7 Lineare Gleichungssysteme und Determinanten

7.1 Dreiecks- und Diagonalmatrizen Linke untere bzw. rechte obere *Dreiecksmatrizen* sind quadratische Matrizen der Gestalt

$$L = \begin{pmatrix} * & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & * & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} * & & & \\ & \ddots & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}.$$

Genauer heißt eine quadratische Matrix $L = (l_{ij})$ linke untere Dreiecksmatrix, wenn $l_{ij} = 0$ für $i < j$. $R = (r_{ij})$ heißt rechte obere Dreiecksmatrix, wenn $r_{ij} = 0$ für $i > j$.

Der Raum der linken unteren bzw. rechten oberen Dreiecksmatrizen ist abgeschlossen gegenüber allen bisher definierten Operationen. Sind L_1, L_2 linke untere Dreiecksmatrizen gleicher Dimension und $\alpha \in \mathbb{K}$, so sind auch

$$L_1 + L_2, \quad \alpha L, \quad L_1 L_2, \quad L_1^{-1} \text{ falls } L_1 \text{ regulär},$$

linke untere Dreiecksmatrizen.

Lemma 7.1 *Eine rechte obere (linke untere) Dreiecksmatrix ist genau dann regulär, wenn $r_{ii} \neq 0$ ($l_{ii} \neq 0$) für alle $1 \leq i \leq n$.*

Beweis: Wir zeigen das nur für eine rechte obere Dreiecksmatrix. Ist $r_{11} = 0$, so ist die erste Spalte Null und die Matrix besitzt e_1 als nichttrivialen Vektor im Kern. Sind $r_{11}, \ldots, r_{kk} \neq 0$, aber $r_{k+1\,k+1} = 0$, so sind die Spaltenvektoren $r_1, \ldots, r_{k+1}$ l.a., denn diese Vektoren liegen de facto in einem $\mathbb{K}^k$, wenn man nur die oberen k Komponenten betrachtet.

Die umgekehrte Richtung beweisen wir in Beispiel 7.4. □

Quadratische Matrizen $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$ heißen *Diagonalmatrizen*. Wir schreiben auch kurz $\operatorname{diag} D = (d_1, \ldots, d_n)$, geben also nur die Elemente auf der Hauptdiagonalen an, z.B.:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \operatorname{diag} D = (d_1, d_2, d_3).$$

Auch der Raum der Diagonalmatrizen ist abgeschlossen gegenüber Addition, Skalarmultiplikation und Matrizenmultiplikation. Das letzte Lemma gilt auch für Diagonalmatrizen, sind diese doch gleichzeitig rechte obere und linke untere Dreiecksmatrizen.

7.2 Problemstellung Ein lineares Gleichungssystem (LGS) über einem Körper $\mathbb{K}$ besteht aus einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{K}^m$, der rechte Seite genannt wird. Gesucht wird ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$Ax = b \tag{7.1}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Die Gleichungen müssen alle erfüllt sein, nur dann sprechen wir davon, dass das LGS lösbar ist.

Satz 7.2 (a) *Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn* $b \in \operatorname{Bild} A$.

(b) *Dies ist genau dann der Fall, wenn*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b),$$

wobei die Matrix $(A|b) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ *von der Form* $(a_1|\ldots|a_n|b)$ *ist. Die Spalten von* A *werden durch* b *als Spalte* $n+1$ *ergänzt.*

(c) *Ist das Gleichungssystem lösbar, so ist die Lösungsmenge von der Form* $x + \operatorname{Kern} A$*, wobei* x *eine beliebige Lösung von* $Ax = b$ *ist.*

Beweis: (a) Das Gleichungssystem wird durch eine Linearkombination der Form $\sum_{i=1}^n x_i a_i = b$ gelöst, wobei $a_i \in \mathbb{R}^m$ die Spaltenvektoren von A bezeichnen. Dies ist aber gleichbedeutend damit, dass $b \in \operatorname{Bild} A$ ist.

