9 Das Eigenwertproblem und die Jordansche Normalform

9.1 Das Eigenwertproblem

Ähnliche Matrizen Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, wenn es eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt mit

$$A = T^{-1}BT. \tag{9.1}$$

Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der $(n \times n)$-Matrizen. Wegen $A = E_nAE_n$ ist A zu sich selber ähnlich. In der Definition (9.1) wurde implizit die Symmetrie der Ähnlichkeit vorausgesetzt. Wir können aber in (9.1) nach B auflösen, $B = TAT^{-1}$, also ist auch B zu A ähnlich. Ist A zu B und B zu C ähnlich, so

$$A = T^{-1}BT,\ B = T'^{-1}CT' \ \Rightarrow A = T^{-1}T'^{-1}CT'T = (T'T)^{-1}C(T'T).$$

Nullstellen von Polynomen Sei

$$p(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0$$

ein Polynom vom Grad n. Wir sagen, q besitzt in x_0 eine Nullstelle der *Vielfachheit* k, wenn es ein Polynom q vom Grade $n-k$ gibt mit

$$p(x) = (x - x_0)^k q(x) \quad \text{mit } q(x_0) \neq 0. \tag{9.2}$$

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen gerade n ergibt. Im Reellen ist dieser Satz nicht richtig, wie das Polynom $p(x) = x^2 + 1$ beweist, das im Reellen keine Nullstellen besitzt.

In (9.2) können wir aufgrund dieses Fundamentalsatzes auch die $n-k$ Nullstellen von q ausklammern. Sind $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen von p, die hier nicht alle verschieden sein müssen, so können wir schreiben

$$p(x) = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_n). \tag{9.3}$$

Wir betrachten Eigenwertprobleme nur über dem Körper $\mathbb{C}$. Wenn eine Matrix reellwertig ist, ist sie auch eine Matrix über $\mathbb{C}$.

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A, wenn

$$Ax = \lambda x \quad \text{für ein } x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

x ist dann *Eigenvektor* zu λ. Insbesondere ist $U = \operatorname{span}\{x\}$ ein *invarianter Raum*, d.h. $AU \subset U$.

λ ist genau dann Eigenwert, wenn die Matrix $A - \lambda E_n$ singulär ist und damit das *charakteristische Polynom* von A

$$\phi(\mu) = \det(A - \mu E_n)$$

in λ eine Nullstelle besitzt.

Die Größe

$$\sigma(\lambda) = \text{Vielfachheit der Nullstelle } \lambda \text{ in } \phi$$

heißt *algebraische Vielfachheit* von λ. Nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten ist die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte n. Der Vektorraum

$$L(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\}$$

heißt *Eigenraum* zu λ. Ferner heißt

$$\rho(\lambda) = \dim L(\lambda)$$

geometrische Vielfachheit von λ. $\rho(\lambda)$ ist die Zahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu λ.

Satz 9.1 (a) *Ist $p(\mu)$ ein Polynom und gilt $Ax = \lambda x$ für ein $x \neq 0$, so besitzt $p(A)$ ebenfalls den Eigenvektor x zum Eigenwert $p(\lambda)$.*

(b) *λ ist genau dann Eigenwert von A, wenn $\overline{\lambda}$ Eigenwert von $\overline{A}$ ist. Insbesondere: Ist die Matrix A reellwertig, so ist mit einem komplexen Eigenwert λ von A auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A.*

(c) *A und A^T besitzen die gleichen Eigenwerte.*

(d) *Die Determinante von A stimmt mit dem Produkt aller Eigenwerte von A überein.*

(e) *Ähnliche Matrizen besitzen das gleiche charakteristische Polynom, also auch die gleichen Eigenwerte. Wenn*

$$B = T^{-1}AT$$

und A besitzt den Eigenwert λ mit Eigenvektor x, so besitzt B den Eigenwert λ mit Eigenvektor $T^{-1}x$.

Beweis: (a) Aus $Ax = \lambda x$ folgt $A^k x = \lambda^k x$ und

$$p(A)x = a_m A^m x + \ldots + a_0 x = p(\lambda)x.$$

(b) Nach Satz 7.14(b) gilt

$$\det(\overline{A} - \overline{\lambda}E_n) = \overline{\det(A - \lambda E_n)}.$$

(c) Das folgt aus 7.14(c)

(d) In

$$\phi(\mu) = \det(A - \mu E_n) = (-1)^n(\mu - \lambda_1)\ldots(\mu - \lambda_n)$$

(vergleiche (9.3)) setze man $\mu = 0$.

