Analysis 1

Manfred Dobrowolski*

9. April 2014

Inhaltsverzeichnis

*Institut für Mathematik, Universität Würzburg, Emil-Fischer-Straße 30, 97047 Würzburg

1 Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

1.1 Einführung Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Manche Autoren lassen die natürlichen Zahlen auch mit der Null beginnen, wir schreiben dafür $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wir wollen die folgende Formel für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen beweisen

$$(A_n) \qquad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Für $n = 1$ erhalten wir auf der linken Seite 1 und auf der rechten $1^2 = 1$. Überprüfen wir ferner den Fall $n = 2$: Links steht $1 + 3 = 4$ und rechts $2^2 = 4$. Da wir auch den Fall $n = 3$ leicht im Kopf berechnen können, ist die Formel also für $n = 1, 2, 3$ richtig. Ein Physiker wäre mit diesem Argument vielleicht schon zufrieden und würde hieraus kühn auf die Richtigkeit von (A_n) für alle n folgern. Wir nennen dies einen Induktionsschluss, weil eine allgemeine Behauptung durch Nachweis von endlich vielen Fällen aufgestellt wird. Dem Physiker bleibt freilich nichts anderes übrig: Er kann ein von ihm postuliertes Gesetz nur in endlich vielen Fällen experimentell nachweisen, obwohl es in unendlich vielen Fällen gültig sein soll. In der Mathematik muss die Behauptung (A_n) dagegen für jedes n bewiesen werden.

Bei der Überprüfung von (A_n) kann man auf bereits Berechnetes zurückgreifen:

$$(1.1) \qquad 1 + 3 + 5 = (1 + 3) + 5 = 4 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = (1 + 3 + 5) + 7 = 9 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = (1 + 3 + 5 + 7) + 9 = 16 + 9 = 25$$

Wie wir gleich sehen werden, kann man hieraus einen vollständigen Beweis machen, es fehlt nur noch ein Schema, das diese Rechnung allgemeingültig macht.

Wir können $(A_1), (A_2), \ldots$ mit Hilfe des *Prinzips der vollständigen Induktion* beweisen. Dazu beweist man zwei Dinge:

(i) (A_1) (=Induktionsanfang oder Induktionsverankerung),

(ii) $(A_n) \Rightarrow (A_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (=Induktionsschritt).

Der „Beweis“ von (A_1) ist nichts anderes als dass man nachrechnet, dass (A_1) eine wahre Aussage ist, was wir bereits getan haben. Der zweite Schritt lässt sich so interpretieren: Unter der Voraussetzung, dass wir schon wissen, dass die *Induktionsvoraussetzung* (A_n) richtig ist, können wir auch die Richtigkeit von (A_{n+1}) nachweisen. Warum ist mit diesen beiden Schritten tatsächlich der Nachweis von (A_n) für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfolgt ?

Wir betrachten den unendlich langen Zug in Abbildung 1. Die Aussage „(A_n) ist richtig“ soll in diesem Bild bedeuten „Der Waggon n fährt“. Wir nehmen zunächst an, dass die Waggons nicht miteinander gekoppelt sind. Wenn also (A_1) bewiesen ist, so fährt die Lokomotive los – allerdings allein, weil nichts aneinandergekoppelt ist. Haben wir „ $(A_1) \Rightarrow (A_2)$ “ bewiesen, so haben wir die Wahrheit von (A_2) an die Wahrheit von (A_1) gekoppelt: Mit (A_1) wahr, ist auch (A_2) wahr. Fährt die Lokomotive los, so auch Waggon 2. Im Induktionsschritt sind sogar alle Waggons miteinder gekoppelt. Fährt nun die Lokomotive aufgrund der Induktionsverankerung los, so auch der unendlich lange Zug.

Nun können wir (A_n) beweisen. (A_1) ist ja richtig. Zum Nachweis von (A_{n+1}) dürfen wir nun (A_n) verwenden. Wir schauen (A_{n+1}) tief in die Augen und kommen dann mit dem gleichen

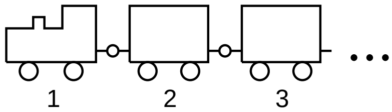


Abbildung 1: Der Induktionszug

Verfahren wie bei (1.1) auf

$$\begin{aligned} &1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2(n+1)-1) \\ &= \Big(1 + 3 + \ldots + (2n-1)\Big) + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Damit ist (A_{n+1}) bewiesen.

Es sei darauf hingewiesen, dass bei der wahren Implikation „Wenn es regnet, ist die Straße nass“ weder etwas über Regen noch über eine nasse Straße ausgesagt wird. Genauso sagt $(A_n) \Rightarrow (A_{n+1})$ für sich alleine genommen weder etwas über (A_n) noch über (A_{n+1}) aus.

Die Schlussweise, die wir zum Nachweis der Korrektheit der vollständigen Induktion anwenden, heißt „modus ponens“ und lässt sich so darstellen:

„Wenn es regnet, dann ist die Straße nass“	$A \;\Rightarrow\; B$
„Es regnet“	A
„Die Straße ist nass“	B

Der Beweis von (A_n) baut sich schrittweise auf: (A_1) ist die Induktionsvoraussetzung, dann wird der Induktionsschritt für $n = 1$ angewendet, also ist $(A_1) \Rightarrow (A_2)$ ebenfalls bewiesen, nach dem modus ponens daher auch (A_2). Durch fortgesetzte Anwendung des Induktionsschritts begleitet vom modus ponens erhält man den Beweis von (A_n) für alle n.

1.2 Bernoulli-Ungleichung Das Prinzip der vollständigen Induktion lässt sich auf vielfältige Weise verallgemeinern. Ist beispielsweise (A_n) eine Aussage, die für alle $n \geq n_0$ definiert ist für ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so haben wir mit

(i) (A_{n_0}),

(ii) $(A_n) \;\Rightarrow\; (A_{n+1})$ für alle $n \geq n_0$,

die Aussage (A_n) für alle $n \geq n_0$ bewiesen. In diesem Fall hat die Lokomotive nur einen anderen Namen bekommen, nämlich n_0, an der Struktur des Zuges hat sich nichts geändert.

Mit diesem verallgemeinerten Induktionsprinzip beweisen wir

Satz (Bernoulli-Ungleichung Für jede reelle Zahl $a \geq -1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(B_n) \qquad (1+a)^n \geq 1 + na.$$

Beweis: In diesem Fall können wir die Induktion mit $n_0 = 0$ verankern, denn $(1+a)^0 = 1$. Für $n \geq 0$ gilt unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung (B_n)

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \\ &\geq (1+na)(1+a) = 1 + na + a + na^2 \\ &\geq 1 + (n+1)a. \end{aligned}$$

□

1.3 Die Fibonacci-Zahlen Die *Fibonacci-Zahlen* F_n sind definiert durch die Anfangsvorgaben

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

sowie durch die *Rekursion*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir bekommen die Folge $F_0, F_1, \ldots$ der Fibonacci-Zahlen, indem wir die letzte Formel sukzessive für $n = 1, 2 \ldots$ anwenden. Für $n = 1$ ergibt sich also $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$. Allgemeiner ist jede Fibonacci-Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger. In der Definition haben wir also ein verallgemeinertes Induktionsprinzip kennengelernt: Da jede Fibonacci-Zahl F_{n+1} von ihren beiden Vorgängern F_n, F_{n-1} abhängt, benötigen wir *zwei* „Induktionsanfänge“ F_0 und F_1. Damit sind die Fibonacci-Zahlen für alle natürlichen Zahlen definiert und lassen sich, da nur die beiden vorherigen Fibonacci-Zahlen addiert werden müssen, leicht hinschreiben:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21,\ F_9 = 34.$$

Erfunden hat die Fibonacci-Zahlen der Mathematiker Leonardo von Pisa (ca 1170-1240), der später Fibonacci genannt wurde. Mit den Fibonacci-Zahlen soll die Kaninchenaufgabe gelöst werden, also wie viele Kaninchen im Laufe einer Zeitspanne aus einem Paar entstehen. Es wird angenommen, das jedes Paar allmonatlich ein neues Paar in die Welt setzt, das wiederum nach *zwei* Monaten ein weiteres Paar produziert. Man nimmt also an, dass die neugeborenen Kaninchen nicht sofort geschlechtsreif sind. Todesfälle werden nicht berücksichtigt. Hat man im ersten Monat ein neugeborenes Paar (N), so im zweiten Monat ein geschlechtsreifes Paar (G) und im dritten Monat 2 Paare, nämlich 1N+1G. Im 4. Monat hat man 3 Paare, nämlich 1N+2G. Bezeichnet man mit F_n die Anzahl der Kaninchenpaare im Monat n, so kommen im Monat $n + 1$ gerade F_{n-1} hinzu:

$$\begin{array}{ccccc} F_{n+1} & = & F_n & + & F_{n-1} \\ \text{Paare in } n+1 & & \text{Paare in } n & & \text{geschlechtsreife Paare in } n \end{array}$$

Wäre jedes neugeborene Paar sofort geschlechtsreif, so hätte man stattdessen die Rekursion $F_{n+1} = 2F_n$, was eine Verdoppelung der Paare in jedem Monat bedeuten würde. Die Berücksichtigung der Geschlechtsreife führt dagegen zu einem langsameren Wachstum der Population, nämlich

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6, \quad \frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1,625, \quad \frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1,615\ldots,$$
$$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1,619\ldots, \quad \frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} = 1,617\ldots.$$

Das sieht recht geheimnisvoll aus: Die Quotienten scheinen um einen nicht offensichtlichen Wert zu oszillieren, der in der Nähe von $1,618$ liegt.

Nun wollen wir die verwandte Frage diskutieren, für welche positiven Zahlen a die Abschätzung

$$F_n \le a^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig ist. Um erst einmal die Struktur des Beweises zu verstehen, machen wir es uns einfach und beweisen die Aussagen

$$(D_n) \qquad F_n \le 2^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir wollen das Induktionsprinzip verwenden, haben aber Schwierigkeiten, weil in $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ sowohl F_n als auch F_{n-1} vorkommen. Wir zeigen daher

(i) (D_0) *und* (D_1) (= Induktionsanfang),

(ii) $(D_{n-1}), (D_n) \;\Rightarrow\; (D_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (= Induktionsschritt).

Wir können leicht durchprobieren, dass damit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen ist. (D_0) und (D_1) sind nach dem ersten Schritt richtig. Zum Beweis von (D_2) setzen wir im zweiten Schritt $n = 1$, und erhalten, da (D_0) und (D_1) richtig sind, die Behauptung (D_2). Für die größeren n geht das ganz genauso.

Der Beweis von (D_0) und (D_1) ist

$$F_0 = 0 \le 1 = 2^0, \quad F_1 = 1 \le 2 = 2^1.$$

Zum Nachweis von (D_{n+1}) dürfen wir die Induktionsvoraussetzung

$$F_n \le 2^n, \quad F_{n-1} \le 2^{n-1}$$

verwenden. Demnach gilt

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \le 2^n + 2^{n-1} \le 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}. \tag{1.2}$$

Damit ist (D_{n+1}) bewiesen.

Kommen wir nun zur Ausgangsfrage zurück, für welche $a > 0$ die Abschätzung

$$F_n \le a^n$$

für alle n in $\mathbb{N}_0$ richtig ist. Gleichzeitig soll hier gezeigt werden, dass mit dem Prinzip der vollständigen Induktion nicht nur vermutete Aussagen bewiesen, sondern auch völlig neue Erkenntnisse hergeleitet werden können, wenn man mit dem Prinzip kreativ umgeht. Der Beweis der neuen Aussage läuft genauso wie vorher. Der Induktionsanfang $F_0 \le a^0$ und $F_1 \le a$ ist für jedes $a \ge 1$ richtig. Die Hauptschwierigkeit ist der Schritt (1.2), den wir ganz analog durchführen wollen:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \le a^n + a^{n-1} \overset{!}{\le} a^{n+1}.$$

Das Ausrufezeichen bedeutet hier, dass wir diejenigen a herausfinden müssen, für die

$$a^n + a^{n-1} \le a^{n+1}$$

richtig ist. Da $a \ge 1$ wegen des Induktionsanfangs, können wir hier kürzen und erhalten

$$a + 1 \le a^2 \tag{1.3}$$

und somit

$$a \ge \Phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.618033\ldots,$$

was im Einklang mit den obigen Untersuchungen von F_{n+1}/F_n steht. Die Zahl Φ heißt *goldener Schnitt* und löst folgendes Problem: Gesucht ist das Verhältnis der Seitenlängen a, b eines Rechtecks mit

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{lange Seite}}{\text{kurze Seite}} = \frac{\text{Summe der Seiten}}{\text{lange Seite}}.$$

Mit $\Phi = a/b$ folgt hieraus $\Phi = 1 + \Phi^{-1}$ und $\Phi^2 = \Phi + 1$, was gerade die mit (1.3) verbundene quadratische Gleichung ist.

1.4 Mächtigkeit der Potenzmenge Für jede Menge A gilt $\emptyset \subset A$ und $A \subset A$, letzteres ist Bestandteil der Definition der Teilmenge. $\emptyset \subset A$ ist ebenfalls eine Konsequenz aus der Definition der Teilmenge,

$$B \subset A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\ (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Auf der rechten Seite trifft die Voraussetzung $x \in B$ auf die leere Menge nie zu, sie ist also immer falsch. Aus der Wahrheitstafel für die Implikation folgt jedoch, dass die Implikation auf jeden Fall wahr ist, wenn die Voraussetzung falsch ist.

Die Menge $A_2 = \{1, 2\}$ besitzt daher die Teilmengen

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}.$$

Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist definiert als die Menge aller Teilmengen von A, daher

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}.$$

Wir wollen die Anzahl der Teilmengen der Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ bestimmen. Dazu bietet sich vollständige Induktion über n an, allerdings müssen wir erst einmal wissen, *was* wir beweisen sollen – die Induktion sagt uns das ja nicht. Durch Probieren stellen wir zunächst eine Hypothese auf:

$$\begin{array}{lll} A_1: & \emptyset, \{1\} & 2 \\ A_2: & \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} & 4 \\ A_3: & \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} & 8 \end{array}$$

Die Vermutung ist also: A_n besitzt 2^n Teilmengen.

Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig (=Induktionsanfang). Sei 2^n die Anzahl der Teilmengen von A_n (=Induktionsvoraussetzung). Die Beweisidee bei solchen kombinatorischen Problemen ist die Strukturierung der zu zählenden Objekte nach dem Motto „Teile und Herrsche“. Wir zerlegen die Teilmengen von A_{n+1} in zwei Gruppen:

$$\begin{array}{rl} \text{I}: & \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \text{II}: & \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{array}$$

Gruppe I enthält genau die Teilmengen von A_n, das sind nach Induktionsvoraussetzung 2^n. In den Teilmengen von Gruppe II können wir das Element $n + 1$ weglassen und wir erhalten eine Teilmenge von A_n. Umgekehrt können wir jede Teilmenge von A_n durch Anfügen von $n + 1$ zu einer Teilmenge von Gruppe II machen. Damit enthält auch Gruppe II genau 2^n Teilmengen, zusammen also $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, wie zu beweisen war. Wir haben damit gezeigt:

Satz Die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge ist 2^n.

1.5 Permutationen und Fakultät Eine *Permutation* von $(1, 2, \ldots, n)$ ist eine Umstellung der Zahlen $1, \ldots, n$. Beispielsweise besitzt $(1, 2, 3)$ die Permutationen

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1).$$

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (gesprochen: n Fakultät) definiert durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Die Fakultäten wachsen sehr schnell in n,

$$3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720, \quad 20! = 2.43\ldots \times 10^{18}.$$

Rein aus praktischen Gründen setzt man $0! = 1$.

Satz Die Anzahl der Permutationen von $(1, 2, \dots, n)$ ist $n!$.

Beweis: Man kann das durch vollständige Induktion über n beweisen. Einfacher ist die Überlegung, auf wie viele Arten man die Zahlen $1, 2, \dots, n$ auf n nummerierte Kästchen verteilen kann. Für die Zahl 1 hat man n Möglichkeiten, für die Zahl 2 sind es $n-1$, für die letzte Zahl n verbleibt nur noch eine Möglichkeit. $\square$

1.6 Die Binomialkoeffizienten Für $n \in \mathbb{N}_0$ sind die *Binomialkoeffizienten* folgendermaßen definiert

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{für } 0 \le k \le n.$$

Dass all diese Werte natürliche Zahlen sind, werden wir später sehen. Wichtig sind im Folgenden die Fälle

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1. \tag{1.4}$$

Wir beweisen die technische Formel

Lemma

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

Beweis: Wir bringen die linke Seite auf den Hauptnenner,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

$\square$

Man interpretiert das Lemma durch das *Pascalsche Dreieck*:

n=0						1					
n=1					1		1				
n=2				1		2		1			
n=3			1		3		3		1		
n=4		1		4		6		4		1	
n=5	1		5		10		10		5		1

Jede neue Zeile wird rechts und links um 1 ergänzt, was den Werten $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$ in (1.4) entspricht, die übrigen Einträge erhält man aus dem Lemma, jeder Eintrag ist die Summe der links und rechts über ihm stehenden Zahlen.

Satz Die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.

Beweis: Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig, denn die leere Menge enthält nur sich selbst als Teilmenge. Die Behauptung ist auch richtig für $k = 0$ und $k = n$, in beiden Fällen haben wir nur eine Teilmenge, die leere Menge bzw. die Menge selbst, was mit den Werten in (1.4) übereinstimmt. Nach dem Prinzip „Teile und Herrsche" strukturieren wir die k-elementigen Teilmengen der Menge $A_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ in zwei Gruppen:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \mathrm{II}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Gruppe I besteht genau aus den k-elementigen Teilmengen der Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, nach Induktionsvoraussetzung sind das $\binom{n}{k}$.

In den Teilmengen der Gruppe II können wir das Element $n + 1$ weglassen und erhalten eine $k - 1$-elementige Teilmenge von A_n. Umgekehrt können wir jede $k - 1$-elementige Teilmenge von A_n um das Element $n + 1$ ergänzen und erhalten eine Teilmenge von Gruppe II. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Zahl der Teilmengen in Gruppe II gerade $\binom{n}{k-1}$. Für die Gesamtzahl der Teilmengen gilt daher mit obigem Lemma

$$\text{Gruppe I} + \text{Gruppe II} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Damit ist der Induktionsbeweis erfolgreich abgeschlossen. □

Beim Lotto „6 aus 49" ist die Wahrscheinlichkeit, alle sechs Zahlen richtig getippt zu haben, gleich der Wahrscheinlichkeit, aus der Gesamtheit der 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 49\}$ die „richtige" herausgefunden zu haben. Die Zahl der Möglichkeiten ist

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{49 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6) \cdot 47 \cdot 46 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 3) \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 = 13\,983\,816.$$

Die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige ist daher ungefähr 1 : 14 Millionen.

1.7 Mathematische Strukturen lassen sich in der Form

$$\mathbb{S} = \{S, e_1, \ldots, e_l, f_1, \ldots, f_m, R_1, \ldots, R_n\}$$

schreiben mit

$$\begin{aligned} S &\quad \text{Grundmenge} \\ e_i &\quad \text{ausgezeichnete Elemente (meist neutrale Elemente),} \\ f_j &\quad \text{Abbildungen (meist zweistellige Operationen wie } +\text{),} \\ R_k &\quad \text{(meist zweistellige) Relationen.} \end{aligned}$$

1.8 Gruppen Eine *Gruppe* $\mathbb{G} = (G, e, \circ)$ besteht aus einer Menge G, einer zweistelligen Operation $\circ$ mit $z = x \circ y \in G$, und einem ausgezeichneten Element $e \in G$, so dass:

(G1) (Assoziativgesetz) Für alle $x, y, z \in G$ gilt

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

(G2) (Neutrales Element) Für alle $x \in G$ gilt

$$e \circ x = x \circ e = x.$$

(G3) (Inverses Element) Zu jedem $x \in G$ gibt es ein $x^{-1} \in G$ mit

$$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e.$$

Die Axiome sind in dieser Form redundant. Z.B. genügt es, an Stelle von (G2) nur $x \circ e = x$ zu fordern, was in der Literatur manchmal geschieht. In diesem Fall muss man $e \circ x = x$ mit Hilfe der anderen Axiome explizit beweisen, was wir uns ersparen möchten.

Endliche Gruppen gibt man mit einer *Gruppentafel* an, in der die Ergebnisse von $x \circ y$ eingetragen werden. Wir bezeichnen die Gruppenelemente mit $0, 1, 2, \ldots$, wobei 0 das neutrale Element ist. Die Gruppe mit 3 Elementen ist eindeutig bestimmt:

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

.

Vierelementige Gruppen gibt es schon mehrere:

$\circ$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\circ$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Gruppen mit unendlicher Grundmenge sind die ganzen und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{G} = (\mathbb{Z}, 0, +), \quad \mathbb{G} = (\mathbb{Q}, 0, +), \quad \mathbb{G} = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, 1, \cdot),$$

die im nächsten Kapitel besprochen werden. Dagegen bilden die natürlichen Zahlen mit der Addition keine Gruppe, weil wir die positiven Zahlen nicht invertieren können.

Also: Konkrete Gruppen können alles mögliche sein. Daher ist es hier wie meist in der Algebra wichtig, dass die Beweise streng aus den Axiomen folgen. Als Beispiel zeigen wir den folgenden

Satz In jeder Gruppe sind die Gleichungen $x \circ a = b$ und $a \circ x = b$ eindeutig nach x auflösbar.

Beweis: Man muss hier vorsichtig sein, weil das Kommutativgesetz $x \circ y = y \circ x$ nicht unbedingt gelten muss. Als Lösung von $x \circ a = b$ vermuten wir $x = b \circ a^{-1}$,

$$x \circ b = (b \circ a^{-1}) \circ a \overset{(G1)}{=} b \circ (a^{-1} \circ a) \overset{(G3)}{=} b \circ e \overset{(G2)}{=} b.$$

Für den Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass die Gleichung $x \circ y = b$ von zwei Gruppenelementen x, x' gelöst wird. Aus $x \circ a = x' \circ a$ folgt durch Multiplikation von rechts mit a^{-1}, dass $x = x'$.

Die eindeutige Lösbarkeit von $a \circ x = b$ zeigt man ganz analog. $\square$

Auf Grund dieses Satzes sind die Gruppentafeln *Lateinische Quadrate*, bei denen in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element genau einmal vorkommt.

Eine Gruppe heißt *abelsch* oder *kommutativ*, wenn zusätzlich das Kommutativgesetz gilt:

(G4) Für alle $x, y \in G$ gilt

$$x \circ y = y \circ x.$$

Bei einer kommutativen Gruppe schreibt man meist $+$ statt $\circ$ mit dem neutralen Element 0. Dies erinnert an die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = (Z, 0, +)$, die ja eine kommutative Gruppe bilden.

1.9 Modelle Eine konkrete Menge (mit zugehörigen ausgezeichneten Elementen, Operationen und Relationen), in der die Axiome einer mathematischen Struktur gelten, heißt *Modell* dieser Struktur.

Alles, was wir als Beispiele von Gruppen bezeichnet haben, sind Modelle der Gruppe. Modelle sind daher konkret, haben philosophisch gesprochen ein eigenes Sein in der mathematischen Welt. Dagegen ist eine mathematische Struktur i.a. abstrakt. Das Axiomensystem der Gruppe definiert gleichzeitig, was eine Gruppe ist.

1.10 Ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen Was ist eine Gruppe? Einzig mögliche Antwort ist, die Gruppenaxiome zu nennen. Was sind die natürlichen Zahlen? Die vernünftige Antwort ist: Das sind die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ Abgesehen davon, wie man die einzelnen natürlichen Zahlen nennt, sind sie eindeutig bestimmt. Ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen ist daher eher beschreibend als definierend.

„Ich brauche mich doch nicht durch ein Axiomensystem darüber belehren zu lassen, was eine natürliche Zahl ist!“

Wie die meisten Axiomensysteme haben die Gruppenaxiome sehr unterschiedliche Modelle. Die Axiome für die natürlichen Zahlen müssen so formuliert werden, dass es nur ein einziges Modell gibt – eine sportliche Herausforderung, die der Mathematiker Giuseppe Peano Ende des 19. Jahrhunderts erfolgreich angenommen hat.

In moderner Schreibweise sind die natürlichen Zahlen eine Struktur $\mathbb{N} = (N, 1, f)$ mit dem ausgezeichneten Element 1 und einer einstelligen Abbildung $f : N \to N$, die als Nachfolger interpretiert wird. Die Axiome sind dann

(P1) Für alle m, n: Wenn $f(m) = f(n)$, so gilt $m = n$,

(P2) Es gibt kein $n \in N$ mit $f(n) = 1$,

(P3) Für alle Teilmengen $M \subset N$ gilt:

$$\text{Ist } 1 \in M \text{ und folgt aus } n \in M, \text{ dass auch } f(n) \in M, \text{ so } M = N.$$

(P1) bedeutet, dass f *injektiv* ist, dass es also höchstens ein Urbild zu jedem $n \in N$ gibt. (P2) besagt, dass 1 nicht im *Bild* $f(N)$ von f liegt. Bekanntlich heißt eine Abbildung $g : X \to Y$ *surjektiv*, wenn der Bildbereich $g(X)$ mit Y übereinstimmt. (P2) besagt also insbesondere, dass f nicht surjektiv ist. Was lässt sich daraus für die Modelle von (P1) und (P2) (ohne (P3)) schließen? Wäre N eine endliche Menge, so müsste wegen der Injektivität der Bildbereich $f(N)$ genauso viel Elemente enthalten wie der Urbildbereich N, also $N = f(N)$. Andererseits darf f nicht surjektiv sein, womit wir einen Widerspruch erhalten. Die Axiome (P1) und (P2) zwingen die Modelle dazu, unendlich viele Elemente zu besitzen.

Um die Rolle von (P3) zu erläutern, betrachten wir folgendes Modell von (P1) und (P2). Neben den normalen natürlichen Zahlen $N_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ mit 1 als ausgezeichnetem Element soll die Grundmenge noch die Elemente der Menge $N_2 = \{a, b\}$ enthalten. Der Nachfolger auf N_1 ist wie üblich als $f(n) = n + 1$ definiert. Auf N_2 setzen wir $f(a) = b$ und $f(b) = a$. Damit ist $N = N_1 \cup N_2$ zusammen mit der so definierten Nachfolgerabbildung ein Modell von (P1) und (P2). Denn nach wie vor ist f injektiv und 1 liegt nicht im Bild von f. (P3) ist aber nicht erfüllt: Wir wählen $M = N_1$ und es ist jetzt in der Tat $1 \in N_1$ und aus $n \in N_1$ folgt auch $f(n) = n + 1 \in N_1$, aber N_1 stimmt nicht mit N überein.

Das Axiom (P3) der vollständigen Induktion sorgt also dafür, dass unter allen Modellen von (P1) und (P2) das minimale genommen wird: N soll nur aus $1, f(1), f(f(1)), \ldots$ bestehen.

Aufgaben

Die den Aufgaben beigefügten Zahlen sollen eine grobe Information über den Schwierigkeitsgrad geben: 1 = trivial, 2 = heminormal, 3 = normal, 4 = doktoral, 5 = suizidal.

1.1 (2) Man beweise die Gleichungen

$$S_n^1 := 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$S_n^2 := 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$S_n^3 := 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

1.2 (2) Seien $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_1 = F_2 = 1$ die Fibonacci-Zahlen. Zeigen Sie

a) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$,

b) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$,

c) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n+1} = F_{2n+2}$,

d) $1 + F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1}$,

e) $F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$.

1.3 (3) Bestimmen Sie mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen die Anzahl f_n der Folgen der Länge n bestehend aus Elementen der Menge $\{0, 1\}$, so dass niemals zwei Nullen hintereinanderstehen. Beispielsweise ist die Folge 10111 erlaubt, die Folge 10011 nicht.

Hinweis: Man unterteile die Menge dieser Folgen in zwei disjunkte Teilmengen, nämlich mit 0 bzw. 1 als letztem Folgenglied.

1.4 (2) Fibonaccis Annahmen über die Entwicklung einer Kaninchenpopulation seien dahingehend abgeändert, daß ein neugeborenes Paar erst nach 2 Monaten zeugungsfähig wird. Wir erhalten eine rekursiv definierte Folge L_n mit $L_1 = L_2 = L_3 = 1$. Bestimmen Sie die Rekursionsgleichung für L_n. Ist eine Abschätzung der Form $L_n \le \left(\frac{3}{2}\right)^n$ richtig?

1.5 (3) Man beweise durch Induktion für $n = 1, 2, 3 \ldots$:

a) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$,

b) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$,

c) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}) = \dfrac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x} \quad (x \neq 1)$,

d) $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{x^2}{1-x^4} + \dfrac{x^4}{1-x^8} + \ldots + \dfrac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^{2^n}} \quad (x \neq 1)$.

1.6 (3) Die rationalen Zahlen

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \quad H_0 = 0,$$

heißen *harmonische Zahlen*. Man beweise für $n \in \mathbb{N}_0$

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} H_k = nH_n - n,$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} kH_k = \frac{n(n-1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}.$

1.7 (4) n Autos stehen auf einer Kreislinie. Die Autos besitzen zusammen so viel Benzin, um damit einmal um den Kreis herumzufahren. Zeigen Sie, dass es ein Auto gibt, das den Kreis einmal umrunden kann, wenn es das Benzin der Autos, bei denen es vorbeikommt, mitnehmen darf.

Hinweis: Der Einfachheit halber nehme man an, dass das Umrunden des Kreises eine Entfernungseinheit beträgt und dass man dazu eine Einheit Benzin benötigt. Das Auto i erhält t_i Benzin mit $\sum t_i = 1$.