(b) Werden die Spaltenvektoren um den Vektor b ergänzt, dann vergrößert er $\operatorname{span}\{a_1,\ldots,a_n\}$ oder er tut das nicht. Im ersten Fall ist $\dim \operatorname{Bild}(A|b) > \dim \operatorname{Bild} A$, also $\operatorname{rang}(A|b) > \operatorname{rang} A$, und b liegt nicht in $\operatorname{Bild} A$. Im zweiten Fall ist $\operatorname{rang}(A|b) = \operatorname{rang} A$ und b liegt in $\operatorname{Bild} A$.

(c) Wir können auf eine Lösung x einen beliebigen Vektor $y \in \operatorname{Kern} A$ addieren und es gilt $A(x+y) = Ax + Ay = b$. Haben wir zwei Lösungen x, x', also $Ax = Ax' = b$, so folgt $A(x - x') = 0$. Damit unterscheiden sich zwei Lösungen nur um einen Vektor im Kern. Die Lösungsmenge ist von der Form $x + \operatorname{Kern} A$ wie angegeben. □

Korollar 7.3 *Das LGS (7.1) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) = n = \textit{Anzahl der Spalten von } A.$$

Beweis: Das erste Gleichheitszeichen ist das Lösbarkeitskriterium aus dem letzten Satz. Wenn $\operatorname{rang} A = n$, so folgt aus der Rangformel (6.2), dass $\dim \operatorname{Kern} A = 0$, also $\operatorname{Kern} A = \{0\}$. □

7.3 Der Gauß-Algorithmus Im Folgenden ist immer $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$ und zu lösen ist das LGS $Ax = b$ für $x \in \mathbb{K}^n$. Die Idee des Algorithmus besteht darin, durch Umformungen mittels regulärer Matrizen $B_i \in \mathbb{K}^{m\times m}$ das LGS auf eine einfachere Gestalt zu bringen. Es gilt ja

$$Ax = b \quad\Leftrightarrow\quad B_i A x = B_i b,$$

die Lösungsmenge ändert sich nicht, sofern die Matrizen B_i regulär sind.

Ziel der Umformungen ist es, eine *Zeilenstufenform* (ZSF) für die umgeformte Matrix zu erreichen. Dabei liegt eine Matrix in ZSF vor, wenn für alle $i = 1, \ldots, m-1$ gilt:

Zeile $i+1$ *besitzt mehr führende Nullen als Zeile* i*, es sei denn, dass Zeile* i *eine Nullzeile ist. In diesem Fall muss auch Zeile* $i+1$ *eine Nullzeile sein.*

Beispiele 7.4 In den folgenden beiden Beispielen von ZSF-Matrizen bezeichnen wir mit $*$ ein Element $\neq 0$ und mit a ein beliebiges Element.

$$A = \begin{pmatrix} * & a & a & a \\ 0 & a & * & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} * & a & a \\ 0 & * & a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

In der Matrix A ist $a_{11} \neq 0$. Da alle anderen Zeilen mehr führende Nullen besitzen müssen, verschwindet die ganze erste Spalte unterhalb von a_{11}.

Die Lösung von $Rx = b$ bestimmt man von unten nach oben, beginnt also mit der n-ten Gleichung $r_{nn}x_n = b_n$. Daraus bestimmt man $x_n = b_n/r_{nn}$ und setzt diesen Wert in die oberen Gleichungen ein. Dann geht man zur Gleichung $n-1$ und bestimmt daraus x_{n-1}. Wir können daher immer eindeutig lösen, was den Beweis von Lemma 7.1 komplettiert. □

Beim Gauß-Algorithmus für quadratische Matrizen erreicht man immer eine solche rechte obere Dreiecksmatrix, wenn die Ausgangsmatrix regulär ist. Aus dem hier beschriebenen Verfahren zur Lösung von $Rx = b$ wird klar, dass man bei einer allgemeinen Matrix in ZSF ähnlich verfahren kann, was diese Form erstrebenswert macht.

