  $\theta^*$  existiert, wird im Folgeabschnitt gezeigt.

### 3.2.2 Eindeutigkeit

Die Eindeutigkeit von  $\theta^*$  lässt sich – sofern  $\theta^*$  existiert – relativ einfach mit Grundlagen der Analysis zeigen; derweil stammt die Beweisidee aus [GS94].

Wir rufen uns zunächst die Definition von  $f$  in Erinnerung. Es ist

$$f(\theta) = \lambda + \frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2\theta + \int_{|x|\geq 1} (e^x - 1)e^{\theta x} \nu_X(dx) + \int_{|x|<1} ((e^x - 1)e^{\theta x} - x) \nu_X(dx).$$

Nun differenzieren wir  $f$ ; es ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \sigma^2 + \int_{|x|\geq 1} (e^x - 1)e^{\theta x} x \nu_X(dx) + \int_{|x|<1} (e^x - 1)e^{\theta x} x \nu_X(dx) \\ &= \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)e^{\theta x} x \nu_X(dx) \\ &= \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} x e^{x(\theta+1)} - x e^{x\theta} \nu_X(dx). \end{aligned} \tag{35}$$

Um zu beweisen, dass  $f(\theta) - r$  genau eine Nullstelle hat<sup>9</sup>, genügt es, die streng monotone Steigung von  $f$  bzw. die positive Definitheit von  $f'$  zu zeigen. Dabei ist  $f'$  nach (35) in jedem Fall größer oder gleich Null, wenn der Integrand positiv ist. Dies gilt garantiert, wenn für beliebige, aber feste Werte von  $x$  die Funktion

$$g(\theta) = x e^{x\theta}$$

monoton steigt, also wenn auch hier die erste Ableitung positiv ist. Aufgrund von

$$g'(\theta) = x^2 e^{x\theta} > 0$$

folgt alles in allem  $f' > \sigma^2 \geq 0$  für beliebige  $\theta \in \mathbb{R}$  und damit die streng monotone Steigung von  $f$ , was die Eindeutigkeit von  $\theta^*$  zeigt. Wichtig ist zu erwähnen, dass durch die Eindeutigkeit von  $\theta^*$  zwar die Eindeutigkeit des zugehörigen Esscher-transformierten äquivalenten Martingalmaßes  $\mathbb{P}^{\theta^*}$  resultiert, es jedoch weitaus mehr Möglichkeiten zur Konstruktion eines äquivalenten Martingalmaßes gibt und dieses als solches demnach nicht eindeutig ist.

---

<sup>9</sup>Den sowohl trivialen als auch unsinnigen Fall  $f(\theta) - r \equiv 0$  mit theoretisch unendlich vielen Lösungen schließen wir hier der Vollständigkeit halber aus.

### 3.2.3 Folgerung – Herleitung der Black-Scholes-Formel

In (33) haben wir bereits für eine messbare Funktion  $g$  benutzt, dass

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\theta^*}}(g(S_t)) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(g(S_t) e^{\theta^* X_t})}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{\theta^* X_t})} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(g(S_t) S_t^{\theta^*})}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(S_t^{\theta^*})}$$

gilt. Hierdurch lässt sich auch folgendes, allgemeiner formuliertes Hilfsresultat zeigen, welches sich, wie der gesamte Abschnitt 3.2.3, nach [GS94] richtet.

**Lemma.** *Seien  $h, k \in \mathbb{R}$ . Unter der Voraussetzung, dass für die Parameter  $h$  und  $h + k$  die jeweilige Esscher-Transformierte nach (29) existiert, gilt für eine beliebige messbare Funktion  $g$  die Gleichheit*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^h}(S_t^k g(S_t)) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^h}(S_t^k) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{h+k}}(g(S_t)). \quad (36)$$