2 Rationale und reelle Zahlen

2.1 Körper Ein *Körper* ist eine Struktur der Form $\mathbb{K} = (K, 0, 1, +, \cdot)$ mit einer Grundmenge K, zwei zweistelligen Operationen $+$ und $\cdot$, für die die *Körperaxiome* gelten:

(K1) $(K, 0, +)$ ist abelsche Gruppe.

(K2) $(K \setminus \{0\}, 1, \cdot)$ ist abelsche Gruppe.

(K3) Es gilt das *Distributivgesetz*
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Das inverse Element von a bezüglich der Addition schreiben wir als $-a$, das der Multiplikation als a^{-1}. Üblicherweise verwendet man $a - b$ statt $a + (-b)$ und ab statt $a \cdot b$. Weiter gilt die bekannte Regel „Punktrechnung geht vor Strichrechnung".

Hieraus lassen sich alle Rechenregeln ableiten, die wir von den rationalen oder reellen Zahlen kennen:

Satz Sei $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper. Dann gilt:

(a) Die neutralen Elemente der Addition und der Multiplikation sind eindeutig bestimmt.

(b) Das inverse Element $-a$ der Addition und das inverse Element a^{-1}, $a \neq 0$, der Multiplikation sind eindeutig bestimmt.

(c) Es gilt $a \cdot 0 = 0$, $(-1)a = -a$, $(-a)b = -ab$.

(d) Ist $a \neq 0$, so folgt aus $ab = ac$, dass $b = c$.

(e) Ein Körper ist *nullteilerfrei*, d.h. aus $ab = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.

Beweis: (a) und (b) folgen aus Satz 1.8.

(c) Aus $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$ folgt $a0 = 0$. Aus $0 = 0a = (1 + (-1))a = a + (-1)a$ folgt $(-1)a = -a$. Mit $(-1)a = -a$ folgt $(-a)b = (-1)ab = (-1)(ab) = -ab$.

(d) Dies ist wieder Satz 1.8.

(e) Ist $ab = 0$ und $b \neq 0$, so $a = abb^{-1} = 0b^{-1} = 0$ wegen (c). □

Der Begriff des Körpers ist ähnlich schillernd wie der der Gruppe. Der kleinste Körper besteht nur aus den Elementen 0 und 1 mit den Standardwerten für $x + y$ und xy abgesehen von $1 + 1 = 0$..

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, so schreiben wir Summe und Produkt kürzer
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Aufgrund der Körperaxiome sind die Werte solcher Ausdrücke unabhängig von Reihenfolge oder Klammerung.

2.2 Potenzen und binomische Formel In jedem Körper $\mathbb{K}$ können wir induktiv Potenzen definieren
$$a^0 = 1, \quad a^{n+1} = a \cdot a^n.$$

Die Potenzgesetze

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad a^n b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = a^{mn} \tag{2.1}$$

lassen sich leicht durch vollständige Induktion beweisen. Für $a \neq 0$ setzen wir $a^{-n} = (a^{-1})^n$, (2.1) bleibt dann richtig für $m, n \in \mathbb{Z}$.

Für $a, b \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die *binomische Formel*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

die durch Induktion über n bewiesen wird. Für $n = 0$ ist sie richtig. Unter der Annahme, dass sie für n richtig ist, folgt

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1}$$

Mit Umnummerierung erhalten wir für den ersten Summanden

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i = a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} a^{n-i} b^{i+1},$$

daher

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{n}{i+1} + \binom{n}{i} \right) a^{n-i} b^{i+1} + b^{n+1}.$$

Die Behauptung folgt aus der Additionseigenschaft des Binomialkoeffizienten in Lemma 1.6.

2.3 Die geometrische Summenformel Die *geometrische Summenformel* lautet für $q \neq 1$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Man beweist sie, in dem man den „Teleskopeffekt“ beachtet,

$$\sum_{i=0}^{n} q^i (1-q) = \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=0}^{n} q^{i+1} = 1 - q^{n+1}.$$

2.4 Angeordneter Körper Sei K ein Körper und „$<$“ eine zweistellige Relation. K mit der Relation $<$ heißt *angeordneter Körper*, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(A1) Trichotomiegesetz: Für beliebige $a, b \in K$ gilt genau eine der Beziehungen $a < b$, $b < a$ oder $a = b$.

(A2) Transitivitätsgesetz: Ist $a < b$ und $b < c$, so gilt $a < c$.

(A3) Monotoniegesetze: Ist $a < b$, so folgt

$$a + c < b + c \text{ für jedes } c, \quad ac < bc \text{ für jedes } c > 0.$$

Wir schreiben $a > b$, wenn $b < a$, sowie $a \leq b$, wenn $a < b$ oder $a = b$. Wir sprechen von positiven oder negativen a, wenn $a > 0$ beziehungsweise $a < 0$ gilt. Auch hier wollen wir die bekannten Rechenregeln für die Ordnung $<$ aus den Axiomen herleiten:

(i) $a < b \iff -b < -a$

(ii) Es gilt

$$ab > 0 \iff a, b > 0 \text{ oder } a, b < 0.$$

Insbesondere ist $a^2 > 0$ für $a \neq 0$ sowie $1 = 1^2 > 0$.

(iii) Ist $a < b$, so gilt $ac > bc$ für $c < 0$.

Die Beweise lassen sich auch hier leicht führen. Auf $a < b$ wenden wir zweimal das erste Monotoniegesetz an, es gilt dann $a - b < b - b = 0$ sowie $-b = a - b - a < -a$. Für den Beweis von (ii) sei zunächst $ab > 0$. Wegen $a \cdot 0 = 0$ müssen dann beide Faktoren ungleich Null sein. Angenommen, $a > 0$ und $b < 0$. Dann ist nach (i) $-b > 0$ und nach dem zweiten Monotoniegesetz $-ab > 0$ im Gegensatz zu $ab > 0$. Die umgekehrte Richtung folgt aus dem Monotoniegesetz und $(-a)(-b) = ab$.

Kommen wir nun zu (iii). Nach (i) gilt $-c > 0$ und nach dem Monotoniegesetz daher $-ac < -bc$. Wiederum nach (i) folgt $ac > bc$.

2.5 Ganze und rationale Zahlen Kombinieren wir $1 > 0$ mit dem ersten Monotoniegesetz, so erhalten wir $0 < 1 < 1+1 < \dots$. Wir können diese Folge mit den natürlichen Zahlen identifizieren, also $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ für jeden angeordneten Körper $\mathbb{K}$. Mit $n \in K$ ist auch $-n \in K$, womit auch die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in K sind. Ferner ist $m/n \in K$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Damit finden wir auch den aus ganzzahligen Brüchen bestehenden Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen in jedem angeordneten Körper wieder. Gleichzeitig ist $\mathbb{Q}$ der minimale angeordnete Körper wie wir oben gesehen haben. Wir können also die Grundrechenarten innerhalb von $\mathbb{Q}$ uneingeschränkt ausführen, trotzdem lässt $\mathbb{Q}$ noch einige Wünsche offen:

Satz Es gibt keine rationale Zahl r mit $r^2 = 2$.

Beweis: Angenommen, für teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$ wäre $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Dann folgt $m^2 = 2n^2$. Da die rechte Seite durch 2 teilbar ist, muß auch die linke durch 2 teilbar sein, also $m = 2k$ und $4k^2 = 2n^2$. In dieser Identität kann durch 2 geteilt werden, $2k^2 = n^2$. Mit der gleichen Argumentation wie vorher folgt, dass auch n durch 2 teilbar ist. Da m und n durch 2 teilbar sind, erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme, dass m und n teilerfremd sind. $\Box$

Später werden wir sehen, dass im Körper der reellen Zahlen die Gleichung $a^2 = 2$ eine eindeutige positive Lösung besitzt.

2.6 Beschränkte Mengen, Infimum und Supremum Eine Teilmenge A in einem angeordneten Körper heißt *nach unten (oben) beschränkt*, wenn es ein $\xi \in K$ gibt mit $\xi \leq a$ ($\xi \geq a$) für alle $a \in A$. ξ heißt in diesem Fall *untere (obere) Schranke* von A. Ist die Menge A sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt, so heißt A *beschränkt*.

ξ heißt *größte untere Schranke* von A oder *Infimum* von A, wenn für jede andere untere Schranke ξ' gilt $\xi' \leq \xi$. Entsprechend heißt ξ *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von A, wenn für jede andere obere Schranke ξ' gilt $\xi' \geq \xi$. In diesen Fällen schreiben wir $\xi = \inf A$ beziehungsweise $\xi = \sup A$. Gehört ein Infimum (Supremum) selber zu A, so heißt es *Minimum (Maximum)*.

Infimum und Supremum einer Menge A sind eindeutig bestimmt, denn wären beispielsweise ξ und η Infima, so würde aufgrund der Definition sowohl $\xi \leq \eta$ als auch $\eta \leq \xi$ gelten, was wegen des Trichotomiegesetzes $\xi = \eta$ impliziert.

Beispiel Wir bestimmen Infimum und Supremum der Menge

$$M = \left\{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \leq 2\right\}$$

und untersuchen, ob M Minimum und Maximum besitzt. Aus $(x-1)^2 \geq 0$ folgt für $x > 0$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Da der Wert 2 für $x = 1$ angenommen wird, ist das Infimum 2 auch Minimum. Für $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ gilt

$$\left|x - \frac{5}{4}\right| \leq \frac{3}{4}$$

und nach Quadrieren und Division durch x folgt

$$x + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{2}.$$

Damit ist das Supremum $\frac{5}{2}$, das für $x = 2$ angenommen wird. $\frac{5}{2} \in M$ ist daher auch das Maximum von M.

2.7 Das Vollständigkeitsaxiom Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Ist zusätzlich noch

(V) Vollständigkeitsaxiom: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

erfüllt, so heißt $\mathbb{K}$ der *Körper der reellen Zahlen* und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Der Leser hat vielleicht bemerkt, dass im Gegensatz zu den bisherigen Definitionen die letzte auch eine Aussage enthält, dass nämlich der Körper $\mathbb{R}$ *eindeutig* durch die Axiome festgelegt wird. Zur Präzisierung dieser Aussage sind leider umfangreiche Vorbereitungen notwendig, die sich bis in das 3. Kapitel erstrecken.

Im Körper $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht, denn wir hatten bereits in Abschnitt 2.5 gesehen, dass $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung besitzt. Damit hat die nach oben beschränkte Menge $M = \{x : \ x^2 < 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$. Wie wir später sehen werden, enthält $\mathbb{R}$ neue Zahlen wie eben $\sqrt{2}$, die wir *irrationale Zahlen* nennen.

2.8 Das Archimedische Prinzip Archimedes hat als erster den Satz formuliert, dass es zu jeder reellen Zahl a eine natürliche Zahl n mit $a < n$ gibt.

Satz (a) Es gibt keine reelle Zahl a mit $n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zu reellen Zahlen a, b mit $a > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < an$.

(c) Zu reellen Zahlen a, b mit $a < b$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a + \frac{1}{n} < b$.

(d) Ist $a \geq 0$ eine reelle Zahl mit $a \leq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a = 0$.

(e) Zu zwei reellen Zahlen mit $a < b$ gibt es eine rationale Zahl r mit $a < r < b$.

Beweis: (a) Wäre die Menge der natürlichen Zahlen beschränkt, so würde nach dem Vollständigkeitsgesetz $\xi = \sup \mathbb{N}$ existieren. Nach Definition des Supremums gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi - 1 < n$, was wegen $\xi < n + 1$ einen Widerspruch ergibt.

(b) Wegen (a) existiert $n > \frac{b}{a}$.

(c) Wegen (a) existiert $n > \frac{1}{b-a}$.

(d) Wäre $a > 0$, so wäre $n < \frac{1}{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu (a).

(e) Ist $a < 0$, so können wir durch Addition einer natürlichen Zahl die Situation $a > 0$ herstellen. Sei also $0 < a < b$. Nach (b) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(b - a) > 1$, also $0 < \frac{1}{n} < b - a$. Nach (a) gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > na$, also $\frac{m}{n} > a$. Die Menge

$$\left\{m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} > a\right\}$$

ist daher nichtleer und besitzt ein kleinstes Element k, für das

$$a < \frac{k}{n}, \quad a \geq \frac{k-1}{n}$$

gilt. Wäre $\frac{k}{n} \geq b$, so

$$\frac{k-1}{n} \geq b - \frac{1}{n} > b - (b - a) = a,$$

was einen Widerspruch bedeutet. □

Für die Eigenschaft (e) sagt man auch: Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$. Denn aus (e) folgt auch, dass man eine Irrationalzahl a durch rationale Zahlen beliebig genau approximieren kann. Auch die Irrationalzahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$. Zu reellen Zahlen Zahlen $a < b$ finden wir nach (e) eine rationale Zahl r mit $a < r < b$. Für genügen großes $n \in \mathbb{N}$ liegt auch die Irrationalzahl $r + \sqrt{2}/n$ zwischen a und b.

2.9 Die n-te Wurzel **Satz** Ist $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so besitzt die Gleichung $x^n = a$ genau eine reelle Lösung x mit $x \geq 0$. Diese Lösung wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet und die *n-te Wurzel* aus a genannt.

Bemerkung Man beachte, dass wir die Wurzel nur aus nichtnegativen Zahlen ziehen und dass diese Wurzel eine nichtnegative Zahl ist, obwohl $(-2)^2 = 4$ und $(-3)^3 = -27$. Dies geschieht auch aus Bequemlichkeit, um die ansonsten notwendige Fallunterscheidung zu vermeiden, ob n gerade oder ungerade ist.

Beweis: Da die Fälle $n = 1$ oder $a = 0$ klar sind, setzen wir $n \geq 2$ und $a > 0$ voraus. Die Teilmenge von $\mathbb{R}$

$$M = \{x \geq 0 : x^n \leq a\}$$

ist nichtleer, weil sie die Null enthält, und nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsgesetz besitzt sie daher ein Supremum ξ. Durch einen indirekten Beweis zeigen wir, dass $\xi^n = a$.

Angenommen, $\xi^n < a$. Für $m \in \mathbb{N}$ folgt aus der binomischen Formel

$$(\xi + \frac{1}{m})^n \leq \xi^n + \frac{b}{m}, \quad \text{mit } b = \binom{n}{1}\xi^{n-1} + \binom{n}{2}\xi^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

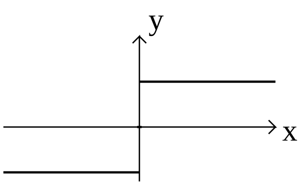
Wegen $\xi^n < a$ folgt aus dem Archimedischen Prinzip, dass $(\xi + \frac{1}{m})^n < a$ für genügend großes m, daher $\xi + \frac{1}{m} \in M$ und ξ ist gar nicht das Supremum von M.

Angenommen, $\xi^n > a$. Dann folgt für genügend großes m aus der Bernoulli-Ungleichung

$$(\xi - \frac{1}{m})^n = \xi^n(1 - \frac{1}{\xi m})^n \geq \xi^n(1 - \frac{n}{\xi m}).$$

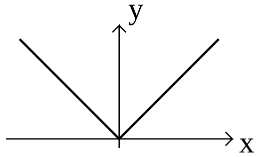
Für genügend großes m ist daher $(\xi - \frac{1}{m})^n > a$. Daher gibt es noch eine kleinere obere Schranke als ξ, also ist ξ gar nicht das Supremum von M. Widerspruch! □

2.10 Vorzeichen und Betrag Zu einer reellen Zahl heißt



$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -1 & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

das *Vorzeichen* (=Signum) von a. Ferner heißt $|a| = a \operatorname{sgn} a$ oder



$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

der *Betrag* von a.

Der Betrag hat die drei grundlegenden Eigenschaften

(i) Für $a \neq 0$ ist $|a| > 0$.

(ii) Es gilt $|ab| = |a|\,|b|$.

(iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung).

Die Beweise von (i) und (ii) folgen direkt aus der Definition. (iii) ergibt sich aus $\pm a \le |a|$, $\pm b \le |b|$ und dem Monotoniegesetz,

$$a + b \le |a| + |b|, \quad -(a + b) \le |a| + |b|.$$

Wir notieren noch die *umgekehrte Dreiecksungleichung*

(iv) $|a - b| \ge ||a| - |b||$,

die aus

$$|a| = |a - b + b| \le |a - b| + |b|, \quad |b| = |b - a + a| \le |a - b| + |a|$$

folgt.

2.11 Intervalle Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man nennt

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$	abgeschlossenes Intervall
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$	(nach rechts) halboffenes Intervall
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$	(nach links) halboffenes Intervall

Unbeschränkte Intervalle werden mit Hilfe der Symbole ∞ und $-\infty$ definiert. Für $a \in \mathbb{R}$ heißen die Mengen

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

offene und die Mengen

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$$

abgeschlossene Intervalle. Die Menge $\mathbb{R}$ wird auch als Intervall $(-\infty, \infty)$ angesehen und sowohl als offen als auch als abgeschlossen definiert.

Die positiven reellen Zahlen werden mit $\mathbb{R}_+$, die negativen mit $\mathbb{R}_-$ bezeichnet. Die Mengen $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ und $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$ sind demnach offene Intervalle.

Das Symbol ∞ für unendlich wird in der Analysis häufig benutzt, allerdings immer in einem genau präzisierten Sinn. Das Intervall (a, ∞) ist nur die Kurzbezeichnung für die angegebene Punktmenge, weitreichende philosophische Gedanken wie beispielsweise „der Zahlcharakter des Unendlichen“ oder „die Inkommensurabilität des Unendlichen“ sollte man sich nicht machen.

Dagegen ist die Bezeichnung „offen“ für eine Teilmenge der reellen Zahlen grundlegend für die Analysis. Für $a \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge

$$B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

als ε-*Umgebung* von a. Jede Menge, die ein $B_\varepsilon(a)$ enthält, wird als *Umgebung* von a bezeichnet. Genau die offenen Intervalle haben die Eigenschaft, dass sie Umgebung für jeden ihrer Punkte sind. Beispielsweise ist das Intervall $[a, b)$ nicht offen, weil für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(a) \not\subset [a, b)$.

2.12 Das Rechnen mit reellen Zahlen **Beispiel 1** Wir bestimmen die Menge

$$M = \big\{x \in \mathbb{R} : \frac{x + 4}{x - 2} < x\big\}.$$

Um den Bruch umzuformen, unterscheiden wir die Fälle $x > 2$ und $x < 2$,

$$M = M_1 \cup M_2, \quad M_1 = \{x > 2 : \; 0 < x^2 - 3x - 4\}, \quad M_2 = \{x < 2 : \; 0 > x^2 - 3x - 4\}.$$

Mit $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$ folgt dann

$$M_1 = \{x > 4\}, \quad M_2 = \{-1 < x < 2\}, \quad M = (4, \infty) \cup (-1, 2).$$

Beispiel 2 Für $a, b > 0$ wollen wir die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

beweisen. Bevor man solche Ungleichungen in seitenweisen Rechnungen umformt, sollte man sie zu vereinfachen suchen. In diesem Fall ist es naheliegend, beide Seiten durch $\sqrt{b}$ zu teilen, was zu einer äquivalenten Ungleichung in $x = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ führt,

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq x + 1, \quad x > 0.$$

Auf diese Weise sind wir sowohl eine Variable als auch die Wurzel losgeworden. In dieser Gleichung dürfen wir sogar $x \geq 1$ annehmen, denn andernfalls teilen wir die Ausgangsungleichung durch $\sqrt{a}$. Wir setzen nun $x = 1 + y$ mit $y \geq 0$ und erhalten mit Hilfe der binomischen Formel

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - (y^2 + 2y + 1) - (y + 1) + 1 \\ &= y^3 + 2y^2 + y \geq 0. \end{aligned}$$

Damit ist die behauptete Ungleichung bewiesen.

Beispiel 3 (Youngsche Ungleichung) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$\left(\sqrt{\varepsilon} a \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} b\right)^2 \geq 0$$

und es folgt die *Youngsche Ungleichung*

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

Aufgaben

2.1 (2) Man bestimme Supremum und Infimum der folgenden Mengen und prüfe, ob diese Mengen ein Minimum oder ein Maximum besitzen:

a) $\left\{ \frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$, b) $\left\{ \frac{x}{1+x} : x > -1 \right\}$.

2.2 (2) Zur Menge

$$M = \{2^{-m} + n^{-1} : m, n \in \mathbb{N}\}$$

ermittle man gegebenenfalls Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

2.3 (3) Für natürliche Zahlen k, n ist $\sqrt[k]{n}$ entweder eine natürliche Zahl oder irrational.

2.4 (1) Sei $a \neq 0$ rational, b irrational. Ist $a + b$ irrational? Ist ab irrational?

2.5 (2) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

a) $|3 - 2x| < 5$ b) $\left|\frac{x+4}{x-2}\right| < x$, c) $x(2 - x) > 1 + |x|$,

d) $|2x| > |5 - 2x|$, e) $\frac{1}{x + |x-1|} < 2$.

2.6 (3) Man leite die für jedes $\varepsilon > 0$ gültigen Ungleichungen

$$2|ab| \le \varepsilon^2 a^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} b^2, \quad (a+b)^2 \le (1+\varepsilon^2)a^2 + \big(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\big)b^2$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ ab. Wann besteht (bei gegebenem ε) Gleichheit?

2.7 (3) Für positive a, b, c, d mit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ zeige man:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

2.8 (2) Zeigen Sie, dass für $x > 0$ gilt

$$\frac{1}{2}\big(x + \frac{1}{x}\big) \ge 1.$$

2.9 (3) Man zeige (jeweils für $n > 1$):

a) $(x_1 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \ge n^2$ für $x_i > 0$,

b) $(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) > 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ für $x_i > 0$,

c) $(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n) > 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n$ für $x_i \in (0, 1)$.

2.10 (3) Man zeige: Für positive Zahlen a, b, c, d gilt

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \ge \sqrt{ac} + \sqrt{bd}.$$

3 Folgen

3.1 Definition und Beispiele Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt *(reelle) Zahlenfolge.* Statt $a(n)$ schreiben wir kürzer a_n und bezeichnen die ganze Folge mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder einfach (a_n), was aber nicht darüber hinwegtäuschen soll, dass unsere Zahlenfolgen immer unendlich viele Folgenglieder besitzen. Eher als die konkreten Werte der a_n interessiert uns das Verhalten der Folge für große n.

Beispiele (i) $a_n = n$ oder $(a_n) = (1, 2, 3, \ldots)$ ist die Folge der natürlichen Zahlen, deren Folgenglieder beliebig groß werden.

(ii) $a_n = 1/n$ oder $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ ist eine Folge, deren Glieder der Null beliebig nahe kommen.

(iii) Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ oder $(a_n) = (0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots)$ wechselt nach dem ersten Folgenglied das Vorzeichen, Man sagt auch: Die Folge alterniert. Für große n wechselt sie zwischen Werten, die nahe bei ± 1 liegen.

3.2 Beschränkteit und Konvergenz von Zahlenfolgen Die Folge heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl M gibt mit $|a_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. An sich ist der Wertebereich M_a der Folge (a_n), nämlich

$$M_a = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

deutlich von der Folge zu unterscheiden, weil es bei der Folge auch auf die Reihenfolge der Folgenglieder ankommt. Im Fall der Beschränktheit verhalten sich beide Begriffe gleich: Die Folge (a_n) ist genau dann beschränkt wenn der Wertebereich M_a eine beschränkte Menge ist. Da endliche Mengen reeller Zahlen immer beschränkt sind, sind auch Folgen mit nur endlich vielen Werten beschränkt. Von den Beispielfolgen im letzten Abschnitt sind die Folgen (ii) und (iii) durch 2 beschränkt. Die Folge der natürlichen Zahlen in (i) ist ein Beispiel für eine unbeschränkte Folge.

Eine Folge (a_n) ist genau dann *konvergent gegen* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, das von ε abhängen darf, so daß für alle $n \ge N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. In diesem Fall heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \ \text{ für } n \to \infty.$$

Formal kann man die Definition der Konvergenz so schreiben:

$$a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Wir können uns den schwierigen Konvergenzbegriff auf vielfältige Weise verdeutlichen. Wir sagen, eine Eigenschaft trifft für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ zu, wenn sie für alle bis auf endlich viele n zutrifft. Die Eigenschaft, größer als 100 zu sein, trifft für fast alle natürlichen Zahlen zu, aber die Eigenschaft, geradzahlig zu sein, trifft nicht auf fast alle natürlichen Zahlen zu. Wir erinnern auch an die Definition der ε-Umgebung der reellen Zahl a, das ist die Menge $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x : |x - a| < \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$.

Die folgenden Aussagen sind zu $a_n \to a$ äquivalent.

(i) Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{1}{m}$ für alle $N \ge N$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Folgenglieder in $B_\varepsilon(a)$

Beweis von (i): Aus $a_n \to a$ folgt (i). Sei also umgekehrt (i) erfüllt und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} \le \varepsilon$. Für dieses m bekommen wir aus (i) ein N und für alle $n \ge N$ gilt $|a_n - a| < \frac{1}{m} \le \varepsilon$.

Beweis von (ii): $a_n \in B_\varepsilon(a)$ ist gleichbedeutend mit $|a_n - a| < \varepsilon$. Gilt dies für fast allen n, so gilt es für eine endliche Menge $M \subset \mathbb{N}$ nicht. Endliche Mengen haben ein maximales Element, nennen wir es hier $N - 1$. Damit gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$.

Beispiel Für die Folge

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

erhalten wir

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq N$ gilt dann $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Damit liegen in jedem $B_\varepsilon(2)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder und $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

3.3 Häufungspunkte von Folgen

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ in jedem $B_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen.

Beispiel Sei $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Wegen $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ gilt $|a_{2n} - 1| \leq \frac{1}{2n}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher unendlich viele Folgenglieder, die in $B_\varepsilon(1)$ liegen. Damit ist 1 Häufungspunkt der Folge. Genauso erhält man mit $a_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$, daß auch -1 Häufungspunkt der Folge ist. Einen Grenzwert besitzt die Folge nicht, weil weder in $B_1(1)$ noch in $B_1(-1)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

Satz (a) Existiert der Grenzwert einer Folge, so ist er eindeutig bestimmt.

(b) Eine konvergente Folge ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert der Folge.

Beweis: (a) Angenommen, für eine Folge (a_n) gilt $\lim_{n\to\infty} = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ mit $a \neq b$. Für $0 < \varepsilon = |a-b|/2$ sind $B_\varepsilon(a)$ und $B_\varepsilon(b)$ disjunkt und können demnach nicht beide alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthalten.

(b) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so wählen wir in der Definition der Konvergenz $\varepsilon = 1$. Damit genügen alle bis auf endlich viele Folgenglieder der Abschätzung $|a_n| < |a| + 1$. Die übrigen Folgenglieder bilden eine endliche Menge. Endliche Mengen sind immer beschränkt.

Besitzt eine Folge mehr als einen Häufungspunkt, so können wir zwei Häufungspunkte mit dem Argument aus (a) duch ε-Umgebungen trennen. In jeder ε-Umgebung liegen dann unendlich viele Folgenglieder, was die Konvergenz der Folge ausschließt. □

Die Begriffe Grenzwert, Häufungspunkt und Beschränktheit hängen nicht von endlichen Abschnitten der Folge ab. Lassen wir endlich viele Folgenglieder weg oder fügen endlich viele Folgenglieder hinzu, so ändert das nichts an ihrem Grenzwert, an ihren Häufungspunkten oder an ihrer Beschränktheit.

3.4 Verträglichkeit mit den arithmetischen Operationen

Satz Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ und, falls $b_n, b \neq 0$, auch (a_n/b_n) konvergent und es gilt

$$a_n + b_n \;\to\; a+b, \quad a_n b_n \;\to\; ab, \quad \frac{a_n}{b_n} \;\to\; \frac{a}{b} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Definition der Konvergenz gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$ und $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_2$. Für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ sind dann beide Ungleichungen erfüllt. Für diese n folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon.$$

Damit liegen in jeder Umgebung $B_{2\varepsilon}(a+b)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder, also $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Da eine konvergente Folge beschränkt ist, gilt $|b_n| \le M$. Aus der Dreiecksungleichung folgt für $n \ge \max\{N_1, N_2\}$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \le |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab|$$
$$\le M|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| < (M + |a|)\varepsilon,$$

was $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$ impliziert.

Für die Konvergenz des Quotienten genügt es $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$ nachzuweisen. Die Aussage folgt dann aus der Konvergenz des Produkts. Zu $\varepsilon = |b|/2$ gibt es ein N_3 mit

$$|b_n| = |b - b + b_n| \ge |b| - |b - b_n| > |b| - |b|/2 = |b|/2$$

für alle $n \ge N_3$. Für $n \ge \max\{N_1, N_2, N_3\}$ gilt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| \le \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$. □

Beispiel Den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{2n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 1} = \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}}$$

können wir leicht mit diesem Satz bestimmen, weil Zähler und Nenner gegen 2 bzw. 1 konvergieren, also $a_n \to 2$.

3.5 Grenzwerte wichtiger Folgen Nun bestimmen wir die Grenzwerte einiger prominenter Folgen. Für die geometrische Folge $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$ gilt

$$q^n \to 0 \text{ falls } |q| < 1, \quad |q|^n \text{ ist unbeschränkt für } |q| > 1.$$

Ist nämlich $|q| = 1 + x$ mit $x > 0$, so folgt aus der Bernoulli-Ungleichung

$$|q|^n \ge 1 + nx.$$

Ist dagegen $|q| < 1$, so ist aufgrund der letzten Abschätzung $|q|^{-n} \ge 1 + nx$, also $|q|^n \le 1/(1 + nx) \to 0$.