Wir besprechen nun die zwei Typen von Äquivalenzumformungen, die im Gauß-Algorithmus benötigt werden:

Typ I: Vertauschung zweier Zeilen i und j, wird geleistet mit der Multiplikation von links mit der *Permutationsmatrix*

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} E_{i-1} & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & E_{j-i-1} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & E_{m-i} \end{pmatrix}.$$

Anders ausgedrückt: In der Einheitsmatrix wird $d_{ii}, d_{jj} = 0$ gesetzt sowie $d_{ij} = d_{ji} = 1$. P_{ij} ist regulär, weil die Spalten von P_{ij} aus den kanonischen Einheitsvektoren bestehen.

Typ II: Addition des α-fachen der Zeile j auf die Zeile $i > j$, wird geleistet durch Multiplikation von links mit der Matrix

$$G_{ij,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & \alpha & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \text{ an Position } i, j.$$

Als linke untere Dreiecksmatrix mit nichtverschwindenden Diagonalelementen ist $G_{ij,\alpha}$ nach Lemma 7.1 regulär.

Wir erläutern den Gauß-Algorithmus an Hand des Beispiels in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen simultan die beiden Gleichungssysteme $Ax_1 = b_1$, $Ax_2 = b_2$ lösen. Zur Durchführung des Gauß-Algorithmus schreiben wir die um die rechten Seiten erweiterte Matrix $(A|b_1|b_2) \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ auf:

$$(A|b_1|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array}\right).$$

Wir nehmen uns Spalte für Spalte vor, um im unteren Bereich der Spalte möglichst viele Nullen zu produzieren. Ist eine Spalte komplett Null, gehen wir zur nächsten über. Für die erste Spalte bedeutet diese Vorgehensweise, dass nach erfolgter Umformung höchstens $a_{11} \neq 0$ ist. In unserem konkreten Fall müssen wir Zeile 2 oder Zeile 3 mit Zeile 1 vertauschen. In einem endlichen Körper wäre es gleichgültig, welche Zeile wir vertauschen. Bei Rechnung in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ durch ein Computerprogramm fallen Rundungsfehler an. In diesem Fall soll man das betragsmäßig größte Element der Spalte nach oben bringen. Wir tun das auch hier (=Typ I) und erhalten die Matrix oben in der Mitte.

Im nächsten Schritt ziehen wir das 1/2-fache der ersten Zeile von der zweiten ab (=Typ II). Weil man das betragsgrößte Element zur Elimination genommen hat, hält man die Elemente klein, die auf die zweite Zeile addiert werden (Matrix oben rechts).

$$\text{(7.2)} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Da man die Nullen in der ersten Spalte erhalten möchte, wird nun mit dem zweiten Element in der zweiten Spalte eliminiert. Auch hier vertauschen wir die Zeile 2 mit 3, um das betragsgrößte Element nach oben zu bringen. Schließlich wird die zweite Spalte eliminiert, indem das $-1/2$-fache der zweiten Zeile auf die dritte Zeile addiert wird. Da in der neuen Matrix $a_{33} = 0$ gilt, besitzt die Matrix nur Rang 2 und die beiden ersten Spalten bilden eine Basis des Bildes.

Für das LGS $Ax_1 = b_1$ liegt die rechte Seite im Bild der ersten beiden Spaltenvektoren. Wir können daher $x_{1,3} = 0$ setzen und erhalten mit $x_{1,2} = x_{1,2} = 1$ eine Lösung. Wegen $\operatorname{rang} A = 2$ ist $\dim \operatorname{Kern} = 1$. Da die dritte Spalte von den ersten beiden abhängig ist, gilt $a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Wir finden daher eine Kernfunktion, indem wir mit $y_{h,3} = 1$ eine Lösung des homogenen Problems $Ay_h = 0$ bestimmen. Aus der zweiten Gleichung (mit rechter Seite 0) folgt $y_{h,2} = -2$ und aus der ersten schließlich $y_{h,1} = 4$. Der Lösungsraum ist daher

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Das Gleichungssystem $Ax_2 = b_2$ ist nach (7.2) unlösbar, weil einer Nullzeile das Element -1 auf der rechten Seite gegenübersteht.