Wie schon in (26) angeführt wurde, erhalten wir beispielsweise den Wert einer europäischen Calloption  $C$  zum Zeitpunkt 0 mit Ausübungspreis  $K$  und Zeit bis zur Fälligkeit  $t > 0$  aus dem diskontierten Erwartungswert des Payoffs dieser Option bezüglich des eindeutigen, risikoneutralen Esscher-Martingalmaßes  $\mathbb{P}^{\theta^*} \sim \mathbb{P}$ , also

$$\begin{aligned} \Pi_0(C) &= e^{-rt} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\theta^*}}(\max(S_t - K, 0)) & (37) \\ &= e^{-rt} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\theta^*}}(S_t \cdot \chi_{S_t > K}) - e^{-rt} K \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\theta^*}}(\chi_{S_t > K}) \\ &\stackrel{(36)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\theta^*}}(e^{-rt} S_t) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\theta^*+1}}(\chi_{S_t > K}) - K e^{-rt} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\theta^*}}(\chi_{S_t > K}) \\ &= S_0 \cdot \mathbb{P}^{\theta^*+1}(S_t > K) - K e^{-rt} \mathbb{P}^{\theta^*}(S_t > K) \\ &= S_0 \cdot \left( 1 - F_{X_t}^{\mathbb{P}^{\theta^*+1}}\left(\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right) \right) - K e^{-rt} \left( 1 - F_{X_t}^{\mathbb{P}^{\theta^*}}\left(\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right) \right), \end{aligned}$$

wobei bei der dritten Gleichheit  $h = \theta^*$  und  $k = 1$  wie im obigen Lemma gesetzt wurde und  $F_{X_t}$  die Verteilungsfunktion von  $X_t$  bezüglich des jeweiligen Wahrscheinlichkeitsmaßes bezeichnet.

Wir kommen erneut auf die Gleichung (32) zurück, welche  $\theta^*$ , sofern es existiert, eindeutig löst, und nehmen nun an, dass der Lévyprozess  $X$  konkret ein Wienerprozess mit Drift  $\lambda - \frac{\sigma^2}{2}$  und Volatilität  $\sigma$  ist. Nach der Lévy-Itô-Zerlegung entfällt damit in (32) der reine Sprungprozess, welcher durch die Summe der beiden Integrale dargestellt wird. Wir erhalten schließlich die explizite Darstellung der Lösung durch

$$r = \left( \lambda - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2 \theta \quad \Rightarrow \quad \theta^* = \frac{r - \lambda}{\sigma^2}.$$

Mithilfe von (34) lassen sich die charakteristische Funktion und auch der Lévyexponent des unter dem Esscher-Martingalmaß transformierten Wienerprozesses berechnen und Schlüsse auf Verteilung und zugehörige Parameter ziehen. Es ist

$$\begin{aligned}\psi_{X_t}^{\mathbb{P}^{\theta^*}}(\xi) &= -\frac{\sigma^2 \xi^2}{2} + i\xi \left( \lambda - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2 \left( \frac{r - \lambda}{\sigma^2} \right) \right) \\ &= -\frac{\sigma^2 \xi^2}{2} + i\xi \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right).\end{aligned}$$

Vergleicht man die erhaltene Darstellung des Lévyexponenten mit der eines gewöhnlichen Wienerprozesses in (6), folgt, dass  $X$  unter  $\mathbb{P}^{\theta^*}$  ebenso ein Wienerprozess mit verändertem Drift  $r - \frac{\sigma^2}{2}$  und gleichgebliebener Volatilität  $\sigma$  ist.

Da die Zuwächse eines Wienerprozesses normalverteilt sind, gilt ferner

$X_t \sim \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$  für beliebige  $t > 0$ . Für  $\theta^* + 1 = \frac{r - \lambda}{\sigma^2} + 1$  gehen wir analog vor; es ändert sich lediglich ein Vorzeichen, so dass  $X_t \sim \mathcal{N}\left(\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$ .

Da wir jetzt sämtliche Verteilungseigenschaften von  $X$  unter  $\mathbb{P}^{\theta^*}$  bzw.  $\mathbb{P}^{\theta^*+1}$  kennen, können wir (37) vollständig berechnen:

$$\begin{aligned}\Pi_0(C) &= S_0 \left( 1 - F_{x_t}^{\mathbb{P}^{\theta^*+1}} \left( \ln \left( \frac{K}{S_0} \right) \right) \right) - K e^{-rt} \left( 1 - F_{x_t}^{\mathbb{P}^{\theta^*}} \left( \ln \left( \frac{K}{S_0} \right) \right) \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} S_0 \left( 1 - \Phi_{x_t} \left( \frac{\ln \left( \frac{K}{S_0} \right) - \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right) \\ &\quad - K e^{-rt} \left( 1 - \Phi_{x_t} \left( \frac{\ln \left( \frac{K}{S_0} \right) - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right) \\ &= S_0 \cdot \Phi_{x_t} \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) - K e^{-rt} \cdot \Phi_{x_t} \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right). \quad (38)\end{aligned}$$