Man kann das letzte Beispiel noch verschärfen. Es gilt für beliebiges, aber fest gewähltes $m \in \mathbb{N}$

(3.1) $$\lim_{n\to\infty} n^m q^n = 0 \text{ falls } |q| < 1.$$

Anschaulich bedeutet dies, daß q^n „schneller“ gegen Null konvergiert als n^m gegen unendlich geht. Der Beweis ist mit unseren bisherigen Mitteln nur sehr aufwendig zu erbringen und wird noch zurückgestellt (siehe 4.4).

Es gilt

(3.2) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

für jede reelle Zahle $a > 0$. Für den Beweis sei zunächst $a \ge 1$. Dann ist $b_n = \sqrt[n]{a} - 1 \ge 0$ und aus der Bernoulli-Ungleichung folgt

$$a = (1 + b_n)^n \ge 1 + nb_n.$$

Damit $b_n \leq (a-1)/n \to 0$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Für $0 < a < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{-1}} = 1$ und nach Satz 3.4 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1/1 = 1$.

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Analog zum vorigen Fall setzen wir $b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Mit der binomischen Formel folgt

$$n = (1 + b_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} b_n^2,$$

für $n \geq 2$ also $b_n^2 \leq 2/n \to 0$ und $b_n \to 0$. Aufgrund von Satz 3.4 gilt für fest gewähltes $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^m} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \ldots \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{3.3}$$

3.6 Konvergenz monotoner Folgen Wir bezeichnen ein Folge (a_n) als *monoton wachsend (fallend)*, wenn für alle n die Bedingung $a_n \leq a_{n+1}$ bzw. $a_n \geq a_{n+1}$ erfüllt ist. Eine Folge heißt *streng monoton wachsend* oder *fallend*, wenn für alle n die strikte Ungleichung erfüllt ist. Konvergiert eine monoton wachsende Folge (a_n) gegen a, so schreiben wir $a_n \nearrow a$, konvergiert sie monoton fallend, so $a_n \searrow a$.

Satz Eine beschränkte, monoton wachsende oder fallende Folge ist konvergent.

Beweis: Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Dann ist die zugehörige Menge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und besitzt ein Supremum a, für das also $a_n \leq a$ gilt. Aus der Definition des Supremums folgt, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_N + \varepsilon \geq a$, denn andernfalls wäre $a - \varepsilon$ ebenfalls eine obere Schranke. Da die Folge monoton wachsend ist, gilt $0 \leq a - a_n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und somit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Beispiel Dieser Satz wird häufig verwendet, um die Konvergenz rekursiv definierter Folgen nachzuweisen. Als ein Beispiel betrachten wir die Folge

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad a_0 = 0.$$

Durch Induktion über n zeigen wir, daß die Folge streng monoton wachsend ist. Der Induktionsanfang $a_1 > a_0$ ist richtig. Ist $a_n > a_{n-1}$, so $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n$.

Ebenfalls durch Induktion wird bewiesen, daß die Folge durch 3 nach oben beschränkt ist. Für a_0 ist das richtig. Gilt $a_n < 3$, so ist $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3$.

Damit haben wir gezeigt, daß die Folge konvergiert. Der Grenzwert kann mit einer Methode bestimmt werden, die in Kapitel 5 erläutert wird.

3.7 Teilfolgen Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Für eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Eine Teilfolge besteht ebenfalls aus unendlich vielen Elementen und ist daher selber eine Folge.

Beispiel Kehren wir zur Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ zurück. Mit $n_k = 2k$ ist $a_{n_k} = 1 + \frac{1}{2k}$ eine Teilfolge, die gegen 1 konvergiert. Durch Auswahl einer Teilfolge können wir in diesem Beispiel einen Häufungspunkt zum Grenzwert der Teilfolge machen. Daß dies immer möglich ist, zeigt der folgende Satz.

Satz Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit einem Häufungspunkt a. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Beweis: Wir bestimmen die Folgenglieder a_{n_k} induktiv. Seien $a_{n_1}, \ldots a_{n_k}$ mit $(n_i)_{i=1,\ldots,k}$ streng monoton wachsend bereits konstruiert. Zu $\varepsilon = 1/(k+1)$ liegen in $B_{1/(k+1)}(a)$ unendlich viele Folgenglieder. Aus diesen wählen wir ein beliebiges $a_{n_{k+1}}$ mit $n_{k+1} > n_k$ aus. Dann gilt $|a_{n_{k+1}} - a| < 1/(k+1)$, woraus $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ folgt. □

3.8 Der Satz von Bolzano-Weierstraß **Satz** Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt. Insbesondere enthält jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge. Ferner besitzt eine beschränkte Folge einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

Beweis: Sei $a_n \in (c, d)$ für alle n. Die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R} : a_n > x \text{ für höchstens endlich viele } n\}$$

ist nichtleer, weil $d \in M$, und sie ist nach unten beschränkt durch c. Wir zeigen nun, daß $a = \inf M$ ein Häufungspunkt und zwar der größte Häufungspunkt ist. Nach Definition des Infimums ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ $a + \varepsilon \in M$ und $a - \varepsilon \notin M$. Es gibt daher höchstens endlich viele Folgenglieder mit $a_n > a + \varepsilon$ und es gibt unendlich viele Folgenglieder mit $a_n > a - \varepsilon$. Daher ist a Häufungspunkt. Angenommen, es gibt einen weiteren Häufungspunkt $b > a$. Dann wählt man einen Punkt ξ zwischen a und b. Da oberhalb von ξ nur endlich viele Folgenglieder liegen, kann b kein Häufungspunkt sein. □

3.9 Das Cauchy-Kriterium Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

Wie wir gleich sehen werden, ist eine Folge genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Dennoch ist der Begriff der Cauchy-Folge oft nützlich, weil in ihrer Definition der Grenzwert der Folge nicht vorkommt.

Satz Ein Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis: Sei $a_n \to a$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für $m, n \geq N$ folgt dann aus der Dreieckungleichung

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < 2\varepsilon.$$

Ist umgekehrt (a_n) eine Cauchy-Folge, so wählen wir in der Definition der Cauchy-Folge $\varepsilon = 1$ und erhalten für alle n größer gleich dem zugehörigen N

$$|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Die Cauchy-Folge ist damit beschränkt,

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge daher eine konvergente Teilfolge $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$. Wir zeigen, dass die gesamte Folge gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ und wegen der Konvergenz der Teilfolge ein $n_k \geq N$ mit $|a - a_{n_k}| < \varepsilon$. Aus der Dreicksungleichung folgt dann für alle $n \geq N$

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

und damit die Konvergenz der gesamten Folge gegen a. □

3.10 Limes superior, Limes inferior und bestimmte Divergenz Wir bezeichnen den größten Häufungspunkt a^* einer beschränkten Folge (a_n) als *Limes superior* und den kleinsten Häufungspunkt a_* als *Limes inferior* der Folge und schreiben

$$a^* = \limsup_{n\to\infty} a_n, \quad a_* = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Das Verhalten unbeschränkter Folgen soll im folgenden weiter präzisiert werden. Eine Folge (a_n) *divergiert bestimmt gegen unendlich*, Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, wenn es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein

$N \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \geq M$ für alle $n \geq N$. Die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ ist analog definiert. Beispielsweise gilt $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, aber $b_n = (-1)^n n$ divergiert nicht bestimmt.

Diese Begriffsbildung läßt sich auch auf Häufungspunkte übertragen. Wir sagen, daß eine Folge (a_n) den *uneigentlichen Häufungspunkt* ∞ hat, wenn eine Teilfolge von (a_n) bestimmt gegen ∞ divergiert. Dies ist äquivalent zur Bedingung: Zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in N$ mit $a_n \geq M$. Ferner schreiben wir in diesem Fall auch $\limsup a_n = \infty$.

Aufgaben

3.1 Man untersuche das Konvergenzverhalten und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert der Folge (a_n).

a) (3) $\quad a_n = \dfrac{n^3}{\binom{2n}{n}}$, $\qquad$ b) (4) $\quad a_n = \displaystyle\prod_{\nu=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)$, $\qquad$ c) (4) $\quad a_n = \sqrt{n}(\sqrt[n]{n} - 1)$,

d) (3) $\quad a_n = \dfrac{3^n - 5n^3 + 1}{2 \cdot 3^n + n^5 + n^2}$, $\qquad$ e) (2) $\quad a_n = (-1)^n \dfrac{n+2}{2n^2 - 1}$.

3.2 (3) Man berechne im Konvergenzfall den Grenzwert der Folge (a_n) :

a) $a_n = \dfrac{x^n - n}{x^n + n}$, $\quad x \in \mathbb{R}_+$, $\qquad$ b) $a_n = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$, $\quad k \in \mathbb{N}$.

3.3 (3) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $A(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$ das arithmetische Mittel der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$.

a) Man zeige, daß aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} A(a_1, \ldots, a_n) = a$.

b) Man gebe eine divergente Folge an, für welche die zugehörige Folge der arithmetischen Mittel konvergiert. Ferner gebe man eine beschränkte divergente Folge an, für die die Folge der arithmetischen Mittel ebenfalls divergiert.

3.4 (3) Mit einer beliebigen positiven Zahl a, etwa $a = 10^{100}$, seien

$$a_n = \sqrt{n^2 + a} - n, \quad b_n = \sqrt{n^2 + n} - n, \quad c_n = \sqrt{n^2 + \frac{n^2}{a}} - n.$$

Dann gilt: $a_n > b_n > c_n$ für $1 \leq n \leq a$, aber

$$a_n \to 0, \quad b_n \to \frac{1}{2}, \quad c_n \to \infty \ \text{ für } n \to \infty.$$

3.5 (3) Man gebe Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_n \to \infty$ und $b_n \to 0$ an, so daß gilt:

a) $a_n b_n \to c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben ist.

b) Die Folge $(a_n b_n)$ ist beschränkt, konvergiert aber nicht.

3.6 Welche der nachstehenden, bei $n = 1$ beginnenden Folgen sind (streng) monoton?

a) (2) $\quad n^2 + (-1)^n$, $\qquad$ b) (3) $\quad n^4 - 2n^3$, $\qquad$ c) (3) $\quad n^{1-n}$,

d) (3) $\quad n + \sqrt{a + \dfrac{1}{n^2}}$ $(a > 0)$, $\qquad$ e) (3) $\quad n\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}}$.

3.7 Man konstruiere eine Zahlenfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die jede reelle Zahl als Häufungspunkt hat.

3.8 (1) Von der Folge (a_n) sei bekannt, daß die Teilfolgen (a_{2n}), (a_{2n+1}) und (a_{3n}) konvergieren. Konvergiert dann (a_n) selbst (Beweis oder Gegenbeispiel)?

3.9 (3) Man zeige: Für $0 \leq a \leq b \leq c$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c$. Man formuliere und beweise den entsprechenden Sachverhalt für p Zahlen $a_1, \ldots, a_p \geq 0$.

3.10 (3) Man zeige: Jede Folge besitzt eine monotone Teilfolge.

4 Unendliche Reihen

4.1 Definition und Beispiele Ein altes Problem der Analysis ist es, einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit reellen Zahlen a_n einen „Wert" zuzuordnen. Ein typisches Beispiel ist die unendliche Reihe $1-1+1-1+\ldots$, die der Theologe Giordano Bruno als Modell für die Erschaffung der Welt aus dem Nichts angesehen hat: Wir erhalten $(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$, aber auch $1-(1-1)-(1-1)-\ldots = 1$. Bruno ist später als Ketzer verbrannt worden, aber nicht deshalb.

Diese Konfusion hat sich erledigt, weil wir der Reihe die *Folge der Partialsummen* zuordnen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen s, so nennen wir die Reihe *konvergent* mit Grenzwert s und schreiben $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Konvergiert die Folge (s_n) nicht, so sagen wir, dass die Reihe divergiert. Im obigen Beispiel ist $(s_n) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ und die Reihe ist nicht konvergent.

Divergiert (s_n) bestimmt gegen unendlich, so schreiben wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

So wie eine Reihe eine Folge erzeugt, kann man einer Folge (s_n) auch eine Reihe zuordnen, nämlich

$$a_1 = s_1,\ a_2 = s_2 - s_1,\ a_3 = s_3 - s_2,\ \ldots$$

Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum a_n$ ist also gerade (s_n). Die Begriffe „Reihe" und „Folge" sind damit vollständig äquivalent. Aus Satz 3.4 erhält man insbesondere, dass die Summe zweier konvergenter Reihen wieder konvergent ist. Das Produkt zweier Reihen wird später betrachtet.

Es dürfte klar sein, dass man das Konvergenzverhalten einer Reihe nicht ändert, wenn man endlich viele Reihenglieder weglässt oder hinzufügt. Die Konvergenztheorie von Reihen der Form $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hängt daher nicht von k ab.

Fundamental ist die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, für deren Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach der geometrischen Summenformel

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1$$

gilt. Daher ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{für } |q| < 1 \\ \infty & \text{für } q \geq 1 \end{cases}$$

Eine prominentes Beispiel für eine bestimmt divergente Reihe ist die *harmonische Reihe*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots \end{aligned}$$

Damit gilt für die Folge der Partialsummen $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ und die Reihe divergiert bestimmt.

Notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist, dass die (a_n) eine Nullfolge bilden, denn die Partialsummen können höchstens dann konvergieren, wenn $|s_n - s_{n+1}| \to 0$. Das letzte Beispiel zeigt aber auch, dass diese Bedingung nicht hinreichend ist.

4.2 Alternierende Reihen Ist eine Reihe *alternierend*, haben also die Reihenglieder wechselndes Vorzeichen, so gilt:

Satz (Leibniz-Kriterium) Sind die Reihenglieder von der Form $a_n = (-1)^n b_n$ und ist (b_n) eine streng monoton fallende Nullfolge, so ist die Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergent und für den Reihenrest gilt

$$r_l = \sum_{n=l+1}^{\infty} a_n = \theta a_{l+1} \quad \text{mit } 0 < \theta < 1.$$

Bemerkung Der Satz ist nicht richtig, wenn (b_n) eine nichtnegative Nullfolge ist, die Monotonie ist wesentlich.

Beweis: Wir können annehmen, dass die Reihe bei $n = 0$ beginnt. Dann ist $a_0 = b_0 > 0$ und wir erhalten für die ungeraden Partialsummen

$$s_{2n+1} = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{2n} - b_{2n+1}).$$

(s_{2n+1}) ist also monoton wachsend. Entsprechend sind die geraden Partialsummen

$$s_{2n} = b_0 - (b_1 - b_2) - \ldots - (b_{2n-1} - b_{2n})$$

monoton fallend. Wegen $a_{2n+1} < 0$ gilt ferner $0 < s_{2n+1} < s_{2n} < b_0$. Nach Satz 3.6 haben die monotonen und beschränkten Folgen (s_{2n+1}) und (s_{2n}) jeweils einen Grenzwert, der wegen $|s_{2n+1} - s_{2n}| \to 0$ in beiden Fällen der gleiche sein muß. Damit ist dieser Grenzwert s auch Grenzwert der Reihe. Es gilt $0 < s < b_0 = a_0$, also $s = \theta a_0$ für $0 < \theta < 1$. Die gleiche Überlegung können wir für den Reihenrest machen, der ja wiederum eine alternierende Reihe ist. Damit ist auch die Fehlerabschätzung bewiesen. □

Beispiel Leibniz hat bewiesen, dass

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.$$

Das können wir im Moment nicht nachvollziehen, aber wir können das Ergebnis mit Hilfe der Fehlerabschätzung für den Reihenrest überprüfen. In der ersten Zeile führen wir die Partialsummen s_n auf und in der zweiten die vom Satz garantierte Abschätzung für den Reihenrest, also $|a_{n+1}|$, der exakte Wert ist $\frac{\pi}{4} = 0.785\ldots$

s_n	1.00	0.666	0.866	0.723	0.834	0.734
$\lvert r_n\rvert \leq$	0.333	0.200	0.143	0.111	0.100	0.083

Zur Berechnung einer Milliarder Stellen von π ist dieses Verfahren offenbar nicht geeignet.

4.3 Absolute Konvergenz von Reihen und Cauchy-Kriterium Nach dem Leibniz-Kriterium ist die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

konvergent, aber sie ist nicht robust gegen eine veränderte Auswertung. Wir können ja versuchen, zunächst die Teilreihe der positiven Gliedern auszurechnen und darauf die Reihe mit den negativen Gliedern aufzuaddieren. Es gilt aber

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} &= 1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}) + \ldots \\ &\geq 1 + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \ldots\end{aligned}$$

und die Teilreihe ist divergent. Wir nennen eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist. Zum Beispiel ist die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ absolut konvergent für alle $|q| < 1$.

Die Folge der Partialsummen einer Reihe ist nach Satz 3.9 genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Angewendet auf Reihen sieht das folgendermaßen aus: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

Man nennt diese Bedingung auch *Cauchy-Kriterium für Reihen*. Mit diesem Kriterium lässt sich leicht zeigen, dass eine absolut konvergente Reihe auch konvergent ist,

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|.$$

Da die Partialsummen von $\sum |a_n|$ eine Cauchy-Folge bilden, gilt gleiches für die Partialsummen von $\sum a_n$. Die Abschätzung

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

folgt aus der analogen Abschätzung für die Partialsummen und Grenzübergang.

Ohne Beweis sei vermerkt, dass man eine absolut konvergente Reihe beliebig umordnen, also die Reihe in beliebiger Reihenfolge auswerten kann, ohne den Grenzwert zu verändern.

4.4 Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen

Satz (a) *Majorantenkriterium*: Ist $|a_n| \leq c_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(b) *Quotientenkriterium*: Sei $a_n \neq 0$. Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Ist dagegen

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe divergent.

(c) *Wurzelkriterium*: Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Ist dagegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \text{für unendlich viele } n,$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis: (a) Es ist klar, dass die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ beschränkt bleibt, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert.

(b) Da das Weglassen von endlich vielen Gliedern nichts am Konvergenzverhalten einer Reihe ändert, können wir annehmen, dass die Bedingung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Aus $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$

folgt $|a_n| \le q^n |a_0|$. Damit ist $c_n = q^n|a_0|$ wegen $0 < q < 1$ eine konvergente Majorante der Reihe. Ist $|a_{n+1}| \ge |a_n|$, so folgt entsprechend $|a_n| \ge |a_0|$ für alle n. Damit ist die Folge (a_n) keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ist nicht konvergent.

(c) Für fast alle Folgenglieder gilt $|a_n| \le q^n$, die Behauptung folgt wieder aus der Konvergenz der geometrischen Reihe. Aus der zweiten Bedingung folgt $|a_n| \ge 1$ für unendlich viele n. Damit ist (a_n) keine Nullfolge. □

Implizit wurde hier auch das *Minorantenkriterium* verwendet: Ist $|a_n| \ge b_n \ge 0$ und die Reihe $\sum b_n$ divergent, so ist auch die Ausgangsreihe $\sum a_n$ nicht absolut konvergent.

Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1, \quad \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \qquad \text{für alle } n,$$

aber die harmonische Reihe ist divergent. Sowohl im Quotienten- als auch im Wurzelkriterium ist es also ganz wesentlich, dass das $q < 1$ unabhängig von n gewählt werden kann.

Beispiele (i) $\sum_{n=1}^\infty n^m q^n$ ist absolut konvergent für $m \in \mathbb{N}_0$ und $|q| < 1$. Mit (3.3) gilt $\sqrt[n]{n^m} \to 1$ für $n \to \infty$ und

$$\sqrt[n]{n^m |q|^n} = \sqrt[n]{n^m}|q| \le (1+\varepsilon)q \quad \text{für alle } n \ge N(\varepsilon).$$

Wir wählen hier ε so klein, dass $(1+\varepsilon)|q| < 1$ und haben damit das Wurzelkriterium erfüllt. Da die Glieder einer konvergenten Reihe eine Nullfolge bilden, haben wir auch $\lim_{n\to\infty} n^m q^n = 0$ und damit (3.1) gezeigt.

(ii) Ein typisches Beispiel für die Anwendung des Quotientenkriteriums ist die Reihe $\sum \frac{q^n}{n!}$. Mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|q|^{n+1} n!}{(n+1)!\,|q|^n} = \frac{|q|}{n+1}$$

haben wir das Quotientenkriterium für alle $q \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(iii) Von der Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ werden wir die Konvergenz in Kapitel 9 zeigen (vgl. Aufgabe 4.9), aber sowohl das Wurzel- als auch das Quotientenkriterium versagen. Beide Kriterien beruhen ja auf einer Majorisierung durch die geometrische Reihe, was ein ziemlich grober Klotz ist.

4.5 Zahldarstellungen und g-adische Entwicklung

Bekanntlich wird mit einem unendlichen Dezimalbruch der Form $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ die reelle Zahl

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{10^n}$$

dargestellt. Diese Reihe lässt sich mit $c_n = 9 \cdot 10^{-n}$ majorisieren und damit durch die geometrische Reihe abschätzen. Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis, dass jede reelle Zahl sich eindeutig als eine solche Reihe darstellen lässt. Neben allen theoretischen Überlegungen, die ja durchaus unanschaulich waren wie etwa das Vollständigkeitsaxiom, haben wir dann eine präzise Vorstellung von den reellen Zahlen: Sie „sind“ die unendlichen Dezimalbrüche. Da die Grundzahl $g = 10$ des Dezimalsystems willkürlich gewählt wurde, wollen wir allgemeinere Entwicklungen nach beliebigen Grundzahlen $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{g^n}, \quad a_n \in \{0, 1 \ldots, g-1\}$$

betrachten. Ein Fall ist in dieser Darstellung nicht eindeutig, nämlich

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{g-1}{g^n} = \frac{g-1}{g} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{g^n} = \frac{g-1}{g} \frac{1}{1-\frac{1}{g}} = 1.$$

Wir vereinbaren daher, dass unsere Entwicklungen nicht auf Periode $g-1$ enden dürfen.

Für eine reelle Zahl a bezeichnen wir mit $[a]$ die größte ganze Zahl $\le a$, es ist also $[1,3]=1$ und $[-1,3]=-2$.

Satz: Sei g eine natürliche Zahl ≥ 2. Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl a gibt es eindeutige Zahlen $a_0 \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ mit

$$a = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{g^n}.$$

Beweis: Sei $a_0 = [a]$. Dann gilt $a - a_0 \in [0,1)$. Wir setzen $a_1 = [g(a-a_0)] \in \{0, \ldots, g-1\}$. Es gilt dann $g(a-a_0) - a_1 \in [0,1)$ und wir können das Verfahren mit $a_2 = [g(g(a-a_0)-a_1)]$ fortsetzen. Auf diese Weise erhalten wir die gewünschten „Ziffern" $a_1, a_2, \ldots$ und in jedem Schritt dieses Verfahrens gilt

$$a_0 + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{g^n} \le a < a_0 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{g^n} + \frac{a_k + 1}{g^k}. \tag{4.1}$$

Die rechte Seite lässt sich wie bereits oben erwähnt durch die geometrische Reihe majorisieren. Die Partialsummen der linken Seite bilden eine monoton steigende Folge, die nach Satz 3.6 einen Grenzwert besitzt. Da sich beide Seiten in (4.1) nur um g^{-k} unterscheiden, stellt die Reihe genau die reelle Zahl a dar. Diese Konstruktion sichert auch die Eindeutigkeit, weil (4.1) eine andere Wahl der k-ten Ziffer ausschließt. □

Beispiel Wir wollen $\frac{1}{3}$ im Binärsystem entwickeln. Es ist $a_0 = 0$, $a_1 = [2/3] = 0$, $a_2 = [4/3] = 1$, $a_3 = [2/3] = 0$ und es ist klar, dass $\frac{1}{3} = 0.\overline{01}_2$.

Aufgaben

4.1 (3) Man untersuche die folgenden Reihen $\sum a_n$ auf Konvergenz:

a) $a_n = (-1)^n \left| \frac{3\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} + \alpha \right| \quad (\alpha \in \mathbb{R})$,

b) $a_n = \frac{n^5 - 4n^2}{n^6 + n}$,

c) $a_n = \frac{n^2 + n \cdot 2^n}{3^n}$,

d) $a_n = (n^7 + 7n + 2)\frac{3^n}{4^{n+1}}$,

e) $a_n = \binom{5n}{4n}^{-1}$,

f) $a_n = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n+1}}$,

g) $a_n = \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

4.2 (3) Es sei (n_k) die Folge aller natürlichen Zahlen (in der natürlichen Anordnung), welche sich
a) im Dualsystem b) im Dezimalsystem
ohne die Ziffer 0 darstellen lassen. Man zeige, dass $\sum_k \frac{1}{n_k}$ konvergiert.

4.3 (3) Man berechne die Summe der folgenden unendlichen Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)},$$

wobei (a_n) eine gegebene Folge mit $a_n \ge \delta > 0$ ist.
Hinweis: Man betrachte $s_n - 1$.

4.4 (3) Für die Reihen mit positiven Gliedern $\sum a_n$, $\sum b_n$ gelte

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ für } n \leq N.$$

Dann folgt aus der Konvergenz von $\sum b_n$ die Konvergenz von $\sum a_n$ und aus der Divergenz von $\sum a_n$ die Divergenz von $\sum b_n$.
Hinweis: Man betrachte die Folge (a_n/b_n).

4.5 (3) a) Es sei (a_n) eine positive, monoton fallende Nullfolge, deren Reihe $\sum a_n$ konvergiert. Man zeige: $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

b) Es sei $a_1 = 1$ und $a_n = \frac{1}{nm}$, falls $2^m \leq n < 2^{m+1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Man zeige, dass $\sum a_n$ divergiert, obwohl (a_n) und (na_n) monoton gegen Null konvergieren.
Hinweis zu a): Man betrachte die Summe $a_{n+1} + \ldots + a_{2n}$.

4.6 (3) Man gebe eine konvergente Reihe $\sum a_n$ mit positiven Gliedern an, für welche $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ ist. Ein solches Beispiel zeigt, dass man im Divergenzteil des Quotientenkriteriums den Zusatz „für fast alle n" nicht durch „für unendlich viele n" ersetzen darf.

4.7 (3) Man zeige: Konvergiert $\sum a_n$ absolut, so konvergieren auch $\sum \sqrt{|a_n \cdot a_{n+1}|}$ und $\displaystyle\sum \frac{|a_n a_{n+1}|}{|a_n| + |a_{n+1}|}$.

4.8 (3) (Verdichtungssatz) Sei (a_n) eine monotone Folge. Dann sind

$$\sum_n a_n \quad \text{und} \quad \sum_k 2^k a_{2^k}$$

entweder beide konvergent oder beide divergent.

4.9 (2) Zeigen Sie mit dem Verdichtungssatz, dass $\sum n^{-r} < \infty$ für $r > 1$ und r rational.

4.10 (2) Sei (a_k) eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Beweisen Sie, dass dann folgende Aussage gilt: Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.
Gilt auch die Umkehrung?

4.11 (4) Seien F_n die Fibonacci-Zahlen. Man zeige $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}} = 1$.

4.12 (1) Für $g = 2, 3$ bestimme man die g-adischen Entwicklungen von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$.

4.13 (3) Die Zahl $x \in (0,1)$ habe die g-adische Entwicklung

$$x = 0, z_1, z_2 \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}.$$

Man zeige: x ist genau dann rational, wenn diese Entwicklung endlich oder von einer Stelle N an periodisch ist (das bedeutet: es gibt ein $p \in \mathbb{N}$, so dass $z_{n+p} = z_n$ ist für $n \geq N$.) Im periodischen Fall stelle man x in der Form m/n dar.

5 Funktionen und Stetigkeit

5.1 Beispiele von Funktionen Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}$ als *Funktionen.* D heißt *Definitionsbereich*,

$$\mathcal{R}(f) = f(D) = \{y = f(x) \text{ für ein } x \in D\}$$

heißt *Wertebereich* der Funktion f. Gilt $f(x) = 0$, so heißt x *Nullstelle* von f. In den meisten Fällen ist D ein Intervall oder die Vereinigung von Intervallen.

Seien $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ reelle Zahlen. Dann heißt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Polynom. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von p und wir schreiben $\operatorname{grad} p = n$. Ein Polynom ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome, so heißt $r(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ *rationale Funktion.* Eine rationale Funktion ist außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms $p(x)$ definiert.

Eine Funktion, die sich aus Wurzelausdrücken und rationalen Funktionen zusammensetzt, heißt *algebraische Funktion.* Ein Beispiel für eine algebraische Funktion ist $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Beim Definitionsbereich algebraischer Funktionen ist zu beachten, dass Wurzeln nur aus nichtnegativen Zahlen gezogen werden. In unserem Beispiel ist daher $D = [-1, 1]$.

Seien $I_1, \ldots, I_n$ disjunkte Intervalle und $D = \cup I_k$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit f konstant auf jedem I_k heißt *stückweise konstante Funktion.*

5.2 Grenzwerte von Funktionen Wir hatten bereits Häufungspunkte von Zahlenfolgen definiert. a hieß Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen. Diesen Begriff können wir auch auf Mengen reeller Zahlen übertragen. Ist $A \subset \mathbb{R}$, so heißt $a \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt von A*, wenn in jeder ε-Umgebung $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Punkte von A liegen.

Sei ξ Häufungspunkt des Definitionsbereichs D der Funktion f. Wir sagen, *f konvergiert gegen a für $x \to \xi$*,

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = a \quad \text{ oder } \quad f(x) \to a \text{ für } x \to \xi,$$

wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$ gilt $f(x_n) \to a$. Die Definition wird sinngemäß auch für die Werte $\xi = \pm\infty$ verwendet: Wir schreiben $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, wenn für jede Folge (x_n), die bestimmt gegen ∞ divergiert, gilt $\lim f(x_n) = a$.

