Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. J. Steuding, T. Gregor,
J. Jordan, C. Teichert

Wintersemester 2006
23-24.04.2007

1 . Tutorium zur Analysis II

1.1 (Französische Eisenbahnmetrik:)
Es sei $M = \mathbb{R}^2$ und

$$d : M \times M \to \mathbb{R},\ d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{falls } y = t \cdot x \text{ für ein } t \in \mathbb{R}, \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei mit $\|x\|$ der euklidische Abstand von $x \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet wird. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist. Skizieren Sie für $\epsilon > 0, a \in \mathbb{R}^2$ die offenen Kugeln

$$B_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(a,x) < \epsilon\}.$$

Offensichtlich gilt $d(x,x) = 0$ und $d(x,y) = d(y,x)$. Außerdem gilt $d(x,y) > 0$ falls $x \neq y$. Es bleibt also jeweils die Dreiecksungleichung zu zeigen, d.h. wir zeigen, für alle $x,y,z \in \mathbb{R}^2$ gilt $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
Fall 1: Seien z und x auf einer Geraden g welche durch den Ursprung geht, dh: $\exists t \in \mathbb{R}$: $z = t \cdot x$. Ist y auch auf dieser Geraden (Fall 1.1), dann gilt $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, da d dann einfach der euklidischen Metrik eingeschränkt auf g entspricht. Ist y nicht auf dieser Geraden (Fall 1.2), dann gilt

$$d(x,z) = \|x-z\| \leq \|x\| + \|-z\| \leq \|x\| + 2\|y\| + \|z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

Fall 2: Seien x und z nicht auf einer Geraden durch den Ursprung. Ist auch y weder mit x noch mit z auf einer Geraden durch den Ursprung (Fall 2.1), dann ist $d(x,z) = \|x\| + \|z\| \leq \|x\| + 2\|y\| + \|z\| = d(x,y) + d(y,z)$. (Fall 2.2 und Fall 2.3). Ist y auf der Geraden durch x und Ursprung dann folgt aus der Ungleichung für Normen

$$d(x,z) \leq \|x\| + \|z\| = \|x-y+y\| + \|z\| \leq \|x-y\| + \|z\| + \|y\| = d(x,y) + d(y,z).$$

Ist y auf der Geraden durch Ursprung und z gilt mit analogen Begründung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
Für die Kugel um ein $x \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich

$$B_\epsilon(x) = \begin{cases} t \cdot x, t \in (1 - \frac{\epsilon}{\|x\|}, 1 + \frac{\epsilon}{\|x\|}) & \text{falls } x \neq 0, \|x\| > \epsilon \\ B_{\epsilon - \|x\|}(0) \cup I & \text{falls } x \neq 0, \|x\| \leq \epsilon \end{cases}$$

mit $B_{\epsilon-\|x\|}(0) := \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|y\| \leq \epsilon - \|x\|\}$ und $I := \{t \cdot x \,|\, t \in (1 - \frac{\epsilon}{\|x\|}, 1 + \frac{\epsilon}{\|x\|})\}$ (Skizze machen!)