Dabei ist (38) die berühmte *Black-Scholes-Formel* für den europäischen Call. Wie üblich steht  $\Phi$  für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Derweil wichtig festzuhalten ist, dass der folgende Zusammenhang zwischen Normalverteilung (mit den Parametern  $\lambda$  und  $\sigma^2$ ) und Standardnormalverteilung besteht und daraus Gleichheit (\*) resultiert:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{t - \lambda}{\sigma} \right)^2 \right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x - \lambda}{\sigma}} \exp \left( -\frac{z^2}{2} \right) dz = \Phi \left( \frac{x - \lambda}{\sigma} \right).$$

Die Black-Scholes-Formel folgt schließlich aus der Punktsymmetrie von  $\Phi$  und den Logarithmusgesetzen.

### 3.3 Ausblick

Zum Abschluss sollen zwei stark mit der Optionsbewertung zusammenhängende Konzepte grob umrissen werden, ohne die eigentliche Bepreisung durchzuführen. Genauere Ausführungen und numerische Resultate findet man in den unten folgenden Literaturverweisen.

#### 3.3.1 Das CGMY-Modell

Aus den Vorkapiteln wissen wir, dass sich jeder Lévyprozess beispielsweise nach der Lévy-Itô-Zerlegung in die gleichen Komponenten aufgliedern lässt und der Lévyexponent eines jeden Lévyprozesses eindeutig durch seine Struktur bekannt ist. Ebenso erhält man grundsätzlich aus jedem Lévyprozess nach (28) einen exponentiellen Lévyprozess. In der ökonomischen Praxis und letztlich auch in der Theorie haben sich jedoch nur bestimmte Prozesse durchgesetzt, welche sich für das exponentielle Lévymodell eignen, im Black-Scholes-Modell ein abgewandelter Wienerprozess. Das CGMY-Modell soll nachfolgend vorgestellt und genauer erläutert werden. Die nachfolgenden Inhalte gehen unterdessen aus [Alm05], [BA17], [Pas11] und aus der Originalarbeit [Car+02] von Carr, Geman, Madan und Yor hervor.

Wir beginnen mit der Definition des gleichnamigen Prozesses für das spätere CGMY-Modell. Dieser Lévyprozess  $X$  wird dabei durch die Angabe seines charakteristischen Tripels  $(\lambda_1, 0, \rho_x)$  mit Lévymaß

$$\rho_x(dx) = \left( \frac{C \exp(-G|x|)}{|x|^{1+Y}} \chi_{\{x < 0\}} + \frac{C \exp(-Mx)}{x^{1+Y}} \chi_{\{x > 0\}} \right) dx$$

und  $C > 0, G \geq 0, M \geq 0, 0 < Y < 1$  eindeutig beschrieben. In der Literatur wird für das CGMY-Modell meist nur  $Y < 2$  gefordert; wir beschränken uns allerdings auf den „echten“ CGMY-Prozess mit unendlicher Aktivität und endlicher Variation wie in [Alm05]. Der Parameter  $C$  steuert hingegen gleichermaßen die Häufigkeit negativer und positiver Sprünge, während  $G$  bzw.  $M$  die Rate der exponentiellen Abnahme der Lévydichte beeinflusst; im Fall  $G = M$  ist die Lévydichte symmetrisch.

Mithilfe der Lévy-Chinčĭn-Formel können wir jetzt die charakteristische Funktion berechnen, aus welcher wir auch Informationen über die Verteilung gewinnen können. Es ist

$$\psi_x(\xi) = i\lambda_1\xi + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x \cdot \chi_{\{|x| < 1\}}) \rho_x(x; C, G, M, Y) dx.$$

In (20) können wir  $R$  gegen unendlich laufen lassen, wodurch wir praktisch keine Trennung zwischen kleinen und großen Sprüngen vollziehen, und können damit das Integral geschlossen berechnen, sodass

$$\psi_x(\xi) = i\lambda_{\infty}\xi + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x) \rho_x(x; C, G, M, Y) dx$$

gilt.