(e) Mit dem Determinantenmultiplikationssatz folgt

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda E_n) &= \det(T^{-1}AT - \lambda E_n) = \det\left(T^{-1}(A - \lambda E_n)T\right)\\ &= \det T^{-1}\det(A - \lambda E_n)\det T = \det(A - \lambda E_n).\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$BT^{-1}x = T^{-1}Ax = T^{-1}(\lambda x) = \lambda T^{-1}x.$$

□

Beispiel 9.2 Das Jordan-Kästchen der Länge ν zum Eigenwert λ ist definiert durch

$$C_\nu(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}. \tag{9.4}$$

Wegen

$$\det(C_\nu(\mu) - \lambda E_n) = (\mu - \lambda)^\nu$$

ist λ Eigenwert mit $\sigma(\lambda) = \nu$, aber $x = e_1$ ist einziger Eigenvektor von C_ν, also $\rho(\lambda) = 1$. □

Damit ist gezeigt, dass algebraische und geometrische Vielfachheit nicht übereinstimmen müssen. Es gilt aber $\rho(\lambda) \leq \sigma(\lambda)$.

9.2 Die Jordansche Normalform Es sei an die Definition des Jordan-Kästchens $C_\nu(\lambda)$ in (9.4) erinnert.

Satz 9.3 *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ seien die Eigenwerte von A mit geometrischen bzw. algebraischen Vielfachheiten $\rho(\lambda_i)$ und $\sigma(\lambda_i)$. Zu jedem λ_i gibt es Zahlen $\nu_1^{(i)}, \ldots, \nu_{\rho(\lambda_i)}^{(i)}$ mit*

$$\sigma(\lambda_i) = \nu_1^{(i)} + \ldots + \nu_{\rho(\lambda_i)}^{(i)}$$

und eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $J = T^{-1}AT$,

$$J = \begin{pmatrix} C_{\nu_1^{(1)}}(\lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ & & C_{\nu_{\rho(\lambda_1)}^{(1)}}(\lambda_1) & & & \\ & & & C_{\nu_1^{(2)}}(\lambda_2) & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & C_{\nu_{\rho(\lambda_k)}^{(k)}}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

J ist bis auf die Reihenfolge der Jordan-Kästchen eindeutig bestimmt.

Beweis: Der Beweis ist sehr aufwändig. □

Diagonalisierbare Matrizen Eine Matrix heißt *diagonalisierbar*, wenn für alle Eigenwerte λ_i gilt $\rho(\lambda_i) = \sigma(\lambda_i)$. Wenn man dann mehrfache Eigenwerte auch mehrfach zählt, folgt wegen $\nu_j^{(i)} = 1$,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Anders ausgedrückt: Im diagonalisierbaren Fall gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und die Matrix T hat die Gestalt

$$T = (x_1| \ldots |x_n).$$

Beispiel 9.4 Wir bestimmen die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)^2 - 1\cdot 2(2-\lambda) = (2-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda) - 2\big) \\ &= (2-\lambda)(2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2) = (2-\lambda)\lambda(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Wir haben also die drei einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$.

Die Kernvektoren von $A - \lambda_i E_3$ bestimmen wir mit dem Gauß-Algorithmus.

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die ersten beiden Spaltenvektoren spannen das Bild auf. Wir setzen daher $x_3 = 1$ und erhalten aus $(A - 2E_3)x = 0$ für die anderen Komponenten $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_1 = -2$. Man kann hier noch die Probe machen:

$$Ax = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A - 0E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier spannen die Spalten 1 und 3 das Bild auf. Wir setzen daher $x_2 = 1$ und erhalten $x_3 = 0$ und $x_1 = -2$. Die Probe kann man leicht im Kopf durchführen.

$$A - 3E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie zuvor setzen wir $x_2 = 1$ und erhalten $x_3 = 0$, $x_1 = 1$.

Insgesamt erhalten wir eine Basis aus Eigenvektoren

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = T^{-1}AT.$$

□