Beispiel Für $f(x) = \frac{x}{1+x}$ gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

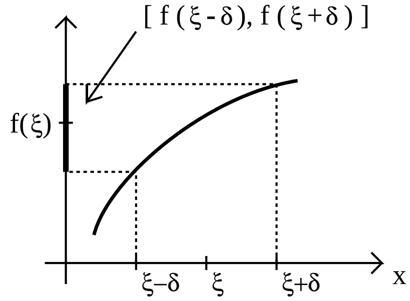
5.3 Stetigkeit von Funktionen Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt *stetig* in $\xi \in D$, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \to \xi$ gilt $f(x_n) \to f(\xi)$. f heißt *stetig in D*, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Ist $\xi \in D$ Häufungspunkt von D, so ist die Stetigkeit von f äquivalent dazu, dass der Grenzwert $\lim_{x\to\xi} f(x)$ existiert und mit $f(\xi)$ übereinstimmt. Anschaulich kommen die Werte von $f(x)$ dem Wert $f(\xi)$ immer näher, wenn x dem Punkt ξ immer näher kommt. Diese Vorstellung lässt sich präzise fassen.

Satz Die Funktion f ist genau dann stetig in $\xi \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$ folgt

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Beweis: Sei f stetig in ξ. Angenommen, die Bedingung des Satzes ist nicht erfüllt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x_\delta \in D$ existiert mit $|x_\delta - \xi| < \delta$ und $|f(x_\delta) - f(\xi)| \geq \varepsilon$. Speziell können wir hier $\delta = \frac{1}{n}$ wählen und x_δ x_n nennen. Dann gilt $x_n \to \xi$, aber $f(x_n) \not\to f(\xi)$. Widerspruch!



Nun zeigen wir die umgekehrte Richtung. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|x - \xi| < \delta$ gerade $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ impliziert. Wegen $x_n \to \xi$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \delta$ für alle $n \geq N$, daher $|f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon$. Damit ist $f(x_n) \to f(\xi)$ erfüllt. □

Beispiele (i) Jede konstante Funktion ist stetig, denn wenn $f(x) = a$ für alle $x \in D$, so folgt aus $x_n \to \xi$, dass $a = f(x_n) = f(\xi)$.

(ii) Die Funktion $f(x) = x$ ist stetig, denn wenn $x_n \to \xi$, so trivialerweise $x_n = f(x_n) \to f(\xi) = \xi$.

(iii) Der Absolutbetrag $f(x) = |x|$ ist stetig. Er stimmt für $x \neq 0$ mit $-x$ oder x überein. Beide Funktionen sind nach (ii) stetig. Für $\xi = 0$ ist der Nachweis der Stetigkeit auch kein Problem: Ist $x_n \to 0$, so auch $|x_n| \to 0$.

(iv) Die Signum-Funktion ist im Punkt 0 unstetig. Für Folgen (x_n) mit $x_n \nearrow 0$ folgt $f(x_n) \to -1$ und für Folgen mit $x_n \searrow 0$ gilt $f(x_n) \to 1$. Dagegen ist $f(0) = 0$. Dieses Argument kann auf alle Funktionen mit einer „Sprungstelle“ wie etwa stückweise konstante Funktionen übertragen werden.

(v) Die *Dirichlet-Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases}$$

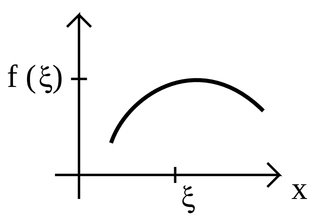
ist in jedem Punkt unstetig. Denn ist ξ irrational, so gibt es nach Satz 4.5 eine Folge rationaler Zahlen (x_n) mit $x_n \to \xi$ und daher $1 = f(x_n) \not\to f(\xi) = 0$. Ist ξ dagegen rational, so ist beispielsweise $x_n = \xi + \sqrt{2}/n$ irrational mit $x_n \to \xi$ und es folgt $0 = f(x_n) \not\to f(\xi) = 1$.

(vi) Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \text{ irrational} \\ \frac{1}{k} & \text{für } x = \frac{k}{l} \text{ mit } k, l \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

ist in jedem rationalen Punkt unstetig. Denn wie in (v) gezeigt wurde, gibt es zu jeder rationalen Zahl ξ eine Folge von Irrationalzahlen (x_n) mit $x_n \to \xi$, aber $0 = f(x_n) \not\to f(\xi) > 0$. Ist ξ irrational, so brauchen wir nur eine Folge rationaler Zahlen $x_n = \frac{k_n}{l_n}$ zu betrachten mit $x_n \to \xi$. Da es nur endlich viele Zahlen der Form $\frac{k}{l}$ mit $k, l \leq K$ gibt, muss zwangsläufig k_n bestimmt gegen unendlich divergieren. Daher ist f in jedem irrationalen Punkt stetig.

Anschaulich bedeutet die Stetigkeit einer Funktion, dass man ihren Graphen in einem Zug, ohne abzusetzen, zeichnen kann. Gilt für eine in ξ stetige Funktion f, dass $f(\xi) > 0$, so gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(\xi) = (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in B_\varepsilon(\xi)$. Dies ist anschaulich klar, lässt sich aber auch leicht indirekt beweisen. Denn andernfalls gäbe es in jedem $B_{1/n}(\xi)$ ein x_n mit $f(x_n) \leq 0$. Diese x_n bilden eine Folge mit $x_n \to \xi$ und $f(x_n) \to f(\xi) > 0$, was einen Widerspruch bedeutet.



Wir nennen eine Funktion *von rechts stetig*, wenn die Einschränkung von f auf die Menge

$$D^+ = \{x \in D : x \geq \xi\}$$

in ξ stetig ist. In diesem Fall schreiben wir

$$f(\xi+) = f(\xi+0) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\searrow\xi} f(x).$$

Die Stetigkeit von links wird ganz analog definiert und bezeichnet.

Beispiel Die Funktion $f(x) = [x]$ =größte ganze Zahl $\leq x$ ist für jedes $p \in \mathbb{Z}$ unstetig, wegen $f(p+) = p$ ist sie in jedem Punkt von rechts stetig.

5.4 Stetigkeit und arithmetische Operationen **Satz** Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so sind auch $\alpha f + \beta g$, fg und, sofern $g \neq 0$ in D, auch f/g stetig. Ist f auf dem Bildbereich von g definiert und stetig, so ist auch die Komposition $f \circ g(x) = f(g(x))$ stetig.

Beweis: Ist $x_n \to \xi$, so gilt $f(x_n) \to f(\xi)$, $g(x_n) \to g(\xi)$. Aus den Regeln für die Konvergenz von Zahlenfolgen in Satz 3.4 folgt dann, dass auch $\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \to \alpha f(\xi) + \beta g(\xi)$, $f(x_n)g(x_n) \to f(\xi)g(\xi)$, $f(x_n)/g(x_n) \to f(\xi)/g(\xi)$.

Ist f auf dem Bildbereich von g stetig, so folgt aus $x_n \to \xi$, dass $g(x_n) \to g(\xi)$. Für die Folge $(g(x_n))$ können wir die Stetigkeit von f im Punkt $g(\xi)$ verwenden und erhalten $f(g(x_n)) \to f(g(\xi))$. $\square$

Nach obigem Beispiel sind die Funktionen 1 und x stetig. Wenden wir auf diese Satz 5.4 an, so erhalten wir, dass alle Polynome und in ihrem Definitionsbereich auch alle rationalen Funktionen stetig sind.

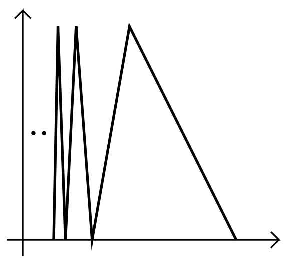
5.5 Gleichmäßige Stetigkeit Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* in D, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Für festes x liefert diese Definition genau die Stetigkeit von f in x. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt also die Stetigkeit von f in D. Die Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit ist aber stärker als die Stetigkeit von f in D, weil das zu findende $\delta > 0$ bei der gleichmäßigen Stetigkeit nicht von x und y abhängen darf. Wir können das auch formal darstellen:

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } D \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y\ \big(|x-y| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big) \\ f \text{ gleichmäßig stetig in } D \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, y\ \big(|x-y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big) \end{aligned}$$

Beispiel Sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert. Wir verbinden für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Punkte $(\frac{1}{2k-1}, 0)$ und $(\frac{1}{2k}, 1)$ durch eine Strecke und die Punkte $(\frac{1}{2k}, 1)$ und $(\frac{1}{2k+1}, 0)$ ebenfalls durch eine Strecke. Wir erhalten den nebenstehenden Graphen. f ist offenbar stetig, aber wir müssen das δ immer kleiner wählen, je näher wir mit dem x zur 0 kommen. f ist also nicht gleichmäßig stetig in D.



Es ist keine Zufall, dass im obigen Beispiel das Definitionsintervall nach links offen war:

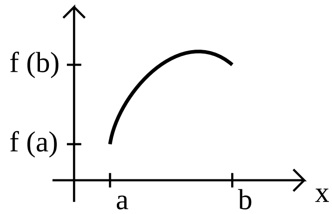
Satz Eine auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.

Beweis: Angenommen, eine stetige Funktin f ist auf dem beschränkten und abgeschlossenen Intervall D stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Es gibt dann ein $\varepsilon_0 > 0$, für das wir kein zugehöriges $\delta > 0$ finden können. Zu jedem $\delta_n = \frac{1}{n}$ gibt es also Punkte $x_n, y_n \in D$ mit $|x_n - y_n| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine in D konvergente Teilfolge von (x_n), die wir der Einfachheit halber wieder mit (x_n) bezeichnen. Es gilt also $x_n \to \xi$ und wegen $|x_n - y_n| < 1/n$ auch $y_n \to \xi$. Wegen der Stetigkeit der Funktion f in ξ folgt $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$, was einen Widerspruch ergibt. □

5.6 Der Zwischenwertsatz **Satz** Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es zu jedem y im Intervall zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = y$.

Beweis: Wir können uns auf den Fall $f(a) < y < f(b)$ beschränken. Die Menge

$$M = \{x \in [a, b] : f(x) \le y\}$$



ist nichtleer und nach oben beschränkt. Sie besitzt daher ein Supremum ξ. Wir zeigen, dass $f(\xi) = y$. Da ξ die kleinste obere Schranke von M ist, gibt es eine Folge (x_n) in M mit $x_n \to \xi$. Da f stetig, gilt $f(x_n) \to f(\xi)$. Wegen $f(x_n) \le y$ folgt $f(\xi) \le y$.

Sei nun (x_n) eine Folge im Intervall $[\xi, b]$ mit $x_n \to \xi$, für die aufgrund der Definition von M und ξ $f(x_n) \ge y$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(x_n) \to f(\xi) \ge y$. Damit ist $f(\xi) = y$ gezeigt. □

Als Anwendung dieses Satzes beweisen wir: Jedes Polynom ungeraden Grades besitzt mindestens eine Nullstelle. Wir können den führenden Koeffizienten des Polynoms zu 1 normieren und haben

$$p(x) = x^n + q(x), \quad q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Mit $r = 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$ folgt dann

$$\begin{aligned} |q(\pm r)| &\le |a_{n-1}|r^{n-1} + \ldots + |a_1|r + |a_0| \\ &\le (|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|)r^{n-1} \\ &= (r-1)r^{n-1} < r^n. \end{aligned}$$

Es folgt $p(r) \ge r^n - |q(r)| > 0$ und, da n als ungerade vorausgesetzt wurde, $p(-r) \le -r^n + |q(-r)| < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt p daher eine Nullstelle in $[-r, r]$.

5.7 Monotone Funktionen und Stetigkeit der Umkehrfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$

$$x \le y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \le f(y). \tag{5.1}$$

f heißt *streng monoton wachsend*, wenn in (5.1) „$\le$“ ersetzt werden kann durch „$<$“. Die Begriffe „monoton fallend“ und „streng monoton fallend“ sind analog definiert.

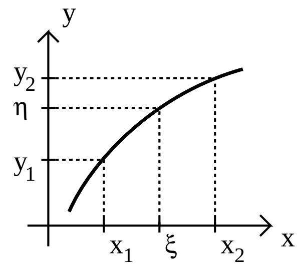
Satz Ist $f[a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig mit $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ mit $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in [a, b]$ streng monoton wachsend und stetig.

Beweis: Da f streng monoton wachsend ist, ist f injektiv. Ferner folgt aus dem Zwischenwertsatz 5.6, dass die Umkehrfunktion im angegebenen Bereich existiert. In die Beziehung

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

setzen wir $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ ein und erhalten, dass auch f^{-1} streng monoton wachsend ist.

Nun zeigen wir die Stetigkeit von f^{-1}. Sei zunächst $\eta = f(\xi)$ ein Punkt aus dem offenen Intervall (α, β). Aufgrund der strengen Monotonie von f ist dann $\xi \in (a, b)$. Für genügend kleines ε sind auch $x_1 = \xi - \varepsilon$, $x_2 = \xi + \varepsilon \in (a, b)$. Für $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ gilt $y_1 < \eta < y_2$. Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit



$$y_1 < \eta - \delta < \eta < \eta + \delta < y_2,$$

also

$$|y - \eta| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - \xi| < \varepsilon.$$

Damit ist f^{-1} stetig in eta. Ist η ein Randpunkt, kann man mit halbseitigen Umgebungen entsprechend verfahren. □

Die Funktion $f(x) = x^n : [0, a] \to [0, a^n]$ ist für jedes $a > 0$ zwischen den angegebenen Bereichen bijektiv, stetig und streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ ist damit ebenfalls stetig. Ferner sind alle algebraischen Funktionen als Kompositionen von Wurzel- und rationalen Funktionen mit Satz 5.4 in ihrem Definitionsbereich stetig.

5.8 Stetiges Bild eines beschränkten und abgeschlossenen Intervalls **Satz** [Weierstraß]

Das stetige Bild eines beschränkten und abgeschlossenen Intervalls ist wieder ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, insbesondere nimmt jede stetige Funktion f auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ Maximum und Minimum an, es gibt also $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ mit $f(\xi_1) \le f(x) \le f(\xi_2)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis: Sei $d = \inf \mathcal{R}(f)$, wobei $d = -\infty$ gesetzt wird, falls die Bildmenge nach unten unbeschränkt ist. Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge (x_n) mit $f(x_n) \to d$. Im Falle $d = -\infty$ ist damit gemeint, dass die Folge nach $-\infty$ bestimmt divergiert. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 3.8 gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), die gegen ein $\xi_1 \in [a, b]$ konvergiert. Da f stetig ist, gilt $d = \lim f(x_{n_k}) = f(\xi_1)$. Damit ist d endlich und ξ_1 das gesuchte Minimum.

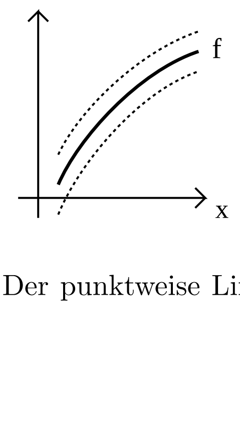
Da die Existenz des Maximums genauso bewiesen wird, können wir auf das Intervall $[\xi_1, \xi_2]$ den Zwischenwertsatz anwenden. Damit ist das Bild von f das ganze Intervall $[f(\xi_1), f(\xi_2)]$. □

Die Beispiele $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in (0, 1]$ und $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$ zeigen, dass an der Voraussetzung, dass das zugrunde liegende Intervall abgeschlossen und beschränkt sein muss, nicht gerüttelt werden darf.

5.9 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Seien $f_n : D \to \mathbb{R}$. Wir sagen, die Folge (f_n) *konvergiert punktweise gegen* $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in D$ gilt $f_n(x) \to f(x)$. Die Folge (f_n) *konvergiert gleichmäßig gegen* f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ und für alle $x \in D$.

Wir können die punktweise Konvergenz auch mit Hilfe von ε und N definieren: $f_n \to f$ punktweise ist genau dann erfüllt, wenn es für alle $x \in D$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, das von ε und x abhängen darf, mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. In der gleichmäßigen Konvergenz darf das N dagegen *nicht* von x abhängen. Wir können uns die gleichmäßige Konvergenz daher so vorstellen, dass wir um f einen ε-Schlauch legen, in dem alle bis auf endlich viele f_n liegen müssen.



Beispiel Sei $D = [0, 1]$ und $f_n(x) = x^n$. Für $0 \le x < 1$ gilt $x^n \to 0$. Der punktweise Limes der

Folge ist daher die Funktion f mit $f(x) = 0$ für $0 \le x < 1$ und $f(1) = 1$. Diese Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig, denn wenn um die Grenzfunktion ein ε-Schlauch mit $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ gelegt wird, so liegt kein f_n komplett in diesem Schlauch.

Satz Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis: Sei $\xi \in D$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$. Da dieses f_n stetig ist, gibt es zu $\varepsilon/3$ ein $\delta > 0$ mit $|f_n(\xi) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$. Für diese x folgt

$$\begin{aligned} |f(\xi) - f(x)| &\le |f(\xi) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist f im Punkt ξ stetig. □

5.10 Anwendung der Stetigkeit auf die Konvergenz von Zahlenfolgen Wir können stetige Funktionen als konvergenzerhaltende Abbildungen ansehen, denn aus $x_n \to \xi$ folgt $f(x_n) \to f(\xi)$. Wir gewinnen dadurch neue Sätze über die Konvergenz von Zahlenfolgen. Ist beispielsweise $a_n \to a$ und $a_n \ge 0$, so gilt $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.

Hat man für die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_0 \in \mathbb{R} \text{ vorgegeben}, \tag{5.2}$$

bewiesen, dass (a_n) konvergiert und ist die Funktion f stetig, so kann man auf beiden Seiten von (5.2) zum Grenzwert übergehen und erhält $a = f(a)$, der Grenzwert ist also immer ein Fixpunkt von f.

Beispiel Wir hatten in einem früheren Beispiel bereits bewiesen, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad a_0 = 0,$$

durch 3 beschränkt und streng monoton wachsend, mithin konvergent ist. Der Grenzwert $a \ge 0$ genügt daher der Gleichung $a = \sqrt{6 + a}$ oder $0 = a^2 - a - 6 = (a + 2)(a - 3)$. Wegen $a \ge 0$ folgt $a = 3$.

5.11 Potenzreihen Die wichtigsten Reihen der Analysis sind die *Potenzreihen*

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad a_n \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Da eine Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Reihe ist, übertragen sich die Begriffe Konvergenz und absolute Konvergenz. Da die Konvergenz einer Reihe auf die Konvergenz der Partialsummen zurückgeführt wird, übernehmen wir auch den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz aus dem letzten Abschnitt.

Wir erinnern daran, dass wir mit $\limsup a_n$ den größten Häufungspunkt der Folge (a_n) bezeichnet haben. Ist die Folge nach oben beschränkt, so existiert der Limes Superior nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 3.8. Ist die Folge nach oben unbeschränkt, so schreiben wir $\limsup a_n = \infty$.

Satz Sei

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

und $R = \frac{1}{L}$, wobei $1/0$ als $R = \infty$ und $1/\infty$ als $R = 0$ interpretiert wird. Dann ist die Reihe (5.3) für $|x| < R$ absolut konvergent und für $|x| > R$ divergent. Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem Intervall $|x| \le r$ mit $r < R$. Über die Konvergenz für $|x| = R$ lässt sich keine allgemeine Ausage machen.

Existiert der Grenzwert

$$Q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

so gilt $L = Q$.

Bemerkung Nach Satz 5.9 ist $p(x)$ stetig für $|x| \le r$. Da $r < R$ beliebig gewählt werden kann, ist $p(x)$ für alle $|x| < R$ stetig.

Beweis: Sei zunächst $0 < L < \infty$. Für die Konstante L' des Wurzelkriteriums gilt dann

$$L' = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1, & \text{falls } |x| < 1/L \\ > 1, & \text{falls } |x| > 1/L \end{cases}.$$

In beiden Fällen folgt Konvergenz oder Divergenz aus dem Wurzelkriterium. Ist $L = 0$, so ist das Wurzelkriterium für alle x erfüllt. Für $L = \infty$ liegt nur Konvergenz im Punkt 0 vor.

Für $|x| \le r < R$ lässt sich die Potenzreihe unabhängig von x durch die geometrische Reihe abschätzen. Damit ist die Konvergenz gleichmäßig.

Den zweiten Teil des Satzes beweist man genauso mit Hilfe des Quotientenkriteriums an Stelle des Wurzelkriteriums. □

Beispiele (i) Nach (3.3) gilt für jedes $m \in \mathbb{Z}$ $\sqrt[n]{n^m} \to 1$. Die Potenzreihen $\sum n^m x^n$ haben daher alle den gleichen Konvergenzradius $R = 1$. Für $m = 0$ erhalten wir die geometrische Reihe, die für $x = \pm 1$ divergent ist. Für $m = -1$ ist für $x = 1$ die harmonische Reihe divergent, für $x = -1$ erhalten wir die konvergente alternierende harmonische Reihe. Über das Konvergenzverhalten am Rande lässt sich also in der Tat keine allgemeine Aussage machen.

(ii) Für die Reihe $\sum n! x^n$ folgt mit dem Wurzelkriterium $a_{n+1}/a_n = n + 1 \to \infty$. Der Konvergenzradius ist daher $R = 0$.

5.12 Das Cauchy-Produkt von Potenzreihen Das Produkt zweier Potenzreihen ergibt sich dadurch, dass man jedes Glied der einen Reihe mit jedem Glied der anderen Reihe multipliziert und das Ergebnis nach Potenzen ordnet.

Satz Sind die Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ für $|x| < R$ konvergent, so ist auch das Produkt

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0,$$

mindestens im Bereich $|x| < R$ konvergent.

Auf den etwas technischen Beweis soll verzichtet werden.

5.13 Die Exponentialfunktion Die Exponentialfunktion wird durch die Potenzreihe

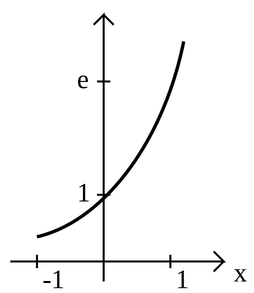
$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

dargestellt. Speziell bezeichnen wir

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

als *Eulersche Zahl*. Mit $a_n = \frac{1}{n!}$ folgt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$$



Die Exponentialfunktion

und nach dem Quotientenkriterium in Satz 4.4 konvergiert die Reihe auf ganz $\mathbb{R}$ und stellt dort eine stetige Funktion dar. Eine alternative Darstellung der Exponentialfunktion und der Eulerschen Zahl ist gegeben durch

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n . \tag{5.4}$$

Dies folgt mit Hilfe der binomischen Formel

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}$$

und wegen

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n\cdot n\dots n} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

gilt

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}, \quad \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \to \frac{1}{k!} \ \text{ für } n\to\infty.$$

Historisch trat die Eulersche Zahl zuerst im Zusammenhang mit der Definition $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ auf. Verzinsen wir einen Geldbetrag der Größe 1 in einem Jahr mit einem Zinssatz von 100%, so erhalten wir nach einem Jahr den Betrag 2. Erfolgt die Zinszahlung bei gleichem Zinssatz auch zwischenzeitlich, so verzinst sich das Kapital durch den Zinseszinseffekt besser. Bei monatlicher Zinszahlung bekommen wir $(1+\frac{1}{12})^{12} = 2,613\dots$ Machen wir die Zeiträume der Verzinsung kürzer und kürzer, so erhalten wir bei kontinuierlicher Verzinsung $e = 2.71\dots$ am Jahresende.

Satz Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist bijektiv, streng monoton wachsend und genügt der Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Wir bilden das Produkt $\exp x \, \exp y$, indem wir jeden Summanden mit jedem Summanden multiplizieren und das Ergebnis nach Potenzen ordnen,

$$\exp(x)\exp(y) = \sum d_n \quad \text{mit } d_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}\frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i} = \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Aus der Definition der Exponentialfunktion folgt sofort, dass sie streng monoton wachsend für nichtnegative x ist. Ferner gilt $\exp(x) \ge 1 + x$, daher $\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$. Für negative x erhalten wir die Behauptung aus

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = 1,$$

also $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$. Damit gilt insbesondere $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$. Wegen des Zwischenwertsatzes ist die Exponentialfunktion bijektiv zwischen den angegebenen Bereichen. □

Aus der Exponentialreihe erschließen wir ferner für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\exp(x)}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\exp(-x)}{x^{-n}} = 0, \tag{5.5}$$

denn es gilt für $x > 0$

$$\exp(x) > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

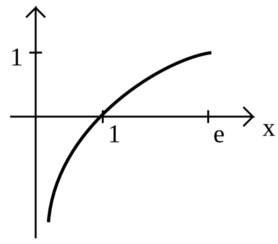
daher

$$\frac{\exp(x)}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \ \to \ \infty, \quad 0 < x^n\exp(-x) < \frac{(n+1)!}{x} \ \to \ 0 \quad \text{für } x\to\infty.$$

Kurz: Die Exponentialfunktion wächst für $x \to \infty$ schneller als jede Potenz und sie fällt für $x \to -\infty$ schneller gegen Null als jede negative Potenz.

5.14 Der Logarithmus Nach Satz 5.7 besitzt die Exponentialfunktion eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion, die wir als *(natürlichen) Logarithmus* ln bezeichnen. Es ist daher $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und

$$y = \exp(x) \;\Leftrightarrow\; x = \ln y.$$



Der Logarithmus

Satz Der natürliche Logarithmus hat die Eigenschaft

$$(5.6) \qquad \ln xy = \ln x + \ln y \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis: Es gilt

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = \exp(\ln x + \ln y).$$

Da die Funktion exp bijektiv ist, folgt hieraus die Behauptung. □

Für jedes n gilt

$$(5.7) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0, \quad \lim_{x\searrow 0} \sqrt[n]{x}\ln x = 0.$$

Wir beweisen dies, indem wir für $x > 0$ $x = \exp(ny)$ mit $y \in \mathbb{R}$ setzen. Es gilt dann

$$\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = \frac{ny}{\exp y} \to 0 \text{ für } y \to \infty, \quad \sqrt[n]{x}\ln x = \exp(y)ny \to 0 \text{ für } y \to -\infty.$$

Also: Der Logarithmus geht für $x \to \infty$ langsamer gegen unendlich als jede Wurzel. Ferner ist die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ für $x \searrow 0$ nur schwach ausgeprägt.

5.15 Anwendungen des Logarithmus Mit Hilfe des Logarithmus wollen wir nun allgemeine Potenzen definieren. Für $a > 0$ folgt aus der Additionseigenschaft (5.6) des Logarithmus $\ln a^n = n \ln a$. Wegen $\sqrt[n]{a} \ldots \sqrt[n]{a} = a$ folgt auch $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\ln a$. Damit gilt $\ln a^r = r \ln a$ für alle rationalen r. Nehmen wir hier auf beiden Seiten die Exponentialfunktion, so gilt $a^r = \exp(r \ln a)$. Damit können wir unsere alte, nur für rationale r gültige Exponentiation auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen durch die Definition

$$a^x = \exp(x \ln a), \quad a, x \in \mathbb{R},\; a > 0.$$

Entsprechend schreiben wir für $a = e$ kürzer e^x statt $\exp(x)$. Es gilt dann für $a, b > 0$ und beliebige $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(iii) $a^x b^x = (ab)^x$.

Die Beweise folgen aus der Definition. (i) erhalten wir mit

$$a^{x+y} = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x \ln a)\exp(y \ln a) = a^x a^y,$$

(ii) mit

$$(a^x)^y = \exp(y \ln a^x) = \exp(xy \ln a) = a^{xy},$$

und (iii) mit

$$a^x b^x = \exp(x \ln a)\exp(x \ln b) = \exp(x \ln ab) = (ab)^x.$$

Beispiele Die Logarithmus-Funktion ist ein wichtiges technisches Hilfsmittel, um das Verhalten komplizierter algebraischer Ausdrücke zu untersuchen.

(i) Zur Bestimmung des Grenzwertes der Folge $\sqrt[n]{n!}$ betrachten wir die Logarithmen der Folgenglieder

$$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}(\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n).$$

Die Logarithmen der Folgenglieder sind also Mittelwerte einer Folge, die bestimmt gegen unendlich divergiert. Damit divergieren auch die Mittelwerte und somit auch $\sqrt[n]{n!}$ bestimmt gegen unendlich.

(ii) Ein weiteres Beispiel ist das Verhalten der Funktion $x^{1/x}$ für $x \to \infty$. Der Logarithmus dieser Funktion ist $\ln x^{1/x} = \ln x/x \to 0$ für $x \to \infty$ nach (5.7), daher $x^{1/x} \to 1$ für $x \to \infty$.

5.16 Hyperbelfunktionen Aus der Exponentialfunktion lassen sich weitere Funktionen ableiten

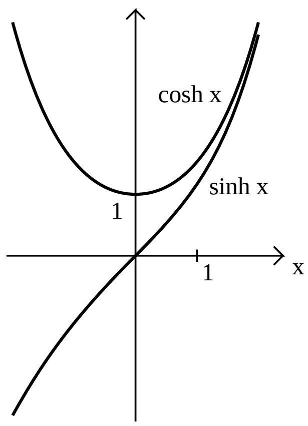
$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) && \text{(Cosinus hyperbolicus)},\\
\sinh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) && \text{(Sinus hyperbolicus)},\\
\tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} && \text{(Tangens hyperbolicus)},\\
\coth(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} && \text{(Cotangens hyperbolicus)}.
\end{aligned}$$

Da sinh für $x = 0$ eine Nullstelle hat, ist coth nur für $x \neq 0$ definiert.