Dennoch teilen wir das Integral aufgrund der Definition des Lévymaßes in zwei Teile, für positive und negative Werte von  $x$ , auf:

$$\begin{aligned}
\psi_x(\xi) &= i\lambda_\infty\xi + \int_0^\infty (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x) \frac{Ce^{-Mx}}{x^{1+Y}} dx + \int_{-\infty}^0 (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x) \frac{Ce^{-G(-x)}}{(-x)^{1+Y}} dx \\
&= i\lambda_\infty\xi + \int_0^\infty (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x) \frac{Ce^{-Mx}}{x^{1+Y}} dx + \int_0^\infty (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x) \frac{Ce^{-Gx}}{x^{1+Y}} dx \\
&= i\lambda_\infty\xi + C \left( \int_0^\infty \left( \sum_{n=2}^\infty \frac{(i\xi x)^n}{n!} \right) \frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}} dx + \int_0^\infty \left( \sum_{n=2}^\infty \frac{(i\xi x)^n}{n!} \right) \frac{e^{-Gx}}{x^{1+Y}} dx \right).
\end{aligned}$$

Die Konvergenz der Exponentialreihe in jedem Punkt  $x$  ermöglicht mithilfe des Satzes der dominierten Konvergenz die gliedweise Integration in Form von

$$\begin{aligned}
\psi_x(\xi) &= i\lambda_\infty\xi + C \sum_{n=2}^\infty \frac{(i\xi)^n}{n!} \left( \int_0^\infty e^{-Mx} x^{n-1-Y} dx + \int_0^\infty e^{-Gx} x^{n-1-Y} dx \right) \\
&= i\lambda_\infty\xi + C \sum_{n=2}^\infty \frac{(i\xi)^n}{n!} \Gamma(n-Y)(M^{Y-n} + G^{Y-n}) \\
&\stackrel{(*)}{=} i\lambda_\infty\xi + C \sum_{n=2}^\infty \frac{(i\xi)^n}{n!} \Gamma(-Y) \prod_{k=0}^{n-1} (k-Y)(M^{Y-n} + G^{Y-n}) \\
&= i\lambda_\infty\xi + C\Gamma(-Y) \sum_{n=2}^\infty \frac{(i\xi)^n}{n!} (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (Y-k)(M^{Y-n} + G^{Y-n}) \\
&= i\lambda_\infty\xi + C\Gamma(-Y) \left( M^Y \sum_{n=2}^\infty \left( \prod_{k=1}^n \frac{Y-k+1}{k} \right) \left( \frac{-i\xi}{M} \right)^n \right. \\
&\quad \left. + G^Y \sum_{n=2}^\infty \left( \prod_{k=1}^n \frac{Y-k+1}{k} \right) \left( \frac{-i\xi}{G} \right)^n \right) \\
&= i\lambda_\infty\xi + C\Gamma(-Y) \left( M^Y \sum_{n=2}^\infty \binom{Y}{n} \left( \frac{-i\xi}{M} \right)^n + G^Y \sum_{n=2}^\infty \binom{Y}{n} \left( \frac{-i\xi}{G} \right)^n \right) \\
&= i\lambda_\infty\xi + C\Gamma(-Y) \left( M^Y \left( \left( 1 - \frac{i\xi}{M} \right)^Y - 1 + \frac{i\xi Y}{M} \right) \right. \\
&\quad \left. + G^Y \left( \left( 1 - \frac{i\xi}{G} \right)^Y - 1 + \frac{i\xi Y}{G} \right) \right).
\end{aligned}$$

Alle Gleichheiten ergeben sich, ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.5. in [KT13], mehr oder weniger durch geschicktes Umformen, dem binomischen Lehrsatz und den Eigenschaften der Gammafunktion, so etwa  $(*)$  aus der für beliebige  $x \in \mathbb{R}$  gültigen Identität  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ .

Nun bestehe unser Markt im CGMY-Modell wie üblich aus einer Aktie mit zugehörigem Preisprozess  $S$  festgelegt durch

$$S_t = S_0 e^{X_t}$$

für einen CGMY-Prozess  $X$ , bestehend aus einem reinen Sprungprozess und einem linearen Driftterm  $\lambda_\infty t = (r - q + \mu)t$ .

Dabei bezeichnet  $r$  den risikolosen Zinssatz,  $q$  eine gegebenenfalls von der Aktiengesellschaft gezahlte Dividende und  $\mu$  steht für den eigentlichen Drift. Über den typischen Martingalansatz für den diskontierten Preisprozess unter einem risikoneutralen Preismaß ergibt sich der gesuchte europäische Optionswert schließlich als Lösung eines Anfangswertproblems u. a. einer Integro-Differentialgleichung.