In dem hier betrachteten Beispiel war die Sache natürlich sehr übersichtlich. Für kompliziertere Situationen verwendet man den folgenden Satz.

Satz 7.5 *Für eine ZSF-Matrix $Z \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt*

$$\operatorname{rang} Z = \textit{Anzahl der Zeilen mit nichtverschwindenden Elementen.}$$

Beweis: Wir streichen aus Z alle Zeilen, die aus lauter Nullen bestehen. Es verbleibt eine Matrix $Z' \in \mathbb{K}^{r \times n}$, die den gleichen Rang wie Z besitzt. Aus den Spalten von Z' wählen wir diejenigen aus, die ein nichtverschwindendes Element in einer Zeile haben, das führend in dieser Zeile ist, die zugehörige Zeile also von der Form $(0, \dots, 0, *, \dots)$ ist. $*$ ist dann das führende Element und die zugehörige Spalte wird ausgewählt. Es entsteht eine $(r \times r)$-Matrix Z'', die eine rechte obere Dreiecksmatrix ist mit nichtverschwindenden Elementen in der Haupdiagonalen. Diese Matrix ist regulär, also ist $\operatorname{rang} Z' \geq r$. Die $(r \times n)$-Matrix Z' kann aber höchstens Rang r haben, also ist $\operatorname{rang} Z' = r$. □

Beispiel 7.6 Wir betrachten in $\mathbb{Z}_2$ das lineare Gleichungssystem

$$Zx = \begin{pmatrix}1&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Z'' = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1&3&4\end{pmatrix}$$

Hier liegt die Systemmatrix Z bereits in ZSF vor, rechts ist die Matrix Z'' aus dem Beweis des letzten Satzes angegeben, zusammen mit der Spaltennnummer, die jeder Spaltenvektor in Z besitzt. Die führenden Einser liegen ja in der ersten Zeile in Spalte 1, in der zweiten Zeile in Spalte 3 und schließlich in der letzten Zeile in Spalte 4. Die Spalten der Matrix Z'' bilden eine Basis des Bildes. Im allgemeinen Fall ist das LGS bereits durch eine Linearkombination der Spalten von Z'' lösbar oder überhaupt unlösbar. Im vorliegenden Fall ist $\operatorname{rang} Z = \operatorname{rang} Z'' = 3$. Wir haben also Vollrang und das LGS ist für jede rechte Seite lösbar. Das LGS $Z''y = b$ besitzt die eindeutige Lösung $y = (0, 1, 1)^T$. Wir müssen nun noch beachten, zu welchen Spalten von Z die Komponenten dieses Vektors gehören, und wir erhalten mit $x = (0, 0, 1, 1, 0, 0)^T$ eine Lösung von $Zx = b$.

Nach der Rangformel benötigen wir drei linear unabhängige Kernfunktionen, die wir den Spaltenindizes von Z zuordnen, die nicht in Z' auftreten. In unserem Fall sind das $2, 5, 6$. Wir garantieren die lineare Unabhängigkeit der Kernfunktionen, indem wir eine dieser Komponenten $= 1$ setzen und die anderen $= 0$. Wir bringen die zugehörige Spalte von Z auf die andere Seite und lösen dann $Z'y_i = -z_i$ für $i = 2, 5, 6$. Damit haben wir die rechten Seiten und Lösungen (man beachte $1 + 1 = 0$)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow y_5 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow y_6 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge

$$\left\{ x = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{F}_2 \right\}$$

□

Viele weitere Probleme lassen sich mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen:

Testen auf linear Unabhängigkeit, Rangbestimmung Haben wir Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^m$ und wollen sie auf lineare Unabhängigkeit testen, so stellen wir sie zu einer $(m \times k)$-Matrix $V = (v_1|v_2|\ldots|v_k)$ zusammen. Wir bringen sie auf ZSF und bestimmen den Rang der zugehörigen ZSF-Matrix mit dem letzten Satz.