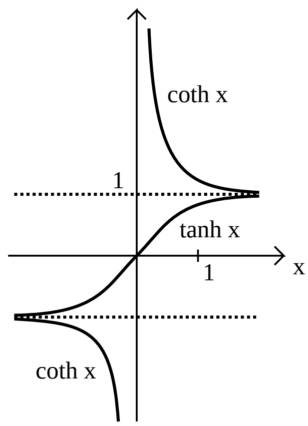
Direkt aus der Additionseigenschaft der Exponentialfunktion beweist man die *Additionstheoreme*

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),$$

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y).$$

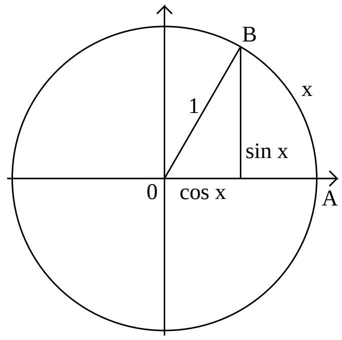


Die Hyperbelfunktionen $\sinh x$ und $\cosh x$



Die Hyperbelfunktionen $\tanh x$ und $\coth x$

5.17 Die Trigonometrischen Funktionen Die altbekannte Definition von Sinus und Cosinus findet man in der folgenden Zeichnung.



Der Punkt $(\sin x, \cos x)$ liegt auf dem Einheitskreis, x ist dabei die „Länge“ des Kreisbogens von A nach B. Wenn wir einmal davon absehen, dass wir die Länge gekrümmter Kurven bisher nicht definiert haben, kann man aus der Zeichnung alle wichtigen Eigenschaften der beiden Winkelfunktionen ablesen. Ist $\pi = 3,1415\ldots$ die Länge des Halbkreises, so gilt

$$\sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \sin\pi = 0,\ \sin(x+2\pi) = \sin x, \tag{5.8}$$

$$\cos 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos\pi = 0,\ \cos(x+2\pi) = \cos x, \tag{5.9}$$

Da die Winkelfunktionen den Einheitskreis parametrisieren, gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{5.10}$$

Da diese Definition der Winkelfunktionen auf der geometrischen Anschauung beruht, lassen sich konkrete Werte wie beispielsweise $\cos 1$ damit nicht berechnen. Wir verwenden daher Potenzreihen und setzen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Aus dem Quotientenkriterium in Satz 5.11 folgt, dass die beiden Reihen auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent sind und dort stetige Funktionen darstellen. Wir müssen nun zeigen, dass für die so definierten Funktionen die Eigenschaften (5.8)-(5.10) gelten. Klar ist $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$. Wie das Additionstheorem für die Exponentialfunktion leitet man (5.10) sowie die *Additionstheoreme*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

her (vgl. Abschnitt 6.8).

Wir definieren $\frac{\pi}{2}$ als erste positive Nullstelle des Cosinus. Die Cosinus-Reihe ist alternierend und es gilt

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} > \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < x \leq 3.$$

Die Absolutbeträge der Glieder sind daher ab $n = 1$ streng monoton fallend und nach dem Leibniz-Kriterium ist

$$C_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = C_4(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 3.$$

Die Unterfunktion C_2 besitzt daher eine Nullstelle für $\alpha = \sqrt{2}$, die Oberfunktion C_4 für $\beta = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$. Damit gilt

$$1,4 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < 1,6.$$

Mit den Additionstheoremen und (5.10) gilt dann $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und

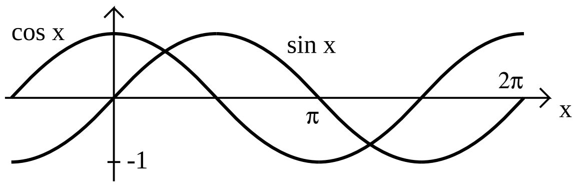
$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x. \tag{5.11}$$

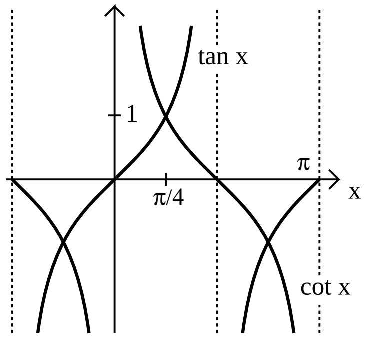
Wenden wir diese Beziehungen sukzessive an, haben wir (5.8) und (5.9) vollständig bewiesen. Es fehlt allerdings noch, dass $\frac{\pi}{2}$ tatsächlich der Länge des Viertelkreises entspricht. Das wird später nachgetragen.

Nun untersuchen wir das Monotonieverhalten von Sinus und Cosinus. Aufgrund der Definition von $\pi/2$ als erster Nullstelle des Cosinus ist $\cos x > 0$ in $[0, \pi/2)$. Wegen $\sin \pi/2 = 1$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ muss wegen des Zwischenwertsatzes auch $\sin x > 0$ in $(0, \pi/2)$ gelten. Aus dem Additionstheorem des Cosinus folgt daher für $0 \leq x < x + y \leq \pi/2$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \leq \cos x \cos y < \cos x.$$

Der Cosinus ist also im Intervall $[0, \pi/2]$ streng monoton fallend und entsprechen ist der Sinus in diesem Intervall streng monoton wachsend. Zusammen mit (5.11) haben wir einen vollständigen Überblick über das Monotonieverhalten der beiden trigonometrischen Funktionen.





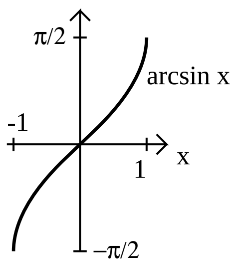
Wir definieren *Tangens* und *Cotangens* durch

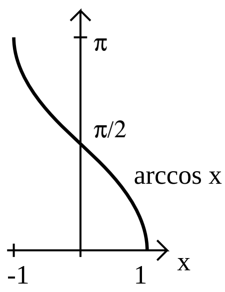
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{für } x \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{für } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

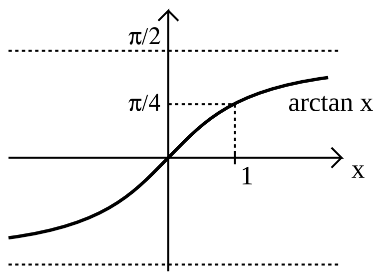
Beide Funktionen sind π-periodisch.

Die *Arcusfunktionen* sind Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Da diese allesamt periodisch sind, müssen sie auf ein Intervall eingeschränkt werden, auf dem sie streng monoton sind. Bei allen vier trigonometrischen Funktionen hat man sich dabei auf ein Intervall geeinigt und spricht vom *Hauptwert* der Umkehrfunktion.

Der Sinus bildet das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ bijektiv auf das Intervall $[-1, 1]$ ab. Für $y \in [-1, 1]$ bezeichnen wir die Lösung $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ von $\sin x = y$ als *Arcussinus* von y und schreiben $y = \arcsin x$. Der Arcussinus ist also auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert, stetig und streng monoton steigend. Selbstverständlich hat die Gleichung $\sin x = y$ unendlich viele Lösungen, die als *Nebenwerte* des Arcussinus bezeichnet werden und besonders gekennzeichnet werden müssen.







Auf die gleiche Weise definiert man die Hauptwerte der anderen Winkelfunktionen durch mehr oder weniger willkürliche Festlegung des Definitionsbereichs und kommt dann zu

$$\begin{aligned}
y &= \arcsin x, \quad |y| \le \tfrac{\pi}{2}, \qquad (|x| \le 1),\\
y &= \arccos x, \quad 0 \le y \le \pi, \quad (|x| \le 1),\\
y &= \arctan x, \quad |y| \le \tfrac{\pi}{2}, \qquad (x \in \mathbb{R}),\\
y &= \operatorname{arccot} x, \quad 0 \le y \le \pi, \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Aufgaben

5.1 (3) Man berechne

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right)$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

5.2 (3) Man berechne die Grenzwerte von

a) $\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ für $x \to 1$ $(m, n \in \mathbb{N})$,

b) $\sqrt{(x+a)(x+b)} - x$ für $x \to \infty$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

5.3 (2) Ist g auf $[0,1]$ definiert und beschränkt, so ist $xg(x)$ in $x = 0$ stetig.

5.4 (3) Man bestimme alle Stetigkeitspunkte der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$$

5.5 (3) Zeigen Sie: Ist f in ξ stetig mit $f(\xi) = a > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x)| > \frac{a}{2}$ für alle x mit $|x - \xi| < \delta$. Machen Sie eine Skizze zu dieser Aussage.

5.6 (2) Zeigen Sie: Stimmen zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in allen rationalen Punkten überein, so stimmen sie auf ganz $\mathbb{R}$ überein.

5.7 (2) Beweisen Sie: Sind $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$, dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = g(x)$.

5.8 (2) Sei f auf $[a,b]$ stetig mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ mit $f(x) \ge c > 0$ für alle x.

5.9 (3) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(0) = f(1)$. Man zeige: Zu jedem $n \ge 1$ gibt es ein $x \in [0,1]$ mit

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

5.10 (3) Es sei J ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall und $f : J \to J$ stetig. Man zeige: Es gibt einen Fixpunkt $\xi \in J$ mit $f(\xi) = \xi$. Man zeige durch Beispiele, dass der Satz für nicht abgeschlossene Intervalle der Form $(a, b]$ und für unbeschränkte Intervalle der Form $[a, \infty)$ falsch ist.

5.11 (3) Sei $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ und $c \in \mathbb{R}$. Man zeige: Die Gleichung

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \ldots + \frac{1}{x-a_n} = c$$

hat im Fall $c = 0$ genau $n-1$ reelle Lösungen, im Fall $c \ne 0$ genau n.

5.12 (3) Seien $f_k \in C([0,2])$ mit $f_k \to f$ punktweise in $[0,2]$ und gleichmäßig in $[0,1)$ und $(1,2]$. Ist f stetig?

5.13 (3) Beweisen Sie:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{e^x} = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^a}\right)^x = 1$ für $a > 1$.

Hinweis: Verwenden Sie für $x > 0$, dass $\ln(1+x) \le x$.

5.14 (3) Skizzieren Sie die Hyperbel

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1,\ x > 0\}$$

und zeichnen Sie auch die asymptotischen Geraden ein, die das Verhalten für $x, \pm y \to \infty$ charakterisieren. Zeigen Sie, dass für $x(t) = \cosh t$, $y(t) = \sinh t$ gilt $x(t)^2 - y(t)^2 = 1$ und machen Sie sich klar, dass $(x(t), y(t))$ für $-\infty < t < \infty$ die Hyperbel durchläuft, genauso wie $(\cos t, \sin t)$ den Kreis.

5.15 (3) Man berechne die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$, b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} (\tan x)^{\cos x}$.

5.16 (3) Man berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{2n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sin n) x^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1+n) x^n$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$, f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(4 + (-1)^n)^{3n}}$.

5.17 (1) Eine Funktion $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in (-a,a)$. Sie heißt *ungerade*, wenn $f(x) = f(-x)$. Welche der Funktionen $\exp x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ sind gerade bzw. ungerade?

6 Komplexe Analysis

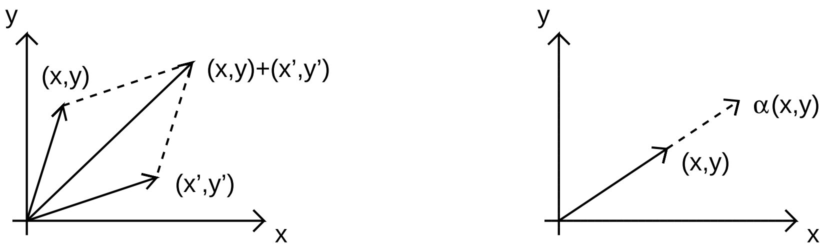
6.1 Komplexe Zahlen Sei

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^2$ können wir als Punkte in der Ebene oder als Vektoren mit Komponenten x und y auffassen. Für $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Summe durch

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Dies ist die übliche Addition zweier ebener Vektoren: Wir verschieben (x', y') so, dass sein Fußpunkt auf dem Endpunkt von (x, y) steht, der Endpunkt des so verschobenen Vektors zeigt dann auf den Endpunkt der Summe (siehe die folgende Abbildung links).



Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x, y) \in \mathbb{R}$ ist die *Skalarmultiplikation* definiert durch

$$\alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Für $\alpha \geq 0$ ist der Ergebnisvektor die Verlängerung oder Verkürzung um das α-fache (siehe Abbildung rechts). Bei $\alpha < 0$ kehrt sich zusätzlich die Orientierung um.

Nach dem Satz des Pythagoras ist die Länge eines Vektors (x, y)

$$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Bis hierin haben wir nur die üblichen Operationen für Vektoren definiert, was in anderen Raumdimensionen genauso geht. Die Vektoren bilden mit der Addition und dem Vektor $(0, 0)$ eine abelsche Gruppe, die Inverse von (x, y) ist $(-x, -y)$. Mit Hilfe der Multiplikation

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

kann man, wie wir gleich sehen werden, auf den ebenen Vektoren einen Körper definieren. Diese etwas geheimnisvolle Definition ist diesem Ziel geschuldet: Im Wesentlichen gibt es nur diese eine Möglichkeit, aus den Vektoren einen Körper zu machen und sie funktioniert nur im ebenen Fall. Das Element $(1, 0)$ ist neutral bezüglich dieser Multiplikation und die Inverse von $(x, y) \neq (0, 0)$ ist

$$(x, y)^{-1} = \Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\Big)$$

wegen

$$\begin{aligned}(x, y) \cdot (x, y)^{-1} &= (x, y)\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\Big)\\ &= \Big(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{-y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2}\Big)\\ &= (1, 0).\end{aligned}$$

Da die übrigen Körperaxiome sich leicht nachrechnen lassen, ist der $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den so definierten Operationen ein Körper, den wir den *Körper der komplexen Zahlen* nennen und mit $\mathbb{C}$ bezeichnen.

Wir können die Elemente von $\mathbb{C}$ der Form $(x, 0)$ mit der reellen Zahl x identifizieren, denn es gilt

$$(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$$
$$(x,0)\cdot(y,0)=(xy-0\cdot 0, x\cdot 0+y\cdot 0)=(xy,0).$$

Die komplexe Zahl $i=(0,1)$ heißt *imaginäre Einheit*. Es gilt

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+0\cdot 1)=(-1,0)=-1.$$

Statt $z=(x,y)$ schreiben wir $z=x+iy$ und können unter Beachtung von $i^2=-1$ „normal" rechnen ($z'=x'+iy'$)

$$z+z'=(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y'),$$
$$z\cdot z'=(x+iy)\cdot(x'+iy')=xx'-yy'+i(xy'+yx').$$

Der Leser sollte sich davor hüten, die imaginäre Einheit zu verrätseln, weil sich das Wort imaginär so rätselhaft anhört. Nach wie vor sind die komplexen Zahlen die ebenen Vektoren, auf denen eine Multiplikation definiert ist, die sie zu einem Körper machen. Und die ebenen Vektoren sind genauso wenig imaginär wie alles andere in der Mathematik auch.

Für $z=x+iy$ setzen wir ferner

$$\begin{aligned} \overline{z} &= x-iy && \text{komplexe Konjugation von } z,\\ |z| &= \sqrt{x^2+y^2} && \text{Absolutbetrag von } z, \end{aligned}$$

wobei $|z|$ mit der zuvor definierten Länge $|(x,y)|$ des Vektors (x,y) übereinstimmt. Die komplexe Konjugation bedeutet geometrisch die Spiegelung des Vektors an der x-Achse.

Ferner definieren wir *Real-* und *Imaginärteil* einer komplexen Zahl $z=x+iy$ durch

$$\operatorname{Re} z=x, \quad \operatorname{Im} z=y.$$

Kommen wir nun zu den Rechenregeln für komplexe Zahlen:

Satz Für komplexe Zahlen z, z' gilt:

(a) $z^{-1}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z\neq 0$.

(b) $|z|^2=z\overline{z}$.

(c) $\overline{(z\pm z')}=(\overline{z}\pm\overline{z'})$, $\quad \overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$, $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ für $z'\neq 0$.

(d) $|\overline{z}|=|z|$, $\quad |zz'|=|z|\,|z'|$, $\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$.

(e) $\operatorname{Re} z=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\quad \operatorname{Im} z=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$.

(f) $|\operatorname{Re} z|\leq|z|$, $\quad |\operatorname{Im} z|\leq|z|$.

(g) $|z+z'|\leq|z|+|z'|$, $\quad \big||z|-|z'|\big|\leq|z-z'|$.

Beweis: Die Beweise folgen aus den Definitionen, es muss allerdings nachgerechnet werden. (b) folgt aus

$$z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$$

und daraus bekommen wir (a) durch Erweiterung des Bruchs

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Der erste Teil von (c) und (d) folgt direkt aus der Definition der komplexen Konjugation. Die Produktregel in (c) erhalten wir aus

$$\begin{aligned}\overline{zz'} &= \overline{(x+iy)(x'+iy')} = \overline{xx'-yy'+i(yx'+xy')}\\ &= (x-iy)(x'-iy') = \overline{z}\,\overline{z'}.\end{aligned}$$

Mit (b) folgt die Produktregel in (d)

$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = z\overline{z}z'\overline{z'}.$$

Genauer brauchen wir uns nur noch die Dreiecksungleichung (g) anzuschauen, die wir mit (b)-(f) beweisen

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z}\\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}\, z\overline{z'} \le |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\overline{z'}|\\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'| = (|z|+|z'|)^2.\end{aligned}$$

Für die zweite Ungleichung in (g), *inverse Dreiecksungleichung* genannt, verwenden wir die erste

$$|z| = |z - z' + z'| \le |z - z'| + |z'|.$$

Das umgekehrte Vorzeichen bekommt man, wenn man hier die Rollen von z und z' vertauscht. □

6.2 Polardarstellung komplexer Zahlen Nach Abschnit 5.17 gibt es zu jedem reellen Vektor (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$ genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit $x = \cos\phi$, $y = \sin\phi$. ϕ ist dabei der im Gegenuhrzeigersinn gemessene Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl vom Nullpunkt zum Punkt (x, y). Aus diesem Grund können wir eine komplexe Zahl $\alpha = a + ib$ mit $\alpha \neq 0$ eindeutig in der Form

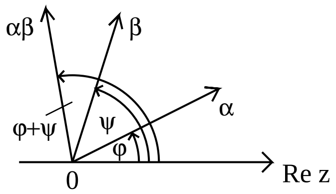
$$\alpha = r(\cos\phi + i\sin\phi) \quad \text{mit } 0 \le \phi < 2\pi, \quad r = |\alpha| > 0$$

schreiben. r ist der von uns bereits definierte Absolutbetrag und $\phi = \arg\alpha$ heißt *Argument* von α.

Für das Produkt der beiden Zahlen $\alpha = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ und $\beta = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ ergibt sich wegen der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\beta &= rs(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + i(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi))\\ &= rs(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi))\end{aligned}$$

Der Ortsvektor $\alpha\cdot\beta$ besitzt demnach die Länge $|\alpha\beta|$ und zeigt in Richtung $\phi+\psi$. Beim Produkt zweier komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.



Beispiel Für $z = 1 + i$ gilt $|z| = \sqrt{2}$ und damit

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \quad (1+i)^2 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2(0 + i\cdot 1) = 2i.$$

Mit dieser geometrischen Deutung der Multiplikation können wir die komplexen Wurzeln, also die Lösungen der Gleichung $z^n = \alpha$ leicht bestimmen. Ist $r = |\alpha|$ und $\phi = \arg\alpha$, so haben wir genau n Lösungen, die alle den Betrag $\sqrt[n]{r}$ und die Argumente $(\phi + 2k\pi)/n$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ besitzen. Die Lösungen von $z^n = 1$ werden *komplexe Einheitswurzeln* genannt,

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Sie liegen auf dem komplexen Einheitskreis und bilden dort ein reguläres n-Eck.

Da man im Komplexen kein klares Verfahren hat, um die Wurzel eindeutig zu machen, ist man im Gegensatz zum Reellen übereingekommen, alle Lösungen von $z^n = \alpha$ als komplexe Wurzeln $\sqrt[n]{\alpha}$ zu bezeichnen.

Beispiel Wir bestimmen alle Lösungen der Gleichung $z^6 - iz^3 = 1$. Mit $w = z^3$ folgt $w^2 - iw = 1$ und

$$(w - \frac{i}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; w_\pm = \frac{i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Es gilt $w_\pm = \cos\phi_\pm + i\sin\phi_\pm$ mit $\phi_+ = \pi/6$ und $\phi_- = 5\pi/6$. Damit bekommen wir die 6 Lösungen

$$\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right),\; \cos\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right),\; k = 1, 2, 3.$$

6.3 Polynome und Euklidischer Algorithmus Für komplexe Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ heißt

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{6.1}$$

(komplexes) Polynom. Ist $a_n \neq 0$, so heißt $\operatorname{grad} p = n$ der *Grad* von p.

Zunächst untersuchen wir die Division mit Rest, die auch als *Euklidischer Algorithmus* bezeichnet wird.

Satz [Euklidischer Algorithmus] Sei p ein Polynom vom Grad m und q ein Polynom vom Grad n mit $m \geq n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome s und r mit $\operatorname{grad} s = m - n$ und $\operatorname{grad} r < n$ mit

$$p = qs + r.$$

Beispiel Sei

$$p(z) = iz^5 + z^3 - z^2 + 1, \quad q(z) = z^2 - 1.$$

Wir bringen zuerst den höchsten Koeffizienten von p zum Verschwinden,

$$p(z) - iz^3 q(z) = (1-i)z^3 - z^2 + 1,$$

fahren auf diese Weise fort,

$$p(z) - iz^3 q(z) - (1-i)zq(z) = -z^2 + (1-i)z + 1,$$

und erhalten

$$s(z) = iz^3 + (1-i)z - 1, \quad r(z) = (1+i)z$$

Lemma (a) Sei p ein Polynom vom Grad n. Für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $b_n, \ldots, b_0$, $b_n \neq 0$, mit

$$p(z) = b_n(z-\xi)^n + b_{n-1}(z-\xi)^{n-1} + \ldots + b_1(z-\xi) + b_0. \tag{6.2}$$

In diesem Fall bezeichnen wir ξ als *Entwicklungspunkt* des Polynoms p.

(b) Besitzt das Polynom p vom Grade n eine Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$, so gibt es ein eindeutiges Polynom q vom Grad $n-1$ mit

$$p(z) = (z - \xi)q(z).$$

Beweis: (a) Wir multiplizieren die Darstellung (6.2) mit der binomischen Formel aus und vergleichen die Koeffizienten mit (6.1), was

$$b_k = \sum_{i=k}^{n} a_i \binom{i}{k} \xi^{i-k}, \quad \text{insbesondere } b_0 = p(\xi),\ b_n = a_n,$$

ergibt.

(b) Ist ξ eine Nullstelle, so folgt $b_0 = 0$ in der Darstellung (6.2). Wir können $z-\xi$ ausklammern, es verbleibt das gesuchte Polynom q. □

Das Lemma bleibt für reelle Polynome sinngemäß richtig. Insbesondere ist das Polynom q in (b) reell, wenn die Nullstelle ξ reell ist. Für reelle Polynome gilt $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$. Ist daher ξ Nullstelle des reellen Polynoms p, so ist auch $\overline{\xi}$ Nullstelle. Nichtreelle Nullstellen reeller Polynome treten also immer paarweise auf. Aus dem letzten Lemma erhalten wir daher

$$p(z) = (z-\xi)(z-\overline{\xi})q(z) = r(z)q(z),$$

wobei $r(z) = z^2 - 2\mathrm{Re}\,\xi\, z + |\xi|^2$ ein reelles quadratisches Polynom ist. Mit p und r ist damit auch q reell.

6.4 Der Fundamentalsatz der Algebra Im Reellen hat die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung. Historisch gesehen wurden die komplexen Zahlen deshalb eingeführt, weil man glaubte, dass im Körper der komplexen Zahlen jedes Polynom eine Nullstelle besitzt. Dieser Glaube erwies sich erst relativ spät als begründet, als Gauß den folgenden Satz bewies.

Satz [Fundamentalsatz der Algebra] Jedes nichtkonstante Polynom besitzt mindestens eine Nullstelle.

Einen einfachen Beweis tragen wir in Abschnitt 6.9 nach.

Wenden wir den Fundamentalsatz und Lemma 6.3 sukzessive an, so hat jedes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen und genügt der Darstellung

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0 = a_n(z-\xi_1)\ldots(z-\xi_n).$$

Dabei dürfen die Nullstellen ξ_i auch mehrfach auftreten.

6.5 Partialbruchzerlegung Die wichtigste Anwendung des Hauptsatzes der Algebra ist eine Darstellung rationaler Funktionen, die *Partialbruchzerlegung* genannt wird. Ist $r(z) = q(z)/p(z)$ eine rationale Funktion, so können wir wegen des Euklidischen Algorithmus $m = \mathrm{grad}\, q < n = \mathrm{grad}\, p$ annehmen. Durch Kürzen des Bruches können wir ferner den höchsten Koeffizienten von p zu 1 normieren. Nach dem Fundamentalsatz hat p die Darstellung

$$p(z) = (z-\xi_1)^{l_1}(z-\xi_2)^{l_2}\ldots(z-\xi_k)^{l_k}$$

mit den Nullstellen $\xi_1, \ldots \xi_k$ und $\sum_i l_i = n$.

Satz Jede rationale Funktion $r(z) = q(z)/p(z)$ mit $m = \mathrm{grad}\, q < n = \mathrm{grad}\, p$ lässt sich eindeutig als Summe von Partialbrüchen schreiben,

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{a_{i1}}{z-\xi_i} + \frac{a_{i2}}{(z-\xi_i)^2} + \ldots + \frac{a_{il_i}}{(z-\xi_i)^{l_i}} \right).$$

Beweis: Wir verwenden vollständige Induktion über den Nennergrad n. Für $n = 1$ ist q konstant und daher nichts zu beweisen. Für den Induktionsschritt dürfen wir annehmen, dass es die behauptete Partialbruchzerlegung gibt für Polynome mit $n = \mathrm{grad}\, p > \mathrm{grad}\, q$. Sei also jetzt $r(z) = q(z)/p(z)$ mit $\mathrm{grad}\, p = n+1 > \mathrm{grad}\, q$. Ist ξ eine l-fache Nullstelle von p, so

$$p(z) = (z-\xi)^l s(z) \quad \text{mit } s(\xi) \neq 0.$$

Es gilt
$$\frac{q(z)}{s(z)} - \frac{q(\xi)}{s(\xi)} = \frac{q(z)s(\xi) - s(z)q(\xi)}{s(z)s(\xi)} = \frac{(z-\xi)t(z)}{s(z)} \quad \text{mit } \operatorname{grad} t \le n-1,$$
weil ξ Nullstelle von $q(z)s(\xi) - s(z)q(\xi)$ ist. Wir haben also

$$\frac{q(z)}{(z-\xi)^l s(z)} - \frac{q(\xi)}{(z-\xi)^l s(\xi)} = \frac{t(z)}{(z-\xi)^{l-1} s(z)}. \tag{6.3}$$

Wegen $\operatorname{grad}\left((z-\xi)^{l-1}s(z)\right) = n > \operatorname{grad} t(z)$ können wir auf der rechten Seite die Induktionsvoraussetzung anwenden und haben die Existenz der Partialbruchzerlegung bewiesen.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass es zwei Partialbruchzerlegungen mit Koeffizienten a_{ij} und b_{ij} gibt. Wir bilden die Differenz dieser Zerlegungen und erhalten eine Zerlegung der Nullfunktion mit Koeffizienten $a_{ij} - b_{ij}$. Diese multiplizieren wir mit $(z-\xi_j)^{l_j}$. Der Grenzwert $z \to \xi_j$ liefert dann $a_{il_j} = b_{il_j}$. Durch Multiplikation mit $(z-\xi_j)^{l_j-1}$ lässt sich dieses Argument für die nächstniedrigere Potenz wiederholen. □

Bei der praktischen Durchführung der Partialbruchzerlegung setzt man wie im Satz angegeben an. Indem man die rechte Seite auf den Hauptnenner bringt, lassen sich die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung durch Koeffizientenvergleich bestimmen. Alternativ können wir einzelne Werte für z in den Ansatz einsetzen, was zu einem linearen Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten führt. Dieses in jedem Fall mühsame Verfahren kann man sich etwas erleichtern, indem man beachtet, dass der höchste Koeffizient der Zerlegung in (6.3) durch $q(\xi)/s(\xi)$ gegeben ist.

Beispiel Man bestimme den Wert der Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}.$$

Es gilt $n^2 + n = n(n+1)$ und damit
$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das lineare Gleichungssystem
$$a + b = 0, \quad a = 1,$$
also $a = 1$ und $b = -1$. Daher
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Damit ist auch gezeigt, dass die Reihe $\sum_n 1/n^2$ konvergiert wegen
$$\frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2+n^2} \le \frac{2}{n^2+n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Beispiel Für $r(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ setzen wir an
$$r(z) = \frac{a}{z} + \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1}.$$

Die höchsten Koeffizienten erhalten wir aus (6.3) oder direkt durch folgende Überlegung. Um beispielsweise a zu bestimmen, multiplizieren wir obige Gleichung mit z und führen den Grenzübergang

$z \to 0$ durch. Damit hängt die Berechnung von a nicht von den anderen Unbekannten ab und wir erhalten

$$a = \lim_{z\to 0} z r(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z+1}{(z-1)^2} = 1.$$

Auf die gleiche Weise gilt

$$b_2 = \lim_{z\to 1} (z-1)^2 r(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z+1}{z} = 2.$$

Da dieses Verfahren für den letzten Koeffizienten versagt, bestimmen wir ihn durch Einsetzen eines beliebigen z. Für $z = 2$ ist

$$b_1 = r(2) - \frac{a}{2} - b_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2 = -1$$

und damit

$$\frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1}.$$

Sind p, q reelle Polynome mit $n = \operatorname{grad} p > m = \operatorname{grad} q$, so lässt sich die Partialbruchzerlegung auch im Reellen durchführen, indem man komplex konjugierte Nullstellen von p zu einem reellen quadratischen Polynom zusammenfasst. Sind $\xi_1, \ldots \xi_k$ die reellen Nullstellen von p, so gilt

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{a_{ij}}{(z-\xi_i)^j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij} z + c_{ij}}{(z^2 + \alpha_i z + \beta_i)^i}.$$

In dieser Darstellung sind alle Größen reell. Die Polynome $z^2 + \alpha_i z + \beta_i$ bestimmt man aus $(z-\xi)(z-\overline{\xi})$. Am einfachsten bestimmt man die reelle Partialbruchzerlegung, indem man erst die komplexe berechnet und dann die komplex konjugierten Terme zusammenfasst.