### 3.3.2 Die Fourier-Methode

Mithilfe der Esscher-Transformation haben wir uns um das Problem möglicher Arbitrage und Unvollständigkeit in Märkten gekümmert und konnten im Endeffekt für einen speziellen Lévyprozess eine Preisformel herleiten. Dies gelang uns aber nur deshalb, weil uns zum einen der Lévyexponent eines Wienerprozesses bekannt war und – viel wichtiger – wir zum anderen die Verteilungsfunktion der Zuwächse eines Wienerprozesses genau kannten. Im Allgemeinen ist Letzteres aber nicht der Fall und wir müssen auf andere Methoden zurückgreifen. Dabei geht die Fourier-Methode, für welche lediglich die charakteristische Funktion des zugrundeliegenden Lévyprozesses erforderlich ist, aus dem Jahr 1999 auf Peter Carr und Dilip Madan zurück, die kommenden Resultate stammen konsequenterweise aus deren Arbeit [CM99] sowie aus Abschnitt 11.1.3 aus [TC03] und [LWK12].

Zuallererst vergegenwärtigen wir uns die Definition der Fourier-Transformierten einer Funktion  $f$ , das ist

$$\mathbf{F}f(y) := \int_{\mathbb{R}} e^{iyx} f(x) dx$$

und deren Inverse

$$\mathbf{F}^{-1}f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iyx} f(y) dy.$$

Als Nächstes setzen wir  $k = \ln K$  als den Logarithmus des Ausübungspreises sowie  $s = s_t = \ln S_t$  mit  $S_0 = 1$  und nehmen an, dass das Moment der Ordnung  $(1 + \alpha)$  des Preisprozesses  $S$  für ein  $\alpha > 0$  bezüglich der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p$  von  $\ln S_t$  existiert, also

$$\int_{\mathbb{R}} e^{(1+\alpha)y} p_t(s) ds < \infty.$$

Nun definieren wir unter Berücksichtigung des zu ermittelnden Werts einer Calloption mit

$$C_t(k) := \Pi_0(C) = e^{-rt} \mathbb{E}(\max(S_t - K, 0)) = \int_k^\infty e^{-rt} (e^s - e^k) p_t(s) ds$$

die Funktion  $c$  durch

$$c_t(k) := e^{\alpha k} C_t(k). \quad (39)$$

Demzufolge errechnet sich die Fourier-Transformierte von  $c$  durch

$$\begin{aligned} \mathbf{F}c_t(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{iyk} c_t(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyk} \int_k^{\infty} e^{\alpha k} e^{-rt} (e^s - e^k) p_t(s) ds dk \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rt} p_t(s) \int_{-\infty}^s (e^{s+\alpha k} - e^{(1+\alpha)k}) e^{iyk} dk ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rt} p_t(s) e^{s(\alpha+1+iy)} \left( \frac{1}{\alpha+iy} - \frac{1}{\alpha+1+iy} \right) ds \\ &= \frac{e^{-rt} \varphi_s(y - i(\alpha+1))}{\alpha^2 + \alpha - y^2 + iy(2\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Indessen bezeichnet  $\varphi_s$  die charakteristische Funktion des logarithmierten Preisprozesses unter der dazugehörigen risikoneutralen (und eventuell Esscher-transformierten) Wahrscheinlichkeitsdichte  $p$ . Mittels der Modifizierung des eigentlichen Callpreises in (39) wird Quadratintegrierbarkeit gewährleistet, welche bei der Bestimmung des eigentlichen Calloptionswerts über die inverse Fourier-Transformierte und der Identität  $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}c_t = c_t$  benötigt wird:

$$C_t(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyk} \mathbf{F}c_t(y) dy = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iyk} \mathbf{F}c_t(y) dy. \quad (40)$$