Inverse einer Matrix Wollen wir zu einer Matrix $\in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Inverse A^{-1} bestimmen, so führen wir den simultanen Gauß-Algorithmus mit Matrix A und rechten Seiten $e_1, \ldots, e_n$ durch. Die Lösungen v_i mit $Av_i = e_i$ stellen wir (wie immer als Spaltenvektoren) zur Matrix $A^{-1} = (v_1|\ldots|v_n)$ zusammen. Wie man aus der Regel Zeile mal Spalte erkennt, gilt nun in der Tat $AA^{-1} = E_n$.

Zeilenrang=Spaltenrang Wir bringen eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ auf ZSF, $Z = BA$ mit einer regulären $(m \times m)$-Matrix B.

$$Z = \begin{pmatrix} * & a & a & a & a \\ 0 & 0 & * & a & a \\ 0 & 0 & 0 & * & a \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad Z' = ZC = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

In der Beispielmatrix links bezeichnen die Sterne Elemente ungleich 0, die mit a bezeichneten Elemente sind beliebig. Wir arbeiten nun zeilenweise von oben nach unten und beginnen mit der ersten Zeile. Durch Addition eines Vielfachen der ersten Spalte auf die zweite Spalte erzielen wir auf der Position $(1, 2)$ eine Null. Dies ist aber gleichbedeutend mit der Multiplikation einer Matrix vom Typ II von rechts. Auf diese Weise erzeugen wir lauter Nullen rechts von $*$ in der ersten Zeile. Für die übrigen Zeilen verfahren wir genauso und erhalten schließlich die Matrix Z' rechts. Es gilt $Z' = ZC = BAC$ mit regulären Matrizen B, C, Nach Satz 6.13(b) haben Z' und A den gleichen Rang. Die Matrix Z'^T hat ebenfalls ZSF. Auch hier können wir Satz 7.5 anwenden. Wir haben bewiesen:

Satz 7.7 *Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt*

$$\operatorname{rang} A = \textit{Anzahl der l.u Zeilen von } A = \textit{Zeilenrang von } A,$$

oder anders ausgedrückt $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$.

7.4 Permutationen Eine *Permutation* π ist nach Abschnitt 2.4 eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auf sich selbst. Statt $\pi(i) = a_i \in \{1, \ldots, n\}$ schreiben wir kürzer $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und stellen uns dabei vor, dass wir die Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ auf die „Fächer“ $1, 2, \ldots, n$ verteilen.

Die Vertauschung zweier benachbarter Fächer nennen wir eine elementare Permutation. Jede Permutation lässt sich durch eine Folge elementarer Permutationen aus der Identität $(1, 2, \ldots, n)$ erzeugen. Wir bringen als erstes das Element a_1 an die erste Position und verfahren mit den folgenden Elementen genauso. Beispielsweise erzeugen wir $(2, 4, 1, 3)$ durch

$$(1,2,3,4) \ \to \ (2,1,3,4) \ \to \ (2,1,4,3) \ \to \ (2,4,1,3).$$

Die Anzahl der *Fehlstellen* einer Permutation π ist

$$F(\pi) = \big|\{(i,j) : i < j \text{ und } \pi(i) > \pi(j) \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\}\big|$$

Wie immer bezeichnen wir mit $|M|$ die Kardinalität der Menge M. Die Anzahl der Fehlstellen der Identität $(1, 2, \ldots, n)$ ist Null, die Anzahl der Fehlstellen der Permutation $(n, n-1, \ldots, 1)$ ist $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Das *Signum* oder *Vorzeichen* einer Permutation π ist

$$\operatorname{sign}(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } F(\pi) \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } F(\pi) \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Wir nennen eine Permutation gerade, wenn $\operatorname{sign}(\pi) = 1$, andernfalls ungerade. Jede Permutation lässt sich auf vielfältige Weise durch Hintereinanderschaltung von einfachen Permutationen, bei denen nur $\pi(i)$ und $\pi(j)$ vertauscht werden, erzeugen. Es ist interessant und zunächst gar nicht offensichtlich, dass man bei einer geraden Permutation immer eine gerade Zahl von einfachen Permutationen benötigt, um sie zu erzeugen. Jede einfache Permutation lässt sich nur durch eine ungerade Zahl von elementaren Permutationen erzeugen. Bei einer elementaren Permutation ändert sich die Anzahl der Fehlstellen um ± 1, gleiches gilt demnach auch für eine einfache Permutation.