Beispiel Für $r(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a_2}{(z-i)^2} + \frac{a_1}{z-i} + \frac{b_2}{(z+i)^2} + \frac{b_1}{z+i}. \tag{6.4}$$

Die höchsten Koeffizienten bestimmen wir mit

$$a_2 = \lim_{z\to i} (z-i)^2 r(z) = \frac{i}{4}, \quad b_2 = \lim_{z\to -i} (z+i)^2 r(z) = -\frac{i}{4}.$$

Nun setzen wir $z = 0$ und $z = 2i$ in (6.4) ein und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$-a_1 + b_1 = 0, \quad 3a_1 + b_1 = 2,$$

mit Lösung $a_1 = b_1 = 1/2$. Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet dann

$$r(z) = \frac{i}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z+i)^2} + \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}.$$

Um auf die reelle Zerlegung zu kommen, addieren wir die komplex konjugierten Summanden gleicher Ordnung

$$r(x) = -\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}.$$

6.6 Konvergenz komplexer Zahlenfolgen Der Kreis um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius ε

$$B_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}$$

heißt *ε-Umgebung* von a. Eine Folge (z_n), $z_n \in \mathbb{C}$, *konvergiert gegen* $\xi \in \mathbb{C}$, wenn in jeder ε-Umgebung von ξ fast alle Folgenglieder liegen.

Satz Mit $z_n = x_n + iy_n$ und $\xi = a + ib$ gilt $z_n \to \xi$ genau dann, wenn $x_n \to a$ und $y_n \to b$ in $\mathbb{R}$.

Beweis: Mit den Rechenregeln (f) und (g) in Satz 6.1 gilt für jede komplexe Zahl $z = x + iy$

$$|x|, |y| \leq |z| \leq |x| + |y|. \tag{6.5}$$

$z_n \to \xi$ ist äquivalent zu

$$|z_n - \xi| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Mit (6.5) folgt daraus auch $|x_n - a|, |y_n - b| < \varepsilon$ und damit $x_n \to a$ und $y_n \to b$.

Gilt umgekehrt $x_n \to a$ und $y_n \to b$, so folgt wieder aus (6.5) für genügend große n

$$|z_n - \xi| < 2\varepsilon,$$

was $z_n \to \xi$ impliziert. □

Für Reihen komplexer Zahlen wird Konvergenz wie im Reellen mit der Konvergenz der Partialsummen definiert. Entsprechend heißt $\sum z_n$ *absolut konvergent*, wenn $\sum |z_n|$ konvergiert. Nach dem letzten Satz ist dies äquivalent dazu, dass die beiden reellen Reihen $\sum \operatorname{Re} z_n$ und $\sum \operatorname{Im} z_n$ absolut konvergent sind. Daher bleiben Majoranten-, Wurzel- und Quotientenkriterium für die absolute Konvergenz komplexer Reihen gültig.

6.7 Stetigkeit Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$. f heißt *stetig* in $\xi \in D$, wenn für alle Folgen (z_n) mit $z_n \in D$ und $z_n \to \xi$ gilt $f(z_n) \to \xi$. f heißt *stetig in D*, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Wie im Reellen beweist man, dass auch das ε, δ-Kriterium äquivalent zur Stetigkeit ist: f ist genau dann stetig in $\xi \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $|f(z) - f(\xi)| < \varepsilon$ für alle z mit $|z - \xi| < \delta$.

Die aus dem Reellen bekannten Sätze über die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen bleiben mit gleichem Beweis richtig. Aus diesem Themenkreis benötigen wir nur den folgenden

Satz Die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ seien stetig für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $|f_n(z)| \leq a_n$ für alle $z \in D$ und die Reihe $\sum a_n$ konvergent ist, so konvergiert die Reihe $\sum f_n(z)$ gleichmäßig absolut gegen eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$.

6.8 Potenzreihen Die Konvergenz einer komplexen Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

lässt sich leicht aus den Sätzen 6.7 und 5.11 ableiten. Wir benötigen eine konvergente Majorante, die sich aus dem Wurzel- oder Quotientenkriterium des Satzes 5.11 ableiten lässt. Satz 5.11 bleibt also für komplexe Potenzreihen gültig, insbesondere haben wir Konvergenz gegen eine stetige Grenzfunktion innerhalb eines Kreises vom Radius $\frac{1}{L}$ und Divergenz außerhalb dieses Kreises.

Jede reelle Potenzreihe $f(x) = \sum a_n x^n$ lässt sich auf die komplexe Zahlenebene mit gleichem Konvergenzradius fortsetzen, indem man einfach $x \in \mathbb{C}$ einsetzt. Auf diese Weise bekommen wir die komplexe Exponentialfunktion sowie den komplexen Sinus und Cosinus

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Indem wir iz in die Exponentialfunktion einsetzen, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die *Eulersche Gleichung*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{6.6}$$

und damit zwei weitere wichtige Gleichungen

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \tag{6.7}$$

Die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}, \tag{6.8}$$

folgt mit gleichem Beweis wie im Reellen. Hieraus erhalten wir $e^z e^{-z} = 1$, insbesondere $e^z \neq 0$.

Um eine anschauliche Vorstellung vom Verhalten der komplexen Exponentialfunktion zu bekommen, setzen wir in (6.6) ein reelles y ein

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Für den Absolutbetrag von e^z ist daher nur der Realteil verantwortlich, der Imaginärteil bestimmt die Richtung von e^z. Die Exponentialfunktion ist damit 2π-periodisch in y-Richtung. Aus der letzten Gleichung erhalten wir eine elegante Version der Polardarstellung komplexer Zahlen

$$z = re^{i\phi}, \quad \text{mit } r = |z| \text{ und } \phi = \arg z.$$

Komplexe Multiplikation und Division lassen sich hiermit schön veranschaulichen,

$$zw = rse^{i(\phi+\psi)}, \quad \frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\phi-\psi)}.$$

Für reelle ϕ notieren wir noch einige Folgerungen,

$$|e^{i\phi}| = 1, \quad e^{i\phi} = e^{i(\phi+2k\pi)} \text{ für } k \in \mathbb{Z}, \quad \overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi} = (e^{i\phi})^{-1}.$$

Die meisten Rechenregeln für die reellen trigonometrischen Funktionen lassen sich unter Verwendung der komplexen Beziehungen (6.7),(6.8) jetzt sehr viel einfacher herleiten. Die Additionstheoreme für Cosinus und Sinus erhält man aus

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \sin y - \cos x \cos y),$$

indem man hier Real- und Imaginärteile betrachtet.

6.9 Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra Als letztes tragen wir den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra nach. Mit $K_r(\xi)$ bezeichnen wir die Kreislinie um ξ mit Radius r. Für eine beliebige stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die keine Nullstelle in $K_r(\xi)$ besitzt, definieren wir die *Windungszahl* $d(K_r(\xi), f)$, indem wir gedanklich mit $f(z)$ den Kreis im Gegenuhrzeigersinn entlanglaufen und dabei beobachten, wie oft sich $f(z)$ um den Nullpunkt dreht. Beispielsweise umrundet $f(z) = z$ den Nullpunkt einmal, wenn wir den Kreis $K_1(0)$ entlanglaufen, also $d(K_1(0), z) = 1$. Aus der Darstellung

$$z^n = |z|^n e^{in\phi}, \quad \phi = \arg z,$$

erhalten wir $d(K_r(0), z^n) = n$ für alle $r > 0$.

Die Windungszahl hängt stetig von f ab: Kleine Störungen von f verändern sie nicht. Das folgende Lemma ist daher anschaulich klar.

Lemma Ist $|f(z)| \geq a > 0$ und $|g(z)| \leq a/2$ auf $K_r(\xi)$, so gilt $d(K_r(\xi), f) = d(K_r(\xi), f + g)$.

Ist

$$p(z) = z^n + q(z) \quad \text{mit } q(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

ein komplexes Polynom, so folgt mit

$$M = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0|$$

für $|z| = R \geq 1$ die Abschätzung $|q(z)| \leq MR^{n-1}$. Wegen $|z^n| = R^n$ gilt nach dem Lemma für genügend großes R folglich $d(K_R(0), p) = d(K_R(0), z^n) = n$.

Ist $\xi \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $a = |p(\xi)| > 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von p ein $\delta > 0$ mit $|p(z) - p(\xi| < a/2$ für alle z mit $|z - \xi| < \delta$. Daraus folgt aus dem Lemma $d(K_{\delta/2}(\xi), p) = d(K_{\delta/2}(\xi), p(\xi)) = 0$. Wir betrachten eine stetige Deformation, die den Kreis $K_R(0)$ in $K_{\delta/2}(\xi)$ überführt, beispielsweise kann man den Kreis zuerst auf den Radius $\delta/2$ schrumpfen lassen und ihn anschließend verschieben. Die Windungszahl hängt stetig von einer solchen Deformation ab, ist aber immer ganzzahlig. Da sie im Verlauf der Deformation von n auf 0 springt, kann sie nicht immer definiert sein. Dies ist ist aber nur dann der Fall, wenn p eine Nullstelle besitzt.

Man kann dieses Argument noch etwas verfeinern und erhält dann: Die Windungszahl liefert die Zahl der Nullstellen im umschlossenen Bereich.

Aufgaben

6.1 (2) Es seien $a, z \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Man zeige:

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |z| < 1.$$

6.2 (2) Man charakterisiere geometrisch (Skizze) diejenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

a) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$, b) $|z-2| + |z+2| = 5$,

c) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$, d) $\operatorname{Im} \dfrac{z-i}{z-1} = 0$,

e) $\left|\dfrac{z}{z+1}\right| = 2$, f) $\left|\dfrac{z-i}{z-1}\right| = 1$.

6.3 (2) Man zeichne die Punktmengen

a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+1|\}$, b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-i| < 2\}$.

6.4 (2) Man beweise und deute

a) $||z| - |w|| \leq |z - w|$,

b) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ (Parallelogramm-Gesetz).

6.5 (1) Drei verschiedene Punkte z_1, z_2, z_3 der Gaußschen Zahlenebene liegen genau dann auf einer Geraden, wenn es eine reelle Zahl r gibt mit

$$z_3 - z_1 = r(z_2 - z_1).$$

6.6 (2) Es seien $z = -1 + i$ und $\xi = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Man berechne

$$z + \xi, \quad z\xi, \quad z^{-1}, \quad \xi^{-1}, \quad \frac{z}{\xi} \text{ und } \frac{\xi}{z},$$

stelle die Ergebnisse in der Form $x + iy$ und $re^{i\phi}$ dar und skizziere ihre Lage in der komplexen Ebene.

6.7 (2) Man bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $z^5 = 16(1 - \sqrt{3}i)$, b) $iz^2 + (1-i)z - 3 = 0$,

c) $z^4 + (1+i)z^2 + i = 0$.

6.8 (3) Das komplexe Polynom $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ habe die Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$ wobei jede Nullstelle so oft aufgeführt wird, wie es ihre Vielfachheit verlangt. Dann gilt der *Vietasche Wurzelsatz*

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= \text{Summe der } z_j \\ a_{n-2} &= \text{Summe der Produkte je zweier } z_j \\ -a_{n-3} &= \text{Summe der Produkte je dreier } z_j \\ (-1)^n a_0 &= \text{Produkt aller } z_j \end{aligned}$$

6.9 (2) [Euler, *Introductio,* Par. 216]. Man gebe die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$\frac{1}{1 - z - z^2 + z^3}$$

an.

6.10 (3) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der folgenden komplexen rationalen Funktionen

a) $\dfrac{1}{z^3 - iz^2 - z + i}$, b) $\dfrac{z-1}{z^4 + z^2}$.

6.11 (3) Gegeben sei eine Folge (a_n) komplexer Zahlen mit $\arg(a_n) \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Man zeige: Ist $\sum \mathrm{Re}\,(a_n)$ konvergent, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

6.12 (2) Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$

a) $\sin(x + iy)) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$,

b) $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

7 Integration

7.1 Integration von Treppenfunktionen Im folgenden bezeichnen wir mit $I = [a, b]$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall. Für Punkte

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

nennen wir $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine *Zerlegung* des Intervalls. Die Zerlegung erzeugt die Teilintervalle $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ der Länge $|I_k| = x_k - x_{k-1}$. Z heißt *äquidistant*, wenn $|I_j| = |I_k|$, also $|I_k| = (b-a)/n$.

$\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung Z gibt mit $\phi(x) = c_k$ auf jedem Teilintervall I_k. Auf den Zerlegungspunkten x_k darf ϕ beliebige Werte annehmen. Die Menge der Treppenfunktionen auf $I = [a, b]$ wird mit $T(I)$ bezeichnet. Skalare Vielfache, Summe und Produkt von Treppenfunktionen sind wieder Treppenfunktionen, allerdings nicht immer auf der gleichen Zerlegung.

Das *Integral* der Treppenfunktion ϕ ist definiert als

$$\int_a^b \phi(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k |I_k|.$$

Ist $\phi \geq 0$, so entspricht dieser Wert dem Flächeninhalt der Rechtecke, die unterhalb des Graphen von ϕ liegen.

Für Treppenfunktionen ϕ, ψ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\int_a^b (\alpha\phi + \beta\psi)\, dx = \alpha \int_a^b \phi\, dx + \beta \int_a^b \psi\, dx \qquad \text{(Linearität)},$$

$$\int_a^b \phi\, dx \leq (b-a)K \quad \text{mit } |\phi(x)| \leq K \qquad \text{(Beschränktheit)},$$

$$\phi \leq \psi \text{ in } [a, b] \;\Rightarrow\; \int_a^b \phi\, dx \leq \int_a^b \psi\, dx \qquad \text{(Monotonie)}.$$

7.2 Regelfunktionen Für eine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion f setzen wir

$$\|f\| = \|f\|_{[a,b]} = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Man sieht sofort, dass dieser Ausdruck den Bedinungen

(i) $\|f\| \geq 0$ und $\|f\| = 0$ nur, wenn $f = 0$ (Definitheit),

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha|\, \|f\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ (Positive Homogenität),

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Dreiecksungleichung).

genügt. Ist f stetig auf $[a, b]$, so nimmt f Maximum und Minimum an und es gilt $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, wenn in jedem Punkt $x \in (a, b)$ die rechts- und linksseitigen Grenzwerte von f und in jedem Randpunkt die einseitigen Grenzwerte von f existieren. Die Menge der Regelfunktionen über $I = [a, b]$ bezeichnen wir mit $R(I)$.

Satz (a) Regelfunktionen sind beschränkt.

(b) Skalare Vielfache, Summe und Produkte von Regelfunktionen sind Regelfunktionen.

(c) Jede stetige und jede monotone Funktion ist Regelfunktion.

Beweis: (a) Wäre eine Regelfunktion f unbeschränkt, so gäbe es eine Folge (x_n) in $[a, b]$ mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ oder $-\infty$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 3.8 gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to \xi \in [a, b]$. Da höchstens endlich viele x_{n_k} mit ξ übereinstimmen, können wir $x_{n_k} \neq \xi$ voraussetzen. Durch Auswahl einer weiteren Teilfolge, die wir genauso nennen, können wir $x_{n_k} < \xi$ (oder $x_{n_k} > \xi$) für alle k erreichen. Damit existiert der linksseitige Grenzwert von f in ξ offenbar nicht.

(b) Dies folgt aus den Sätzen über die Konvergenz von Zahlenfolgen.

(c) Die Klasse der Regelfunktionen umfaßt die stetigen Funktionen. Sei f monoton wachsend und $\xi \in (a, b]$. Die Menge $\{f(x) : x < \xi\}$ besitzt ein Supremum M. Wegen der Monotonie von f konvergiert jede Folge $(f(x_n))$ mit $x_n \to \xi-$ gegen M. Den rechtsseitigen Grenzwert behandelt man genauso. □

7.3 Approximation von Regelfunktionen durch Treppenfunktionen Im folgenden definieren wir ein Integral für Regelfunktionen, indem wir diese durch Treppenfunktionen approximieren und dann nachweisen, dass die Integrale einer approximierenden Folge von Treppenfunkionen einen Grenzwert besitzen.

Satz f ist genau dann eine Regelfunktion, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion ϕ gibt mit $\|\phi - f\| < \varepsilon$, also

$$|\phi(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I.$$

Bemerkung Die anschauliche Vorstellung dieses Satzes ist genau die gleiche, die wir bei der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen kennengelernt haben: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Treppenfunktion im ε-Schlauch um die Funktion f.

Beweis: Sei f eine Regelfunktion. Wir verwenden einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, für die die geforderte Treppenfunktion nicht existiert. Wir halbieren das Intervall $I = I_0 = [a, b]$ im Mittelpunkt M. Gibt es auf den Teilintervallen $[a, M]$ und $[M, b]$ jeweils eine ε-approximierende Treppenfunktion, so kann diese zu einer ε-approximierenden Treppenfunktion auf $[a, b]$ zusammengesetzt werden. Daher gibt es auf mindestens einem Teilintervall eine solche Treppenfunktion nicht, wir nennen dieses I_1 und setzen das Intervallhalbierungsverfahren mit diesem Intervall fort. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge von Intervallen $I_0 \supset I_1 \supset \ldots$, deren Endpunkte genau eine reelle Zahl ξ einschachteln. Ist $\xi \in (a, b)$, so existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f in ξ. Es gibt daher ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(\xi-)| < \varepsilon \;\text{ für } 0 < \xi - x < \delta, \quad |f(x) - f(\xi+)| < \varepsilon \;\text{ für } 0 < x - \xi < \delta.$$

Für genügend großes k ist $I_k \subset (\xi - \delta, \xi + \delta)$ und auf I_k existiert die gesuchte Treppenfunktion, nämlich $\phi(x) = f(\xi-)$ für $x < \xi$, $\phi(\xi) = f(\xi)$ und $\phi(x) = f(\xi+)$ für $x > \xi$. Widerspruch! Den Fall $\xi = a, b$ behandelt man genauso.

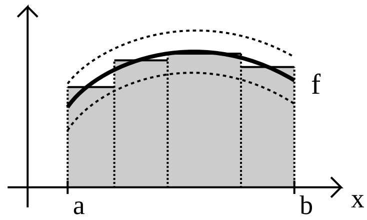
Die umgekehrte Richtung ist etwas technisch und soll hier nicht ausgeführt werden. □

7.4 Integration von Regelfunktionen Sei $f \in R(I)$ und (ϕ_n) eine Folge in $T(I)$ mit $\|f - \phi_n\| \to 0$. Dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)\,dx$$

das *Integral* von f über $[a, b]$.

Da die approximierenden Treppenfunktionen in einem ε-Schlauch um f liegen, ist anschaulich klar, dass die Integrale über die Treppenfunktionen sich für $\varepsilon \to 0$ dem Flächeninhalt unterhalb des Graphen von f immer mehr annähern.



Damit die Definition des Integrals sinnvoll ist, muß noch einiges gezeigt werden. Die Existenz der geforderten Folge (ϕ_n) folgt aus Satz 7.3.

Wir zeigen nun, dass der Grenzwert auf der rechten Seite der Definition existiert. Für genügend große n folgt aus $\|f - \phi_n\| \to 0$ mit der Dreiecksungleichung

$$\|\phi_n\| = \|\phi_n - f + f\| \leq \|\phi - f\| + \|f\| \leq 1 + \|f\|.$$

Damit ist auch die Folge der Integrale $\int \phi_n \, dx$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge ϕ_{n_k} mit $\int \phi_{n_k} \, dx \to a \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\phi_n - f\| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \qquad \left| \int_a^b \phi_{n_k} \, dx - a \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n, n_k \geq N$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \phi_n \, dx - a \right| &= \left| \int_a^b (\phi_n - \phi_{n_k}) \, dx + \int_a^b \phi_{n_k} \, dx - a \right| \\ &\leq (b-a)\|\phi_n - \phi_{n_k}\| + \frac{\varepsilon}{3} \leq (b-a)(\|\phi_n - f\| + \|\phi_{n_k} - f\|) + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit konvergiert die gesamte Integralfolge gegen a.

Ferner müssen wir zeigen, dass der Grenzwert in der Definiton des Integrals unabhängig von der gewählten Folge von Treppenfunktionen ist. Sind $(\phi_n), (\psi_n)$ Folgen mit $\|\phi_n - f\|, \|\psi_n - f\| \to 0$, so

$$\left| \int_a^b \phi_n \, dx - \int_a^b \psi_n \, dx \right| \leq (b-a)\|\phi_n - \psi_n\| \leq (b-a)(\|\phi_n - f\| + \|\psi_n - f\|) \;\to\; 0.$$

Damit ist die Differenzenfolge eine Nullfolge und die beiden Integralfolgen streben gegen den gleichen Grenzwert.

Beispiel Wir hatten die *Dirichlet-Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

(7.1) $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases}$$

bereits definiert. Da es in jedem Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht, sowohl rationale als auch irrationale Punkt gibt, lässt sich diese Funktion nicht durch Treppenfunktion beliebig genau approximieren. Daher ist die Dirichlet-Funktion nicht integrierbar.

Satz Für Regelfunktionen f, g und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $$\int_a^b (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx$$ (Linearität)

(b) $$\int_a^b f \, dx \leq (b-a)K \quad \text{mit } |f(x)| \leq K$$ (Beschränktheit)

(c) $$f \leq g \quad \text{in } [a,b] \;\Rightarrow\; \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx$$ (Monotonie)

Beweis: Alle drei Behauptungen folgen aus den analogen Eigenschaften der Treppenfunktionen, nur der Beweis der Monotonie ist etwas umfangreicher. Es gibt Treppenfunktionen mit $\|f-\phi_n\| \to 0$ und $\|g-\psi_n\| \to 0$. Für die modifizierten Treppenfunktionen

$$\tilde{\phi}_n = \phi_n - \|f-\phi_n\|, \quad \tilde{\psi}_n = \psi + \|g-\psi_n\|$$

gilt dann $\tilde{\phi}_n \le f \le g \le \tilde{\psi}_n$. Aus $\|f-\tilde{\phi}_n\| \to 0$ und $\|g-\tilde{\psi}_n\| \to 0$ folgt

$$\int_a^b f\,dx = \lim \int_a^b \tilde{\phi}_n\,dx \le \lim \int_a^b \tilde{\psi}_n = \int_a^b g\,dx.$$

□

Satz Für $a < b < c$ sei f eine Regelfunktion auf $[a, c]$. Dann gilt

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx.$$

Beweis: Hat man Treppenfunktionen, die f auf $[a, c]$ approximieren, so lassen sich diese auf die Intervalle $[a, b]$ und $[b, c]$ einschränken. Für diese Treppenfunktionen gilt die behauptete Beziehung und damit auch für f. □

Beispiel Sei $I = [0, 1]$ und $f(x) = x^2$. Wir berechnen den Flächeninhalt unterhalb der Parabel f. Wir wählen äquidistante Zerlegungen mit Teilungspunkten $x_k = kh$, $h = 1/n$. Für die Treppenfunktion

$$\phi_n(x) = x_{k+1}^2 \quad \text{für } x_k < x \le x_{k+1},\ 0 \le k < n, \quad \phi_n(0) = 0,$$

gilt $\|f-\phi_n\| \le \max\{|x_k^2 - x_{k+1}^2|\} = |(n-1)^2h^2 - n^2h^2| = (2n-1)h^2 \to 0$. Damit ist ϕ_n eine Folge, die f approximiert. Es gilt

$$\int_0^1 \phi_n\,dx = h(1^2h^2 + 2^2h^2 + \ldots + n^2h^2)$$

Durch Induktion beweist man (vergleiche Aufgabe 1.1)

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

also

$$\int_0^1 \phi_n\,dx = n^{-3}(\frac{1}{3}n^3 + \frac{5}{6}n^2 + \frac{1}{6}n) \ \to \frac{1}{3}.$$

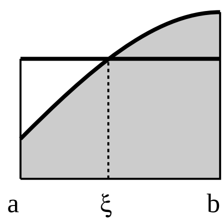
7.5 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz Sei f stetig auf $[a, b]$ und $p \ge 0$ eine Regelfunktion auf $[a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx.$$

Bemerkung Für $p = 1$ erhalten wir den Spezialfall

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a),$$



der sich gut veranschaulichen lässt. Man beachte, dass der Satz nur richtig ist, wenn eine Vorzeichenbedingung an p erfüllt ist.

Beweis: Sei m das Minimum und M das Maximumvon f auf $[a, b]$. Aus

$$mp \le fp \le Mp$$

folgt mit der Monotonie des Integrals

$$m \int_a^b p(x)\,dx \le \int_a^b f(x)p(x)\,dx \le M \int_a^b p(x)\,dx.$$

Es gibt also eine Zahl c mit $m \le c \le M$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = c \int_a^b p(x)\,dx.$$

Nach dem Zwischenwertsatz werden alle Werte zwischen m und M von f angenommen, was die Existenz von ξ mit $f(\xi) = c$ beweist. □

7.6 Vertauschung von Integration und Grenzübergang **Satz** Sei (f_n) eine Folge von Regelfunktionen auf $[a, b]$ und f eine Funktion mit $\|f_n - f\| \to 0$. Dann ist auch f eine Regelfunktion und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Beweis: Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $\phi \in T(I)$ mit $\|f - f_n\| < \varepsilon/2$ und $\|f_n - \phi\| < \varepsilon/2$. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann $\|f - \phi\| < \varepsilon$. Damit ist f eine Regelfunktion. Aus der Beschränktheit des Integrals folgt

$$\left| \int_a^b (f - f_n)\,dx \right| \le (b-a)\|f - f_n\| \;\to\; 0.$$

□

7.7 Ergänzende Definitionen Bisher hatten wir das Integral für Regelfunktionen über Intervalle $[a, b]$ mit $a < b$ definiert. Aus methodischen Gründen ergänzen wir diese Definition durch

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Damit ist das Integral für alle beschränkten und abgeschlossenen Intervalle definiert. Das Integral ist nun *orientiert*: Über das Vorzeichen des Integrals entscheidet auch, ob die x-Achse in positiver oder negativer Richtung durchlaufen wird. Man beachte, dass das Integral in dieser erweiterten Definition nicht mehr monoton ist.

Der Grund für diese Definition ist darin zu sehen, dass wir nun Satz 7.4 allgemeiner formulieren können: Sind $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$, so gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\alpha f(x)\,dx = 0. \tag{7.2}$$

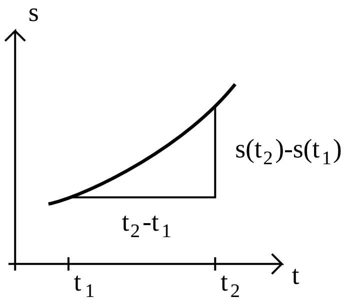
Man kann dies leicht mit einer Fallunterscheidung über die Lage der drei Punkte α, β, γ beweisen.

Sind Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ Regelfunktionen, so ist das Integral definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx \;\in \mathbb{C}.$$

8 Differentiation

8.1 Definition der Differenzierbarkeit **Beispiel** Die geradlinige Bewegung eines Massepunktes wird beschrieben durch eine Funktion $s(t)$, wobei t die Zeit und $s(t)$ den zurückgelegten Weg des Massepunktes bezeichnet. Ist $s(t)$ linear, so ist



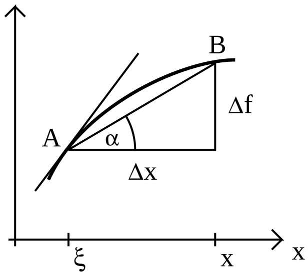
$$\frac{s(t)}{t} = \text{constant}$$

die Geschwindigkeit. Ist $s(t)$ nichtlinear und sind t_1, t_2 zwei Zeitpunkte, so ist $s(t_2)-s(t_1)$ der im Zeitraum t_2-t_1 zurückgelegte Weg und damit

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitraum (t_1, t_2).

Für eine Funktion f heißt



$$m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \tan\alpha$$

Differenzenquotient. Er gibt die *Steigung* m der Sekante durch die Punkte A und B an. Wandert nun x nach links zum Punkt ξ, so läuft B nach A und die Sekante geht in die Tangente im Punkt A über.

Sei f in einer Umgebung von $\xi \in \mathbb{R}$ definiert. f heißt in ξ *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(\xi) = \frac{df(\xi)}{dx} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$$

existiert. $f'(\xi)$ heißt *Ableitung* von f in ξ.

Beispiel Für $f(x) = ax+b$ erhalten wir

$$f'(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{a(\xi+h)+b-(a\xi+b)}{h} = a.$$

Physikalisch gibt $f'(\xi)$ die Momentangeschwindigkeit eines Massepunktes an. Geometrisch ist $f'(\xi)$ die Steigung der Tangenten im Punkt $(\xi, f(\xi))$. Die Tangente $y(x)$ läuft ebenfalls durch diesen Punkt und besitzt die gleiche Steigung wie f. Aus $y(\xi) = f(\xi)$ und $y'(\xi) = f'(\xi)$ folgt die *Tangentengleichung*

$$y(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi).$$

Einseitige Ableitungen lassen sich analog zu einseitigen Grenzwerten definieren

$$f'_+(\xi) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \quad \text{(rechtsseitige Ableitung)}$$

$$f'_-(\xi) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \quad \text{(linksseitige Ableitung)}$$

Wenn $f'_+(\xi)$ und $f'_-(\xi)$ existieren und übereinstimmen, ist f in ξ differenzierbar.