Letztere Gleichheit resultiert daraus, dass  $C_t$  eine reellwertige Funktion ist, was wiederum damit einhergeht, dass der Imaginärteil von  $\mathbf{F}c_t$  eine ungerade Funktion und der Realteil eine gerade Funktion ist. Eine einfache numerische Näherung ist bei Anwendung der Trapezregel gegeben durch

$$C_t(k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-iy_j k} \mathbf{F}c_t(y_j) \Delta y, \quad (41)$$

wenn  $y_j = (j-1)\Delta y$  für  $j = 1, \dots, N$ . Um einen Optionswert effizient numerisch bestimmen zu können, wollen wir die *schnelle Fourier-Transformation* verwenden. Der Algorithmus berechnet in diesem Zusammenhang die Summe

$$w(k) = \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} x(j), \quad k = 1, \dots, N, \quad (42)$$

und reduziert im Falle von  $N = 2^n$  den eigentlich quadratischen Rechenaufwand der Größenordnung  $\Theta(N^2)$  auf einen der Ordnung  $\Theta(N \log_2(N))$ .

Wir beschäftigen uns lediglich mit at- oder around-the-money-Callptionen, also Optionen, deren jetziger Preis ungefähr beim Ausübungspreis liegt, weshalb wir

aufgrund von  $S_0 = 1$  den Fall  $k \approx 0$  betrachten. Derweil liefert die schnelle Fourier-Transformation insgesamt  $N$  Werte von  $k$ , welche zwischen  $b$  und  $-b$  liegen und einen gewissen Abstand  $\Delta k$  haben sollen, ergo

$$k_m := -b + \Delta k(m - 1), \quad m = 1, \dots, N$$

mit  $b = \frac{N\Delta k}{2}$ . Vergleicht man weiter (41) mit (42), muss unter den getroffenen Annahmen  $\Delta y \cdot \Delta k = \frac{2\pi}{N}$  gelten. Insgesamt gilt demnach

$$C_t(k_m) \approx \frac{e^{-\alpha k_m}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\Delta y \Delta k(j-1)(m-1)} e^{iby_j} \mathbf{F}c_t(y_j) \Delta y.$$

Mithilfe moderater Rechenleistung lassen sich so effizient Preise von Calloptionen berechnen.

## Abbildungsverzeichnis

1	Paul Lévy (1886–1971) aus [JacoJ] . . . . .	3
2	Zwei Pfade einer Irrfahrt (eigene Darstellung mithilfe von [Inc] und <b>Quellcode 1</b> ) . . . . .	9
3	Pfade eines zusammengesetzten Poissonprozesses in Abhängigkeit der Intensität $\lambda$ (eigene Darstellung mithilfe von [Inc] und <b>Quellcode 2</b> ) . . . . .	10
4	Pfad eines zweidimensionalen, standardisierten Wienerprozesses (eigene Darstellung mithilfe von [Inc] und <b>Quellcode 3</b> ) . . . . .	11

## Literatur- und Quellenverzeichnis

- [Alm05] Ariel Almendral. „Numerical valuation of American options under the CGMY process“. In: *Exotic Option Pricing and Advanced Lévy Models*, Wiley, UK (2005).
- [App05] David Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge Univ. Press, 2005.
- [BA17] Manal Bouskraoui und Arbai Aziz. „Pricing Option CGMY model“. In: *International Journal of Mathematics* 13, Issue 2 (Apr. 2017), S. 5–11.
- [Car+02] Peter Carr u. a. „The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation“. In: *The Journal of Business* 75.2 (2002), S. 305–332. URL: <http://www.jstor.org/stable/10.1086/338705>.
- [CM99] Peter Carr und Dilip Madan. „Option Valuation Using the Fast Fourier Transform“. In: *The Journal of Computational Finance* 2.4 (März 1999), S. 61–73.
- [FG96] Bert Fristedt und Lawrence F. Gray. „Random Walk“. In: *A Modern Introduction to Probability Theory*. Birkhäuser, 1996, S. 163–184.
- [GS94] Hans U. Gerber und Elias S.W. Shiu. „Martingale Approach to Pricing Perpetual American Options“. In: *ASTIN Bulletin* 24.2 (1994), S. 195–220.
- [Inc] Wolfram Research Inc. *Mathematica, Version 12.0*. Champaign, IL, 2019.
- [JacoJ] Konrad Jacobs. *Paul Lévy*. [Online; abgerufen am 9. Dezember 2021]. o. J. URL: [https://opc.mfo.de/detail?photo\\_id=2531](https://opc.mfo.de/detail?photo_id=2531).
- [Khe+15] Asma Khedher u. a. „Risikomanagement mit Sprungprozessen“. In: *RISIKO MANAGER* Teil 1 bis 7 (2014-2015).
- [Kle13] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [Kor02] R. Korn. *Elementare Finanzmathematik*. Techn. Ber. 39. [Online; abgerufen am 7. Februar 2022]. Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM Report), 2002. URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:386-kluedo-13040>.
- [KT13] Uwe Küchler und Stefan Tappe. „Tempered stable distributions and processes“. In: *Stochastic Processes and their Applications* 123.12 (2013). [Online; abgerufen am 20. Dezember 2021], S. 4256–4293. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414913001828>.
- [LWK12] Kwai Sun Leung, Hoi Ying Wong und Yue Kuen Kwok. „Efficient Options Pricing Using the Fast Fourier Transform“. In: *Handbook of Computational Finance*. Springer Berlin Heidelberg, 2012, S. 579–604.
- [Miy11] Yoshio Miyahara. *Option Pricing in Incomplete Markets: Modeling Based on Geometric Lévy Processes and Minimal Entropy Martingale Measures*. Imperial College Press, 2011.

- [MS05] David Meintrup und Stefan Schäffler. *Stochastik: Theorie und Anwendungen*. Springer, 2005.
- [Mür14] Michael Mürmann. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse*. Springer Spektrum, 2014.
- [Pas11] Andrea Pascucci. *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*. Springer, 2011.
- [Sat05] Ken-iti Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 2005.
- [saz14] saz. *Stochastic Continuity of a Lévy Process*. StackExchange Forum. [Online; abgerufen am 11. November 2021]. Nov. 2014. URL: <https://math.stackexchange.com/questions/1003765/stochastic-continuity-of-a-l%C3%A9vy-process>.
- [Sch11] Volker Schmidt. *Stochastik II*. Vorlesungsskript. [Online; abgerufen am 9. November 2021]. 2011. URL: [https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website\\_uni\\_ulm/mawi.inst.110/mitarbeiter/stenzel/StochastikII/skript.pdf](https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/mitarbeiter/stenzel/StochastikII/skript.pdf).
- [Tay75] S. J. Taylor. „Paul Lévy“. In: *Bulletin of the London Mathematical Society* 7.3 (1975). [Online; abgerufen am 20. Dezember 2021], S. 300–320. URL: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/blms/7.3.300>.
- [TC03] Peter Tankov und Rama Cont. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
- [WW16] Karsten Webel und Dominik Wied. *Stochastische Prozesse – Eine Einführung für Statistiker und Datenwissenschaftler*. Springer Gabler, 2016.

```

1 randomwalk1: ListPlot[RandomFunction[RandomWalkProcess[.5, .3], {30}],
2   Filling -> Axis, InterpolationOrder -> 0]
3
4 randomwalk2: ListPlot[RandomFunction[RandomWalkProcess[.5, .3], {177}],
5   Filling -> Axis, InterpolationOrder -> 0]

```

**Quellcode 1:** Zwei Pfade einer Irrfahrt (vgl. **Abbildung 2**)

```

1 poissonprocess: \[ScriptCapitalP][\[Lambda]] =
2   CompoundPoissonProcess[\[Lambda], NormalDistribution[]];
3 pars = {.2, 1, 7};
4 data = TemporalData@
5   Table[RandomFunction[\[ScriptCapitalP][\[Lambda]], {0,
6     100}], {\[Lambda], pars}];
7 ListStepPlot[data,
8   PlotLegends ->
9   Placed[{"\[Lambda]=0,2", "\[Lambda]=1", "\[Lambda]=7"}, {0.2,
10    0.2}]]

```

**Quellcode 2:** Pfade eines zusammengesetzten Poissonprozesses in Abhängigkeit der Intensität  $\lambda$  (vgl. **Abbildung 3**)

```

1 wiener2d: SeedRandom[17]; sample =
2   RandomFunction[WienerProcess[], {0, 1, .001}, 2]["ValueList"];
3 ListLinePlot[Transpose@sample, ColorFunction -> "Rainbow"]

```

**Quellcode 3:** Pfad eines zweidimensionalen, standardisierten Wienerprozesses (vgl. **Abbildung 4**)

# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die diesen Quellen und Hilfsmitteln wörtlich oder sinngemäß entnommenen Ausführungen als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit wurde keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

---

Ort, Datum

---

Marvin Raab