Beispiel Für $f(x) = |x|$ erhalten wir

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{|h|-|0|}{h} = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{|h|-|0|}{h} = -1.$$

Da die einseitigen Ableitungen verschieden sind, ist $|x|$ im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Satz Sei f in ξ differenzierbar. Dann gilt eine *lokale Lipschitzbedingung*, nämlich

$$|f(x) - f(\xi)| \leq K|x - \xi|$$

für alle x in einer genügend kleinen Umgebung von ξ, also $x \in [\xi - h_0, \xi + h_0]$ für ein $h_0 > 0$. Insbesondere ist f stetig in ξ. Ist $f'(\xi) > 0$, so gilt

$$f(\xi - h) < f(\xi) < f(\xi + h) \quad \text{für alle } 0 < h \leq h_0. \tag{8.1}$$

Beweis: Für x in einer genügend kleinen Umgebung von ξ folgt aus der Definition der Differenzierbarkeit

$$\left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right| \leq |f'(\xi)| + 1 = K.$$

Ist $f'(\xi) > 0$, so gilt für genügend kleine $|h|$

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} > 0.$$

Daraus folgt (8.1). □

Allgemeiner erfüllt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ eine *globale Lipschitzbedingung*, wenn

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in I.$$

f heißt dann auch *lipschitzstetig.* Eine lipschitzstetige Funktion ist gleichmäßig stetig: Für $\varepsilon > 0$ kann man $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ verwenden.

8.2 Differenzierbarkeit und arithmetische Operationen **Satz** Sind die Funktionen f, g in ξ differenzierbar, so sind für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$ sowie fg und, falls $g \neq 0$, f/g in ξ differenzierbar. Für diese Ableitungen gilt

(a) $$(\alpha f + \beta g)'(\xi) = \alpha f'(\xi) + \beta g'(\xi), \qquad (\textit{Linearität}),$$

(b) $$(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) \qquad (\textit{Produktregel}),$$

(c) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} \qquad (\textit{Quotientenregel}).$$

Beweis: (a) Die Linearität der Ableitung folgt aus der Linearität des Differenzenquotienten.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(\xi + h)g(\xi + h) - f(\xi)g(\xi)}{h} &= \frac{f(\xi + h)g(\xi + h) - f(\xi + h)g(\xi) + f(\xi + h)g(\xi) - f(\xi)g(\xi)}{h} \\ &= f(\xi + h)\frac{g(\xi + h) - g(\xi)}{h} + g(\xi)\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}. \end{aligned}$$

Da f in ξ stetig ist, folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

(c) Wir zeigen die Behauptung nur für $f = 1$, der allgemeine Fall folgt dann aus der Produktregel.

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(\xi + h)} - \frac{1}{g(\xi)}\right) = \frac{1}{h} \frac{-g(\xi + h) + g(\xi)}{g(\xi + h)g(\xi)}.$$

Wegen der Stetigkeit von g in ξ können wir auch hier den Grenzübergang $h \to 0$ durchführen und erhalten die Behauptung. □

Als Anwendung dieses Satzes zeigen wir $(x^n)' = nx^{n-1}$ durch vollständige Induktion. Für $n = 0$ erhalten wir die konstante Funktion, für die $1' = 0$ aus der Definition der Differenzierbarkeit folgt. Ebenso bestimmt man $x' = 1$. Als Induktionsannahme dürfen wir $(x^n)' = nx^{n-1}$ verwenden. Aus der Produktregel folgt dann

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Damit ist die Ableitung eines Polynoms

$$\frac{d}{dx}\big(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0\big) = na_n x^{n-1} + \ldots + a_1.$$

Zur Bestimmung der Ableitung von x^{-n} verwenden wir die Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

8.3 Kettenregel **Satz** Seien I, J Intervalle mit $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ sowie $f(I) \subset J$. Ist f an der Stelle ξ und g an der Stelle $f(\xi)$ differenzierbar, so ist auch $h = g \circ f$, $h(x) = g(f(x))$, an der Stelle ξ differenzierbar mit

$$h'(\xi) = g'\big(f(\xi)\big)f'(\xi) \quad \text{(Kettenregel)}.$$

Beweis: Sei zunächst $f'(\xi) \neq 0$. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$. Da f in ξ stetig ist, folgt $y_n = f(x_n) \to y = f(\xi)$. Wegen $f'(\xi) \neq 0$ folgt aus (8.1) $y_n \neq y$ für genügend große n. Durch Erweiterung des Differenzenquotienten um $f(x_n) - f(\xi) = y_n - y$ erhalten wir

$$\frac{h(x_n) - h(\xi)}{x_n - \xi} = \frac{(g(y_n) - g(y))(f(x_n) - f(\xi))}{(y_n - y)(x_n - \xi)} \;\to\; g'(y)\big|_{y=f(\xi)} f'(\xi).$$

Ist $f'(\xi) = 0$, so erhalten wir aus dem ersten Teil von Satz 8.1

$$\begin{aligned} \left|\frac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi}\right| &= \left|\frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi}\right| \\ &\leq K \left|\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right| \;\to\; 0 \quad \text{wegen } f'(\xi) = 0. \end{aligned}$$

□

Beispiele (i) Ist f differenzierbar, so bestimmen wir die Ableitung von f^n, indem wir $g(y) = y^n$ setzen. Aus der Kettenregel folgt dann

$$\frac{d}{dx}f^n(x) = \frac{d}{dy}y^n f'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

(ii) Die Ableitung von $\frac{1}{f}$ kann man ebenfalls aus der Kettenregel erschließen,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{d}{dy}y^{-1}f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

8.4 Ableitung der Umkehrfunktion **Satz** f sei im Intervall I stetig und streng monoton. Ist die Umkehrfunktion $\phi = f^{(-1)}$ in $a = f(\xi)$ differenzierbar mit $\phi'(a) \neq 0$, so ist f in ξ differenzierbar mit

$$f'(\xi) = \frac{1}{\phi'(a)} = \frac{1}{\phi'(f(\xi))}.$$

Beweis: Sei $x_n \to \xi$ mit $x_n \neq \xi$. Da f streng monoton ist, gilt $y_n = f(x_n) \neq f(\xi)$. Mit $\lim y_n = a$ folgt

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} = \frac{y_n - a}{\phi(y_n) - \phi(a)} \;\to\; \frac{1}{\phi'(a)}.$$

□

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ ist die Umkehrfunktion von $\phi(y) = y^n$. Daher

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{-1+1/n}.$$

Die Schreibweise

$$f' = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

erinnert uns daran, dass die Ableitung aus dem Grenzübergang des Differenzenquotienten hervorgegangen ist und es verwundert nicht, dass man mit den Symbolen df und dx so rechnen kann wie mit reellen Zahlen:

Kettenregel	$z(y(x)):$	$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$	(Erweiterung des Bruchs)
Umkehrfunktion	$x(y):$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{(x'(y)}\Big\|_{y=y(x)}$	(Division des Bruchs)

Gleichzeitig macht diese Heuristik uns auf die Ähnlichkeit zwischen Kettenregel und der Ableitung der inversen Funktion aufmerksam. Rein formal können wir schreiben

$$x = \phi(f(x)) \;\Rightarrow\; 1 = x' = \phi'(f(x))f'(x),$$

woraus die Ableitung der Inversen folgt. Alle diese Überlegungen sind natürlich nicht mathematisch streng zu verstehen, aber als Gedächtnisstütze nützlich.

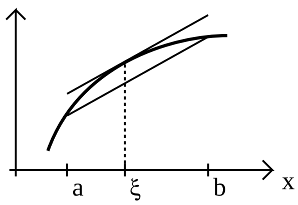
8.5 Mittelwertsätze

Satz [Rolle] f sei im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis: Ist f konstant, so ist die Behauptung jedenfalls richtig. Ist f nicht konstant, so nimmt f in $\xi \in (a, b)$ das Maximum oder Minimum an. Ist ξ das Maximum, so gilt $f(\xi) \geq f(x)$ und aus dem Differenzenquotienten erschließen wir, dass $f'_-(\xi) \geq 0$ und $f'_+(\xi) \leq 0$, also $f'(\xi = 0$. □

Satz [Mittelwertsatz der Differentialrechnung] f sei im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$



Beweis: Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - \alpha(x - a), \quad \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es gilt $g(a) = g(b) = f(a)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \alpha$, woraus die Behauptung folgt. □

Erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes und besitzt f' ein Vorzeichen im Intervall (a, b), so kann man auf das Monotonieverhalten der Funktion schließen:

(8.2) $$f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; f \text{ ist monoton wachsend},$$

(8.3) $$f'(x) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; f \text{ ist monoton fallend},$$

$$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f \text{ ist streng monoton wachsend},$$

$$f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f \text{ ist streng monoton fallend}.$$

Dabei erhalten wir die Implikation von links nach rechts, indem wir den Mittelwertsatz auf ein beliebiges Teilintervall anwenden. Die Implikation von rechts nach links folgt aus der Definition des Differenzenquotienten. Eine streng monoton wachsende Funktion muß nicht zwangsläufig $f'(x) > 0$ erfüllen, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt.

Kombinieren wir (8.2) und (8.3), so erhalten wir eine weitere wichtige Folgerung aus dem Mittelwertsatz

(8.4) $$f'(x) = 0 \;\text{ in } (a, b) \;\Rightarrow\; f \text{ ist konstant in } (a, b).$$

Satz [Verallgemeinerter Mittelwertsatz] f, g seien im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Ferner sei $g' \neq 0$ in (a, b). Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis: Wegen $g' \neq 0$ ist g streng monoton und daher $g(b) - g(a) \neq 0$. Ähnlich wie beim Beweis des Mittelwertsatzes verwenden wir die Hilfsfunktion

$$h(x) = f(x) - \alpha\big(g(x) - g(a)\big), \quad \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Wegen $h(a) = f(a) = h(b)$ gibt es nach dem Satz von Rolle ein ξ mit $h'(\xi) = 0$. Daraus folgt $f'(\xi)/g'(\xi) = \alpha$ und damit die Behauptung. □

8.6 Höhere Ableitungen Besitzt f eine Ableitung $f'(x)$, so ist auch f' eine Funktion in x, auf die die Definition der Ableitung angewendet werden kann. Für diese *höheren Ableitungen* schreiben wir

$$\frac{d}{dx} f = \frac{df}{dx} = f' = f^{(1)}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f = f^{(n)} = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}.$$

Beispiel Für das Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

erhalten wir

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1,$$

$$p''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + 2 a_2$$

und schließlich $p^{(n)}(x) = n! a_n,\ p^{(n+1)}(x) = 0$.

Wir nennen eine Funktion m-mal stetig differenzierbar, wenn die Ableitungen bis zur Ordnung m existieren und stetig sind. Für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ setzen wir

$$C^m(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : \text{ Die Ableitungen } f, f', \ldots, f^{(m)} \text{ existieren und sind stetig auf } I\},$$

insbesondere ist $C(I) = C^0(I)$ der Raum der stetigen Funktionen auf I. Skalare Vielfache und Summe von Funktionen in $C^m(I)$ sind wieder in $C^m(I)$. Mit $f, g \in C^m(I)$ ist auch fg in $C^m(I)$ und es gilt die *Leibniz-Formel*

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)} g^{(m-k)},$$

die man genauso wie die binomische Formel mit Induktion über m beweist.

Den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $C^\infty(I)$.

Aufgaben

8.1 (3) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $\xi \in (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt

$$f'(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi - h)}{2h}.$$

Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass aus der Existenz des Grenzwerts auf der rechten Seite *nicht* die Differenzierbarkeit an der Stelle ξ folgt.

8.2 (2) Sei $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) = x^2 g(x)$ ist in $\xi = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

8.3 (1) Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$(f_1 \dots f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' f_3 \dots f_n + \dots + f_1 \dots f_{n-1} f_n'.$$

8.4 (2) Seien $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x)g(x) = x$ für alle $x \in [-1, 1]$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $g(0) \neq 0$ folgt.

8.5 (2) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente durch den angegebenen Punkt P.

a) $f(x) = x^n$ in $P = (1, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, b) $f(x) = \sqrt{x}$ in $P = (4, 2)$.

8.6 (2) Man berechne die Ableitung f' der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)\sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

und gebe an, wo sie nicht existiert.

8.7 (3) Es sei $f_n(x) = 0$ für $-1 \leq x \leq 0$ und $f_n(x) = x^{1+\frac{1}{n}}$ für $0 < x \leq 1$.

a) Man zeige, dass die Folge (f_n) im Intervall $[-1, 1]$ gleichmäßig konvergiert, und man bestimme die Grenzfunktion f.

b) Man zeige, dass die Funktionen f_n in $[-1, 1]$ differenzierbar sind und dass die Folge (f_n') in $[-1, 1]$ punktweise konvergiert. Man bestimme die Grenzfunktion g.

8.8 (3) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n})^{1/2}$ im Intervall $[-1, 1]$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f(x) = |x|$ konvergiert. Zeigen Sie ferner, dass die f_n einmal stetig differenzierbar sind, die Grenzfunktion aber nicht.

8.9 (2) Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach m für $f, g \in C^m(I)$ die *Leibniz-Formel*

$$(fg)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)} g^{(m-k)}$$

8.10 (2) Eine Funktion $f \in C^m(I)$ habe $n \leq m+1$ verschiedene Nullstellen. Dann hat $f^{(k)}$ $n-k$ Nullstellen für $k < n$.

8.11 (3) Es sei $f(x) = x^n(1 - x)^n$. Man zeige: Für $0 < k \leq n$ ist $f^{(k)}(x) = x^{n-k}(1 - x)^{n-k} \cdot p_k(x)$, wobei p_k ein Polynom vom Grad k ist, welches k einfache Nullstellen im Intervall $(0, 1)$ besitzt.

9 Die Prinzipien der Analysis

9.1 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Das wichtigste Prinzip der Analysis besagt, dass die Integration in gewisser Weise die Umkehrung der Differentiation ist. Genauer definieren wir: Für eine stetige Funktion f heißt jede differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ *Stammfunktion* zu f, die Schreibweise ist

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Sind F und G Stammfunktionen zu f, so folgt aus $F' = G' = f$, dass $(F - G)' = 0$ und nach (8.4) daher $F(x) - G(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich also nur um eine Konstante.

Satz [Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung] f sei eine stetige Funktion auf einem Intervall I. Für einen beliebigen Punkt $a \in I$ setzen wir

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dann gilt:

(a) F ist eine Stammfunktion zu f, d.h. F ist in I differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$.

(b) Für jede Stammfunktion Φ zu f und $a, b \in I$ gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \Phi'(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi(t)\Big|_a^b$$

Beweis: (a) Aus (7.2) und dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 7.5 folgt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h} h f(x')$$

mit $x' \in (x, x+h)$. Für $h \to 0$ folgt $x' \to x$ und wegen der Stetigkeit von f daher $f(x') \to f(x)$.

(b) Wegen $F(a) = 0$ ist die Behauptung für F richtig. Wie eingangs gezeigt wurde, gilt $\Phi(x) = F(x) + c$, daher $F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$. □

9.2 Gliedweise Differentiation **Satz** Die Funktionen f_n seien in $[a, b]$ stetig differenzierbar mit $f_n \to f$ punktweise und $f_n' \to g$ gleichmäßig. Dann ist auch f differenzierbar mit $f' = g$, oder

$$(\lim f_n)' = \lim f_n'.$$

Beweis: Die gleichmäßige Konvergenz $f_n' \to g$ bedeutet $\|f_n' - g\| \to 0$. Wir können daher Satz 7.6 anwenden und erhalten

$$\int_a^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

Auf der rechten Seite liefert der Hauptsatz 9.1

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \lim f_n(x) - \lim f_n(a) = f(x) - f(a).$$

Damit ist f eine Stammfunktion von g und nach dem Hauptsatz 9.1 folgt $f' = g$. □

9.3 Gliedweise Differentiation von Potenzreihen und Ableitung der elementaren Funktionen Der letzte Satz lässt sich ohne Komplikationen auf Potenzreihen

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n \in \mathbb{R}$$

übertragen.

Satz Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe p. Dann ist für $|x| < R$ die Potenzreihe unendlich oft differenzierbar und kann gliedweise differenziert werden,

$$p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \tag{9.1}$$

Beweis: Nach Satz 9.2 muss gezeigt werden, dass die gliedweise differenzierte Reihe den gleichen Konvergenzradius besitzt wie die Ausgangsreihe p. Es gilt

$$\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \sqrt[n]{(n+1)}\,\sqrt[n]{|a_{n+1}|} \leq \sqrt[n]{2n}\left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{(n+1)/n}.$$

Mit (3.2) folgt $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} \to 1$. Mit $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ist auch

$$\limsup \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{(n+1)/n} = L.$$

□

Mit diesem Satz können wir die Abeitungen der durch Potenzreihen gegebenen elementaren Funktionen ohne Mühe bestimmen. Für die Exponentialfunktion erhalten wir

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \exp' x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = \exp x.$$

Die Ableitung der inversen Funktion $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ erfolgt mit der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion,

$$\ln' y = \frac{1}{\exp' x} = \frac{1}{\exp x} = \frac{1}{y}, \quad \exp x = y > 0.$$

Damit lässt sich auch die allgemeine Potenzfunktion ableiten, für $x > 0$ ist

$$(x^a)' = \left(e^{a \ln x}\right)' = e^{a \ln x}\frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Für die Hyperbelfunktionen haben wir

$$\sinh' x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' = \cosh x, \quad \cosh' x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)' = \sinh x,$$

Mit den Reihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

folgt

$$\sin' x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

sowie

$$\cos' x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = -\sin x.$$

Für Tangens und Cotangens liefert die Quotientenregel

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

$$\cot' x = \Big(\frac{\cos x}{\sin x}\Big)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).$$

Die Ableitung der inversen trigonometrischen Funktionen erfolgt wieder mit der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned}
\arcsin' y &= \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos \arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \arcsin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \\
\arccos' y &= \frac{-1}{\sin x} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}, \\
\arctan' y &= \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}, \\
\operatorname{arccot}' y &= \frac{-1}{1 + y^2}.
\end{aligned}$$

Beispiele (i) Die Funktion x^x können wir für $x > 0$ unter Verwendung der Definition ableiten,

$$(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

(ii) Durch fortgesetzte Anwendung der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\big(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\big)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\big(1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} 2x\big) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}$$

9.4 Tabelle der Stammfunktionen Nach dem Hauptsatz gilt für eine beliebige Stammfunktion F von f

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Das Problem der Integration reduziert sich daher auf das Auffinden einer Stammfunktion von f. Eine Funktion wird elementar genannt, wenn sie sich aus den algebraischen und den bereits definierten speziellen Funktionen wie etwa der Exponentialfunktion zusammensetzt. Die Ableitung einer elementaren Funktion ist nach unseren Ableitungsregeln wieder eine elementare Funktion. Dagegen braucht die Stammfunktion einer elementaren Funktion keine elementare Funktion zu sein. Die Stammfunktion kann daher nicht immer bestimmt werden. Mahematische Programmsysteme wie Mathematica oder Matlab sind mittlerweile dem Menschen im Auffinden einer Stammfunktion deutlich überlegen, allerdings können auch sie nicht sicher entscheiden, ob eine Stammfunktion elementar ist oder nicht. Wer Stammfunktionen selber finden möchte, kann die in den Abschnitten 9.5, 9.6, 9.7 dargestellten Techniken verwenden, um die Integranden zu vereinfachen, und/oder in einer Formelsammlung nach der Stammfunktion suchen. Hier nur die wichtigsten Stammfunktionen, die sich aus den Ableitungen der elementaren Funktionen im letzten Abschnitt ergeben:

Tabelle der Stammfunktionen

f	F	
x^α	$\dfrac{1}{1+\alpha}x^{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$
$\dfrac{1}{x+a}$	$\ln\lvert x+a\rvert$	$x \neq -a$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{x+1}{x-1}\right\rvert$	$x \neq \pm 1$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\lvert x\rvert < 1$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2+1}\rvert$	$\lvert x\rvert > 1$
e^x	e^x	
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$a > 0$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$x \neq (k+\frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\ln\cosh x$	
$\coth x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert$	$x \neq 0$

9.5 Partielle Integration **Satz** Seien f, g in $[a,b]$ differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx. \tag{9.2}$$

Beweis: Wir integrieren die Produktregel

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

von a bis b und wenden den Hauptsatz 9.1 an. □

Die Formel der partiellen Intgration wird auch für die unbestimmte Integration in der Form

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx. \tag{9.3}$$

verwendet. Da $\int \ldots\, dx$ als Stammfunktion des Integranden zu interpretieren ist, sind mit dem Hauptsatz die Darstellungen (9.2) und (9.3) äquivalent.

Beispiele (i) Eine Stammfunktion F des Logarithmus findet man mit

$$\int \ln x\, dx = \int \ln x \frac{d}{dx} x\, dx = -\int \frac{1}{x} \cdot x\, dx + x \ln x,$$

also $F(x) = x \ln x - x$.

(ii) Eine Stammfunktion von $\sin^2 x$ erhält man aus

$$\int \sin^2 x\, dx = -\int \sin x \frac{d}{dx} \cos x\, dx = \int \cos^2 x\, dx - \sin x \cos x$$

$$= \int (1 - \sin^2 x)\, dx - \sin x \cos x,$$

also

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x).$$

(iii) Es gilt

$$\int x^n e^x\, dx = \int x^n \frac{d}{dx} e^x\, dx = -n \int x^{n-1} e^x\, dx + x^n e^x.$$

Wendet man diese Formel mehrfach an, erhält man

$$\int x^n e^x = e^x \{x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-1} - \ldots + (-1)^n n!\}.$$

9.6 Integration durch Substitution **Satz** Sei f in $[a, b]$ stetig, ϕ in $[\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar mit $\phi([\alpha, \beta]) = [a, b]$ und $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\, dt. \tag{9.4}$$

Wenn nur $\phi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ erfüllt ist, so gilt für die unbestimmte Integration

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \Big|_{x=\phi(t)}. \tag{9.5}$$

Ist ϕ zusätzlich streng monoton, so gilt

$$\int f(x)\, dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\, dt \Big|_{t=\phi^{-1}(x)}. \tag{9.6}$$

Bemerkung Schreiben wir $\phi(t) = x(t)$, so können wir als Merkregel

$$\int f(x)\, dx = \int f(x(t))\, \frac{dx}{dt}\, dt$$

verwenden.

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Dann folgt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} F(\phi(t)) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

Damit ist $\tilde{F}(t) = F(\phi(t))$ eine Stammfunktion von $f(\phi(t))\phi'(t)$, was Formel (9.5) beweist. Unter der Voraussetzung $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ folgt aus dem Hauptsatz

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\, dt.$$

(9.5) ist eine Identität in t. Ist ϕ streng monoton, können wir dort t durch $\phi^{-1}(x)$ ersetzen und erhalten (9.6). $\square$

Bei der unbestimmten Integration durch Substitution kümmert man sich am besten nicht darum, ob die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt sind, sondern macht stattdessen eine Probe, bei der überdies Rechenfehler aufgedeckt werden können.

Beispiele (i) Ausdrücke in e^x lassen sich durch die Substitution $t = e^x$ zumindest vereinfachen. Mit $\dfrac{dt}{dx} = e^x$ folgt dann $dx = \dfrac{dt}{t}$. Beispielsweise erhalten wir

$$\int \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{2t + 1}{(t+1)t}\, dt = \ln(t^2 + t) = \ln(e^{2x} + e^x)$$

(ii) Bei Ausdrücken, die $\sqrt{1 - x^2}$ enthalten, kann man die Substitution $x = \cos t$ mit $dx = -\sin t\, dt$ versuchen, beispielsweise

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 - x^2}\, dx &= \int \sin t(-\sin t)\, dt = \frac{1}{2}(\sin t \cos t - t) \\ &= \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} - \arccos x).\end{aligned}$$

9.7 Integration rationaler Funktionen Rationale Funktionen können elementar integriert werden, wenn eine Partialbruchzerlegung gelingt. Ist die Ausgangsfunktion reell, und nur diesen Fall wollen wir betrachten, so treten Terme der Form

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{mit } a, A \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{N} \tag{9.7}$$

sowie Paare der Form

$$\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\overline{A}}{(x-\overline{a})^k} \quad \text{mit } a, A \in \mathbb{C},\ a \notin \mathbb{R},\ \text{und } k \in \mathbb{N} \tag{9.8}$$

auf. Unabhängig davon, ob a reell oder komplex ist, gilt für $k > 1$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}}.$$

Für reelles a im Fall (9.7) für $k = 1$ ist $\ln|x - a|$ Stammfunktion. Im konjugiert komplexen Fall (9.8) für $k = 1$ fassen wir die beiden Anteile zusammen,

$$\frac{A}{x-a} + \frac{\overline{A}}{x-\overline{a}} = \frac{Bx + C}{x^2 + 2bx + c} \quad \text{mit } b, c, B, C \in \mathbb{R} \text{ und } c > b^2.$$

Wir erhalten dann

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + 2bx + c}\, dx = \frac{B}{2} \ln(x^2 + 2bx + c) + \int \frac{\tilde{C}}{x^2 + 2bx + c}, \quad \tilde{C} = C - bB$$

sowie

$$\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}} \arctan \frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}}.$$

9.8 Uneigentliche Integrale und das Integralvergleichskriterium für Reihen Bislang hatten wir das Integral nur für Regelfunktionen definiert, die insbesondere beschränkt sind. Wenn wir uns die anschauliche Bedeutung des Integrals ins Gedächtnis rufen, nämlich der Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Funktion zu sein, so kann dieser Flächeninhalt auch dann endlich sein, wenn die Punktmenge selber unbeschränkt ist. Die beiden wichtigsten Fälle sind in diesem Zusammenhang:

1. f ist an einem Randpunkt des Integrationsbereichs unbeschränkt.

2. Der Integrationsbereich ist selber unbeschränkt.

Wir wollen beide Fälle in einer Definition berücksichtigen und nehmen dazu an, dass der kritische Punkt der rechte Randpunkt des Definitionsbereichs ist. Sei also $-\infty < a < b \leq \infty$ und sei f eine Regelfunktion auf jedem Teilintervall $[a, \xi]$ mit $\xi < b$. Wir definieren

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to b} \int_a^\xi f(x)\,dx,$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. In diesem Fall nennen wir das uneigentliche Integral *konvergent*. Existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{\xi \to b} \int_a^\xi |f(x)|\,dx,$$

so heißt das uneigentliche Integral *absolut konvergent*.

Mit $b = \infty$ erhalten wir für $s > 1$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx &= \lim_{\xi \to \infty} \int_1^\xi \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{\xi \to \infty} \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_1^\xi \\ &= \frac{1}{s-1} + \lim_{\xi \to \infty} \frac{1}{1-s} \xi^{1-s} = \frac{1}{s-1}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Beispiele (i) Ist f am linken Randpunkt unbeschränkt, gehen wir ganz analog vor. Für $s < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx &= \lim_{\xi \to 0} \int_\xi^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{\xi \to 0} \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_\xi^1 \\ &= \frac{1}{1-s} + \lim_{\xi \to 0} \frac{1}{1-s} \xi^{1-s} = \frac{1}{1-s}. \end{aligned}$$

(ii) Für $r > 0$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-rx}\,dx = \frac{1}{r}$$

wegen

$$\int_0^\xi e^{-rx}\,dx = \frac{1}{r}(1 - e^{-r\xi}) \;\to\; \frac{1}{r}.$$

Mit Hilfe der Integralrechnung lassen sich auf einfache Weise Reihen auf Konvergenz untersuchen.

Satz [Integralvergleichskriterium für Reihen] Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ nichtnegativ und monoton fallend. Dann gilt

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx \right) \leq f(1),$$

wobei der Grenzwert existiert. Insbesondere ist $\sum f(k)$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.

Beweis: Wegen $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ für $x \in [k, k+1]$ gilt

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1).$$

Die Folge

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

wächst daher monoton mit $0 \leq a_n \leq f(1) - f(n+1)$. Die Folge (a_n) ist demnach konvergent, weil sie monoton und beschränkt ist. □

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-r}$ ist nach (9.9) für $r > 1$ konvergent und für $r \leq 1$ divergent. Für $r = 1$, also der harmonischen Reihe liefert uns der Satz die Existenz einer Zahl C_E, die *Eulersche Konstante* genannt wird, mit

$$C_E = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Die Partialsummen der harmonischen Reihe verhalten sich also ungefähr wie $\ln n$.

Beispiel Da die Reihe $\sum \frac{1}{n}$ divergiert und $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ konvergiert, fragt man sich, wie die Reihen „zwischen" diesen beiden sich verhalten. Es zeigt sich, dass die Glieder der harmonischen Reihe nur etwas gedämpft werden müssen, um Konvergenz zu erhalten. Aus

$$\int_3^{\xi} \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x)\Big|_3^{\xi} \;\to\; \infty, \qquad \int_3^{\xi} \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))^2} = -(\ln(\ln x))^{-1}\Big|_3^{\xi} \;\to\; \ln(\ln 3)^{-1}$$

ersehen wir, dass $\sum n^{-1}(\ln n)^{-1}$ noch divergiert, während $\sum n^{-1}(\ln n)^{-1}(\ln(\ln n))^{-2}$ schon konvergiert.

9.9 Der Satz von Taylor **Satz** Sei I ein Intervall und $f \in C^{n+1}(I)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Für $a, x \in I$ gilt die *Taylorentwicklung*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(x;a)$$

mit dem *Restglied* in *Integraldarstellung*

$$R_n(x;a) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Das Restglied lässt sich alternativ nach *Lagrange* darstellen durch

$$R_n(x;a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in (a,x).$$

Beweis: Wir wenden partielle Integration auf das Restglied an,

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt &= -\int_a^x \frac{d}{dt}\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\,dt + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_{t=a}^{t=x} \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n. \end{aligned}$$

Wir können das gleiche Verfahren auf das Integral auf der rechten Seite anwenden und erhalten die behaupteten Terme der Taylorentwicklung.

Um die Restglieddarstellung nach Lagrange zu bekommen, wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung 7.5 an und erhalten

$$R_n(x;a) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

□

Als Spezialfälle bekommen wir für $n = 0$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

den Hauptsatz sowie mit

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(\xi)$$

den Mittelwertsatz.

Wir können

$$f(x) = T_n(x;a) + R_n(x;a)$$

schreiben mit dem *Taylorpolynom* $T_n(x;a)$ vom Grade $\leq n$ und dem Restglied $R_n(x;a)$. Ist das Intervall I beschränkt und abgeschlossen, so ist die stetige Funktion $f^{(n+1)}$ beschränkt und das Restglied lässt sich in der Form

$$|R_n(x;a)| \leq c|x-a|^{n+1}$$

abschätzen. Der Satz von Taylor besagt demnach, dass man eine Funktion in C^{n+1} durch ein Polynom vom Grad $\leq n$ bis auf einen Fehler approximieren kann.

Häufig schreibt man in der Taylorentwicklung h statt $x - a$:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_n(x;a)$$

mit dem Restglied

$$R_n(h;a) = \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+t)\,dt.$$

oder nach Lagrange

$$R_n(h;a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\xi) \quad \text{für ein } \xi \in (0,h).$$

Beispiele (i) Für kleines $|h|$ verwenden Ingenieure

$$\sqrt{1+h} \sim 1 + \frac{1}{2}h.$$

Um dies einzusehen, entwickeln wir die Wurzelfunktion nach Taylor. Mit

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad \left(\sqrt{x}\right)'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

liefert die Taylor-Formel für $n = 1$ und Entwicklungspunkt $a = 1$

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}(1+\xi)^{-3/2}h^2.$$

mit $0 < \xi < h$ für $h > 0$ und $h < \xi < 0$ für $h < 0$. Für $h > 0$ können wir das Restglied abschätzen durch

$$\Big| -\frac{1}{8}(1+\xi)^{-3/2}h^2\Big| \leq \frac{h^2}{8}.$$

(ii) Es gilt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2},$$

also

$$\ln(1+h) = \ln 1 + \frac{1}{1}h - \frac{1}{2}\frac{h^2}{(1+\xi)^2}.$$

Da das Restglied ein Vorzeichen besitzt, erhalten wir mit $\ln 1 = 0$ die Ungleichung

$$\ln(1+h) \leq h \quad \text{für } -1 < h < \infty.$$

(iii) (Typische Klausuraufgabe) Man berechne das Taylor-Polynom $T_2(x;0)$ der Funktion $f(x) = e^{\cos x}$ und bestimme eine Konstante $M > 0$ derart, dass

$$|f(x) - T_2(x;0)| \leq M|x|^3 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Lösung Es gilt

$$f'(x) = -e^{\cos x}\sin x$$

$$f''(x) = e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x)$$

$$f'''(x) = e^{\cos x}(-\sin^3 x + 3\sin x\cos x + \sin x)$$

Daher

$$T_2(x,0) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = e - \frac{1}{2}ex^2.$$

Wegen

$$|f'''(x)| \leq 5e^1$$

gilt

$$|f(x) - T_2(x,0)| \leq \frac{5}{6}e|x|^3.$$

9.10 Die Landauschen Symbole Seien f, g in einer Umgebung des Punktes ξ definiert. Wir sagen f ist gleich groß O von g und schreiben

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to \xi,$$

wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M \quad \text{in einer Umgebung von } \xi.$$

Wir sagen f ist gleich klein o von g und schreiben

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to \xi,$$

wenn

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Wenn beispielsweise $\lim_{x\to\xi} g(x) = 0$, so bedeutet

$$f = O(g) \quad f \text{ geht so schnell oder schneller gegen Null als } g,$$

$$f = o(g) \quad f \text{ geht schneller gegen Null als } g.$$

Man nennt O und o die *Landauschen Symbole*. Die Bezeichnungen O und o werden sinngemäß auch für $\pm\infty$ angewendet. Beispielsweise bedeutet $f(x) = O(x^n)$, $x \to \infty$, dass es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(x)| \leq Mx^n$ für genügend große x.

Die Landauschen Symbole gestatten suggestive Schreibweisen, weil sie den Approximations- oder Wachstumsaspekt hervorheben. Die Ableitung

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi) \tag{9.10}$$

lässt sich äquivalent schreiben

$$f(x) - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + h(x) \tag{9.11}$$

mit einer Funktion $h(x) = o(|x - \xi|)$, denn wenn wir in (9.11) durch $x - \xi$ teilen, konvergiert der Ausdruckt $h(x)/(x - \xi)$ immer noch gegen Null und wir erhalten (9.10). Statt (9.11) schreibt man noch kürzer

$$f(x) - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + o(|x - \xi|).$$

Wenn es in der Taylorentwicklung nicht auf die explizite Gestalt des Restglieds ankommt, verwendet man auch die Schreibweise

$$f(x) = T_n(x; a) + O(|x - a|^{n+1}),$$

das Taylorpolynom approximiert f bis auf einen Fehler der Ordnung $O(|x - a|^{n+1})$.

Unbestimmte Ausdrücke der Form $f(x)/g(x)$ mit $f(x), g(x) \to 0$ für $x \to \xi$ untersucht man am besten mit Hilfe der Taylorentwicklung um den Punkt ξ unter Verwendung der Landauschen Symbole.

Für $\sin x/x$ ist $\sin x = x + O(x^3)$ und daher

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + O(x^3)}{x} = 1.$$

Beispiel Wir bestimmen für $a \in \mathbb{R}$

$$L(a) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1}.$$

Dieser Ausdruck ist von der Form „$\frac{0}{0}$“. Für die Exponentialfunktion im Zähler verwenden wir

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$$

und erhalten damit für den Zähler insgesamt

$$e^{-x^2} - 1 + x \sin x = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + O(x^6) - 1 + x(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)) = \frac{1}{3}x^4 + O(x^6).$$

Für den Wurzelausdruck liefert Taylorentwicklung

$$\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3),$$

für den Nenner gilt daher

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6) + ax^2 - 1 = (a - \frac{1}{2})x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6).$$

Damit ist $L(a) = 0$ für $a \neq \frac{1}{2}$ und $L(a) = \frac{8}{3}$ für $a = \frac{1}{2}$.

9.11 Taylorreihen Wir nennen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a. Da es sich hier um nichts weiter als die bereits bekannte Potenzreihe handelt, die lediglich um a verschoben ist, gelten die Sätze 5.11 und 9.3 sinngemäß. Mit

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ist die Reihe konvergent in

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R = \frac{1}{L}\}.$$

f kann in D unendlich oft gliedweise differenziert werden, insbesondere gilt

$$f^{(n)}(a) = n! a_n, \tag{9.12}$$

also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{9.13}$$

Satz Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ in einer Umgebung von a konvergent. Dann stimmt das Taylorpolynom $T_n(x;a)$ mit dem n-ten Abschnitt der Reihe überein,

$$T_n(x;a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k.$$

Ist umgekehrt f unendlich oft differenzierbar mit $R_n(x;a) \to 0$ gleichmäßig in Umgebung von a, so lässt sich in dieser Umgebung f als Reihe (9.13) darstellen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus (9.12) und (9.13).

Der Satz von Taylor gibt uns aufgrund des Restgliedes eine Fehlerabschätzung, wenn nur ein Reihenabschnitt ausgewertet werden soll. Als ein Beispiel wollen wir die Zahl e mit Hilfe von

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{e^\xi}{6!} = 2,716\ldots + \frac{e^\xi}{6!}, \quad \xi \in (0,1),$$

angenähert bestimmen. Wegen $0 < \xi < 1$ und $e < 3$ gilt

$$\frac{e^\xi}{6!} \le \frac{e^1}{6!} \le \frac{3}{6!} = 0,00595\ldots,$$

also $|e - 2,716\ldots| \le 0,006$, der genaue Wert ist $e = 2,718\ldots$

Den Abschluß bildet die Potenzreihe des Logarithmus.

Satz Für $|x| < 1$ besitzt der Logarithmus die Reihendarstellung

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Beweis: Mit $\ln'(1+x) = 1/(1+x)$ können wir die höheren Ableitungen leicht bestimmen

$$\ln^{(n)}(1+x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Die angegebene Reihe errechnet sich damit aus (9.13) mit $a = 0$. Nach dem Wurzel- oder Quotientenkriterium ist die Reihe in der Tat für $|x| < 1$ konvergent. □

Aufgaben

9.1 Man berechne die Ableitung f' der Funktion

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1+2x}+1}\right), \quad x > 0,$$

und gebe an, wo sie nicht existiert.

9.2 Man zeige: Die durch $f(x) = \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$ definierte Funktion ist für alle x differenzierbar mit $f'(0) > 0$, sie ist aber in keiner Umgebung von 0 monoton wachsend.

Bemerkung: Ist f in $[-a, a]$ stetig differenzierbar und $f'(0) > 0$, so ist f streng monoton wachsend in einer Umgebung von 0. Das obige Beispiel zeigt, dass dies nicht richtig zu sein braucht, wenn f nur differenzierbar ist.

9.3 Man zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

zur Klasse $C^\infty(\mathbb{R})$ gehört.

Hinweis: Für positive x ist $f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$, wobei p_n ein Polynom vom Grad $2n$ ist.

9.4 Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige, auf (a, b) differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f' \geq g'$ auf (a, b). Dann gilt $f \geq g$ auf $[a, b]$.

Als Anwendung beweise man

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 \text{ für } x > 0.$$

9.5 Die Funktion $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ fällt auf $(0, \infty)$ streng monoton.

9.6 Für $k \in \mathbb{N}$ seien $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_k(x) = e^x \sin x + x^{2k}.$$

Beweisen Sie: Die Funktionen f_k und ihre Ableitungen f_k' besitzen unendlich viele Nullstellen in $\mathbb{R}$.

9.7 Man berechne die Integrale

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{(\log x)^4}{x}\,dx$, b) $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/4} \frac{\cos^3 2x}{\sin^2 2x}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_0^1 \sin ax \sin bx\,dx, \quad a \neq b.$

9.8 Man bestimme zu den folgenden Funktionen eine Stammfunktion:

a) $x^5 \cos x^3$, b) $\dfrac{e^{\alpha\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

c) $\dfrac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}$, d) $\tan^2 x, \quad |x| < \dfrac{\pi}{2}$,

e) $\dfrac{1}{x \ln x}, \quad x > 0$, f) $\dfrac{e^x + 1}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$,

g) $x^2 \sin 4x$, h) $\dfrac{(\ln x)^3}{x}$.

9.9 Man beweise durch Induktion nach n

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}} \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N}.$$

9.10 Es sei $f \in C[a,b]$ und $g : J \to [a,b]$ differenzierbar, wobei J ein Intervall ist. Man zeige, dass

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

in J differenzierbar und $F'(x) = f(g(x))g'(x)$ ist.

Entsprechend zeige man, dass

$$G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt,$$

wenn h denselben Voraussetzungen wie g genügt, in J differenzierbar und

$$G'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

ist.

9.11 Die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Man zeige:

$$\lim_{h\to 0+} \int_{-1}^{1} \frac{hf(x)}{h^2+x^2}\,dx = f(0)\pi.$$

Hinweis: Man betrachte zuerst den Fall $f \equiv \text{const}$.

9.12 Die Funktion f sei in $[0,\infty]$ positiv und monoton fallend mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Die Regelfunktion g sei periodisch mit der Periode $p > 0$, und es sei $\int_0^p g\,dx = 0$. Man zeige, dass $\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx$ existiert.
Hinweis: Verwenden Sie $g = g^+ - g^-$ mit $g^+(x) = \max(g(x), 0)$, $g^-(x) = \max(-g(x), 0)$ und

$$a_n^+ = \int_{np}^{n+1)p} fg^+\,dx, \quad a_n^- = \int_{np}^{(n+1)p} fg^-\,dx.$$

9.13 Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und absolute Konvergenz für $\alpha \in \mathbb{R}$. Man verwende die vorangehende Aufgabe.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx,$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^\alpha}\,dx, \quad a, b, \alpha > 0,$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\cos x)^\alpha}, \quad \alpha > 0,$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\sin(x^2)\,dx.$

9.14 Man untersuche die folgenden Integrale auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}}\,dx,$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x)},$

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt,$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt.$

9.15 Bestimmen Sie eine Zahl a mit

$$\Big|\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} - a\Big| < \frac{1}{100}.$$

9.16 Sei $I = (x-\delta, x+\delta)$, $\delta > 0$. Sei für $h > 0$

$$\delta_h^+ f(x) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)), \quad \delta_h^0 f(x) = \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)).$$

Zeigen Sie:

a) Für $f \in C^2(I)$ gilt für $h < \delta$

$$\delta_h^+ f(x) = f'(x) + \frac{1}{2}hf''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h).$$

b) Für $f \in C^3(I)$ gilt für $h < \delta$

$$\delta_h^0 f(x) = f'(x) + \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h).$$

9.17 Es sei
$$\delta_h^2 f(x) := \frac{1}{h^2}\big(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big)$$
der *zentrale (oder symmetrische) Differenzenquotient 2. Ordnung.* Sei $I = (x-\delta,\, x+\delta)$ und $0 < h < \delta$. Man zeige:

a) $$\delta_h^2 f(x) = f''(\xi) \quad \text{für } f \in C^2(I) \ \text{ mit } x-h < \xi < x+h,$$

b) $$\delta_h^2 f(x) = f''(x) + \frac{h}{6}\big(f'''(\xi') - f'''(\xi'')\big) \quad \text{für } f \in C^3(I)$$
$$\text{mit } x-h < \xi' < x < \xi'' < x+h,$$

c) $$\delta_h^2 f(x) = f''(x) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \quad \text{für } f \in C^4(I) \ \text{ mit } x-h < \xi < x+h.$$

Im Falle $f \in C^2(I)$ gilt insbesondere $\delta_h^2 f(x) \to f''(x)$ für $h \to 0$.

9.18 Man berechne das Taylor–Polynom $T_2(x;0)$ der Funktion $f(x) = e^{\cos x}$ und bestimme eine Konstante $M > 0$ derart, dass
$$|f(x) - T_2(x;0)| \le M|x|^3$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

9.19 Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^3 x(1-\cos x)}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}-2}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1-\cos x)}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^3}$.

9.20 Zur näherungsweisen Bestimmung von $\int_0^a f(x)\,dx$, $a > 0$, wird die Formel
$$I(f) = af(0) + \frac{1}{2}a^2 f'(0)$$
verwendet. Für $f \in C^2$ (mit beschränkten 2.Ableitungen) beweisen Sie die Fehlerabschätzung
$$\Big|\int_0^a f(x)\,dx - I(f)\Big| \le \frac{1}{6}a^3 \max_{x\in[0,a]} |f''(x)|.$$

9.21 Bestimmen Sie
$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

9.22 Man beweise die Ungleichungen $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x^k}{k!} < e^x$ für $x \ne 0$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k > \ln(1+x)$ für $x > -1$, $x \ne 0$.

10 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

10.1 Relative Extrema Eine Funktion f sei in einer Umgebung des Punktes ξ definiert. ξ heißt *relatives Minimum* von f, wenn es eine Umgebung U von ξ gibt mit $f(\xi) \le f(x)$ für alle $x \in U$. In einem *relativen Maximum* gilt analog $f(\xi) \ge f(x)$. Ein Minimum oder Maximum heißt *strikt*, wenn statt $\le$ oder $\ge$ die strikte Ungleichung gilt. Zu beachten ist bei dieser Definition, dass f mindestens in einem Intervall $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ definiert sein muss. Liegt der Extremwert am Rande des Definitionsbereichs von f, so sprechen wir von einem *einseitigen* Minimum oder Maximum.

Satz [Notwendige Bedingungen für einen Extremwert] Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ besitze in $\xi \in (a,b)$ ein relatives Minimum oder Maximum.

(a) Ist $f \in C^1$, so gilt $f'(\xi) = 0$.

(b) Ist $f \in C^2$, so gilt zusätzlich

$$f''(\xi) \ge 0 \ \text{ falls } \xi \text{ Minimum}, \quad f''(\xi) \le 0 \ \text{ falls } \xi \text{ Maximum}.$$

Beweis: (a) Sei ξ ein relatives Minimum. Für $h > 0$ gilt dann

$$\frac{1}{h}(f(\xi + h) - f(\xi)) \ge 0, \quad \frac{1}{-h}(f(\xi - h) - f(\xi)) \le 0.$$

Durch Grenzübergang folgt $f'(\xi) = 0$.

(b) Für ein relatives Minimum ξ gilt nach (a) $f'(\xi) = 0$. Die Taylor-Entwicklung für $n = 1$ lautet daher

$$f(x) = f(\xi) + \frac{1}{2}f''(a)(x - \xi)^2, \quad a \in (x, \xi),$$

daher

$$0 \le f(x) - f(\xi) = \frac{1}{2}f''(a)(x - \xi)^2, \quad a \in (x, \xi).$$

Für eine Folge (x_n) mit $x_n \to \xi$ folgt für die zugehörigen a_n, dass $a_n \to \xi$. Wegen der Stetigkeit von f'' erhalten wir $f''(\xi) \ge 0$. $\square$

Satz [Hinreichende Bedingung für einen Extremwert] Für die Funktion $f \in C^2(a,b)$ seien in $\xi \in (a,b)$ die Bedingungen $f'(\xi) = 0$ sowie $f''(\xi) > 0$ ($f''(\xi) < 0$) erfüllt. Dann besitzt f in ξ ein striktes relatives Minimum (Maximum).

Beweis: Ähnlich wie im Beweis von Satz 10.1(b) bekommen wir aus der Taylorentwicklung um den Punkt ξ wegen $f'(\xi) = 0$,

$$f(x) - f(\xi) = \frac{1}{2}f''(a)(x - \xi)^2, \quad a \in (x, \xi).$$

Ist nun $f''(\xi) > 0$, so ist wegen der Stetigkeit von f'' auch $f''(a) > 0$ für alle a in einer genügend kleinen Umgebung von ξ. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Bei einseitigen Extremwerten gibt es nur notwendige und hinreichende Bedingungen erster Ordnung, also nur für die erste Ableitung von f. Besitzt $f \in C^1([a,b])$ ein Minimum an der Stelle a, so folgt für $h > 0$ $f(a + h) - f(a) \ge 0$ und damit $f'(a) \ge 0$. Gilt $f'(a) > 0$, so folgt aus dem Differenzenquotienten, dass f in a ein striktes relatives Minimum besitzt. Zu beachten ist dabei, dass die Vorzeichen für den rechten Randpunkt sich umkehren.

Bei der Bestimmung der globalen Extremwerte einer differenzierbaren Funktion sind alle Nullstellen der ersten Ableitungen und die Randpunkte zu untersuchen, bei unbeschränktem Definitionsbereich zusätzlich das Verhalten im Unendlichen.

Beispiel Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad \text{in } I = (-1, \infty).$$

Es gilt für $x > -1$

$$f'(x) = \frac{2x}{x+1} - \frac{x^2}{(x+1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x(x+1) - x^2 = 0$$

mit einziger Lösung $x = 0$ in I. Da $f' < 0$ in $(-1, 0)$ und $f' > 0$ in $(0, \infty)$, ist f ist streng monoton fallend in $(-1, 0)$ und streng monoton wachsend in $(0, \infty)$. $x = 0$ ist daher das globale Minimum. Klar ist $\lim_{x\to -1+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

10.2 Die Regeln von de l'Hospital Hier betrachten wir zwei Funktionen f und g, die in Umgebung eines Punktes ξ definiert sind, wobei für ξ auch $\pm\infty$ zugelassen ist. Wir nehmen an, dass die Grenzwerte für $x \to \xi$ existieren, also $f(\xi) \to \alpha$, $g(x) \to \beta$. Aus den Rechenregeln für Zahlenfolgen folgt, dass $\lim f(x)/g(x) = \alpha/\beta$, sofern α/β eine Zahl ist. Klar ist auch der Fall $\alpha \neq 0$ und $\beta = 0$, $g \geq 0$, weil dann $f(x)/g(x) \to \operatorname{sign}(\alpha)\infty$. Aber was passiert in den Fällen $\alpha = \beta = 0$ und $\alpha = \beta = \infty$? Wir sprechen dann von unbestimmten Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$. Hier kommt es offenbar darauf an, wie schnell die Funktionen gegen 0 bzw. gegen ∞ konvergieren.

Satz [de l'Hospital] Liegt für die differenzierbaren Funktionen f und g ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ vor, so gilt

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern $g'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von ξ und der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Zunächst sei $\xi \in \mathbb{R}$ und $f(\xi) = g(\xi) = 0$. Dann folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz 8.5

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{f'(\xi')}{g'(\xi')}, \quad \xi' \in (x, \xi).$$

Wegen $\xi' \to \xi$ für $x \to \xi$ folgt die Behauptung.

Im Falle $\xi = \infty$ verwenden wir die Transformation $x = \frac{1}{t}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{d}{dt} f(\frac{1}{t})}{\frac{d}{dt} g(\frac{1}{t})}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{-f'(\frac{1}{t})t^{-2}}{-g'(\frac{1}{t})t^{-2}} = \lim_{t\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Diese zunächst nur formal gültige Beziehung ist korrekt, wenn man sie von rechts nach links liest.

Nun sei wieder $\xi \in \mathbb{R}$ und $f(x), g(x) \to \infty$ für $x \to \xi$. Sei

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \in \mathbb{R}.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung U von ξ mit

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - a \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in U.$$

Für $x, y \in U$ gilt damit nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - a \right| < \varepsilon. \tag{10.1}$$

In der Beziehung

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{(g(x) - g(y))\, f(x)}{(f(x) - f(y))\, g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}$$

halten wir $y \neq \xi$ fest. Beim Grenzübergang $x \to \xi$ konvergiert der zweite Bruch auf der rechten Seite gegen 1. Für x in einer genügend kleinen Umgebung von ξ gilt dann

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}\right| < \varepsilon.$$

Zusammen mit (10.1) folgt $f(x)/g(x) \to a$. Der Fall $\xi = \pm\infty$ wird wie im ersten Teil des Beweises behandelt. □

Beispiele (i) Bei $x^\alpha \ln x$, $\alpha > 0$, liegt ein unbestimmter Ausdruck der Form $0 \cdot \infty$ für $x \to 0$ vor. Dieser läst sich leicht auf einen bekannten Fall zurückführen

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha\frac{1}{x^{\alpha+1}}} = 0.$$

Wir haben damit einen alternativen Beweis für die Tatsache kennengelernt, dass der Logarithmus langsamer gegen unendlich geht als jede Wurzel gegen Null.

(ii) Oft muss die Hospitalsche Regel mehrfach ausgeführt werden, um zum Erfolg zu kommen, wie in

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sinh x}\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{(\sinh x - x)'}{(x \cdot \sinh x)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\cosh x - 1)'}{(x \cosh x + \sinh x)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sinh x}{x \sinh x + 2\cosh x} = 0.$$

(iii) Bei Ausdrücken der Form 1^∞ geht man zum Logarithmus über. Um beispielsweise $\lim_{x\to 1+} x^{1/(x-1)}$ zu untersuchen, verwenden wir

$$\lim_{x\to 1+} \ln x^{1/(x-1)} = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1,$$

daher $\lim_{x\to 1+} x^{1/(x-1)} = e$.

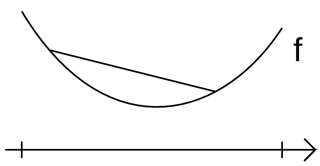
Vor allem bei Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$ ist die in Abschnitt 9.9 vorgestellte Untersuchungsmethode mit Hilfe der Taylorentwicklung meist einfacher. Nehmen wir als Beispiel den Ausdruck $f(x)h(x)/g(x)$ mit $f(x), g(x) \to 0$ und $h(x) \to 1$ für $x \to 0$, so ist klar, dass der Grenzwert nicht von Ableitungen von h abhängt. Bei unverständiger Anwendung der Hospitalschen Regel wird man dagegen die Ableitungen von fh nach der Produktregel bestimmen. Dagegen schreibt man bei Verwendung der Taylorentwicklung $h(x) = 1 + O(x)$ und sieht sofort, dass der Term $O(x)$ ohne Belang ist.

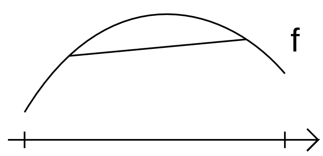
10.3 Konvexität und elementare Ungleichungen

Eine auf einem Intevall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion f heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in I$ und $t \in [0,1]$ gilt

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.





Die Menge $\{z = ta + (1-t)b,\ t \in [0,1]\}$ parametrisiert die Strecke mit Endpunkten a und b. Bei einer konvexen Funktion liegt daher jede Sekante oberhalb des Graphen von f, wie im Bild links zu sehen ist. Das rechte Bild zeigt eine konkave Funktion.

Sind $x_1,\ldots,x_k \in I$ und $t_1,\ldots,t_k \in \mathbb{R}$ mit $0 \le t_i \le 1$ und $\sum_i t_i = 1$, so heißt $\sum_i t_i x_i$ *Konvexkombination* der x_i.

Satz Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle Konvexkombinationen $\sum_i t_i x_i$, $x_i \in I$, gilt

$$f\Big(\sum_{i=1}^k t_i x_i\Big) \le \sum_{i=1}^k t_i f(x_i).$$

Beweis: Für konvexes f ist die Behauptung für $k = 2$ erfüllt. Für $k > 2$ verwenden wir Induktion über k. Für eine Konvexkombination $\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i$ können wir $0 < t_{k+1} < 1$ annehmen. Der Punkt

$$y = \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{1-t_{k+1}} x_i$$

wird durch eine Konvexkombination aus k Punkten dargestellt. Aus der Definition der Konvexität und der Induktionsvoraussetzung für k folgt

$$f\Big(\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i\Big) = f\Big((1-t_{k+1})y + t_{k+1}x_{k+1}\Big) \le (1-t_{k+1}) f\Big(\sum_{i=1}^k \frac{t_i}{1-t_{k+1}} x_i\Big) + t_{k+1} f(x_{k+1}) \le \sum_{i=1}^{k+1} t_i f(x_i)$$

□

Satz Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f \in C^2(I)$ ist genau dann konvex (konkav), wenn $f''(x) \ge 0$ ($f''(x) \le 0$) für alle $x \in I$.

Beweis: Für $x_0 \in I$ liefert der Satz von Taylor für $n = 1$

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2, \quad \xi \in (x_0, x).$$

Ist f konvex, so ist die linke Seite nichtnegativ, weil die Tangente $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ einer konvexen Funktion unterhalb ihres Graphen liegt. Division durch $(x-x_0)^2$ und Grenzübergang $x \to x_0$ zeigt $f''(x_0) \ge 0$. Die umgekehrte Richtung folgt analog. □

Demnach ist der Logarithmus wegen $\ln''(x) = -x^{-2} < 0$ in seinem Definitionsbereich konkav.

Die *Youngsche Ungleichung mit* ε

$$ab \le \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2 \quad \forall a, b \ge 0,\ \varepsilon > 0, \tag{10.2}$$

läßt sich mit der binomischen Formel beweisen. Die *verallgemeinerte Youngsche Ungleichung*

$$ab \le \frac{1}{p}\varepsilon^p a^p + \frac{1}{q}\varepsilon^{-q} b^q \quad \forall a, b \ge 0,\ \varepsilon > 0, \tag{10.3}$$

mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p, q < \infty$, beweist man für $a, b > 0$, indem man ausnutzt, daß der Logarithmus monoton und konkav ist. (10.3) erhält man aus

$$\ln\big(\frac{1}{p}\varepsilon^p a^p + \frac{1}{q}\varepsilon^{-q} b^q\big) \ge \frac{1}{p}\ln(\varepsilon^p a^p) + \frac{1}{q}\ln(\varepsilon^{-q} b^q) = \ln(ab).$$

Für die *Ungleichung des geometrischen und des arithmetischen Mittels*

$$\big(\prod_{i=1}^n a_i\big)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i, \quad a_i > 0, \tag{10.4}$$

gibt es eine Vielzahl von Beweisen. Am elegantesten nutzt man die Monotonie des natürlichen Logarithmus ln aus, (10.4) ist äquivalent zu

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i \leq \ln\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\Big).$$

Diese Ungleichung ist richtig, weil der Logarithmus konkav ist.

Aufgaben

10.1 Sei $f \in C^{2k}(I)$, $I = (a-\delta, a+\delta)$, für $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Zeigen Sie: Ist $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(2k-1)}(a) = 0$, und $f^{(2k)}(a) > 0$ ($f^{(2k)}(a) < 0$), so besitzt f in a ein striktes lokales Minimum (Maximum).

10.2 Für die folgenden Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ bestimme man: Die eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwerte von f an den beiden Intervallgrenzen von I; die Teilintervalle, in denen f monoton ist; die lokalen Minima und Maxima von f. Skizzieren Sie f!

a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,dt$, $I = (0, \pi^{-1})$ ($\lim_{x\to\pi^{-1}} f(x)$ braucht nicht bestimmt zu werden),

b) $f(x) = x^x$, $I = (0, \infty)$.

10.3 Man bestimme die folgenden Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}(\tan x)^{\tan 2x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\ln(1+\sqrt{x^2+1})-\ln x)$.

Literatur

[1] Courant, R. - Robbins, H.: Was ist Mathematik? Springer Verlag, Berlin 1967

[2] Königsberger, K.: Analysis I, Springer Verlag, Berlin 1992

[3] Walter, W.: Analysis I, Springer Verlag, Berlin 1997