7.5 Determinanten Die Determinante ist eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$. Historisch gesehen hat es verschiedene äquivalente Definitionen gegeben. Wir wählen hier die Leibnizsche Definition aus, mit der man die Determinante unmittelbar berechnen kann.

Wir definieren die Determinante durch

$$\det A = \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\pi(i)}. \tag{7.3}$$

In jedem einzelnen Summanden kommt aus jeder Zeile und jeder Spalte der Matrix nur ein Element vor.

Bei $n = 2$ gibt es nur zwei Permutationen, nämlich die Identität mit positivem Signum und die Vertauschung von 1 und 2 mit negativem Signum. Daher gilt für $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Für $n = 3$ haben wir die drei einfachen Permutationen mit negativem Signum $(1,3,2), (3,2,1), (2,1,3)$, die übrigen haben Signum 1, nämlich $(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)$. Für eine (3×3)-Matrix gilt daher

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Es gilt offenbar $\det E_n = 1$. Für eine rechte obere (oder linke untere) Dreiecksmatrix $R = (r_{ij})$ gilt

$$\det R = \prod_{i=1}^{n} r_{ii} \tag{7.4}$$

Das ist leicht einzusehen, weil nur Permutationen mit $\pi(1) = 1$ nichtverschwindende Werte liefern können. Bei $\pi(2)$ ist es ähnlich: $\pi(2) = 1$ ist durch $\pi(1)$ schon vergeben, bleibt also nur $\pi(2) = 2$, um etwas Nichtverschwindendes zu erreichen.

Für eine $(n \times n)$-Matrix A bezeichnen wir mit $A_{ij} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht.

Satz 7.8 (Entwicklungssatz von Laplace) *Die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ lässt sich mit den folgenden Formeln nach einer Zeile oder einer Spalte „entwickeln"*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\textit{Entwicklung nach der } i\textit{-ten Zeile})$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\textit{Entwicklung nach der } j\textit{-ten Spalte}).$$

Ein richtiger Satz ist das eigentlich nicht: Man stellt in der Leibnizschen Definition der Determinante nur fest, in welchen Summanden das Element a_{ij} vorkommt. Der Rechenaufwand zur Berechnung der Determinante nach der Laplace-Formel ist genauso gewaltig wie nach der Definition.

Für $n = 3$ erhalten wir bei Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\begin{aligned}\det A =& a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ =& a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).\end{aligned}$$

Sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^{n,1}$ die Spaltenvektoren von A, so schreiben wir $A = (a_1|a_2|\ldots|a_n)$

Satz 7.9 *Die Determinante ist eine* alternierende Multilinearform *in den Spalten von A. Das heißt:*

(a) *Ist $b \in \mathbb{K}^{n,1}$ ein beliebiger Spaltenvektor, so gilt*

$$\det(a_1|\ldots|a_{i-1}|a_i + b|a_{i+1}|\ldots) = \det A + \det(a_1|\ldots|a_{i-1}|b|a_{i+1}|\ldots).$$

(b) *Für $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt*

$$\det(a_1|\ldots|a_{i-1}|\alpha a_i|a_{i+1}|\ldots) = \alpha \det A.$$

(c) *Besitzt A zwei identische Spalten, so gilt* $\det A = 0$.

Beweis: (a) In der Definition der Determinante (7.3) kommt in jedem Summanden genau ein Element der i-ten Spalte vor. Wenn also die i-te Spalte durch $a_i + b$ ersetzt wird, ist dieses Element von der Form $a_{ij} + b_j$ und kann mit dem Distributivgesetz auseinandergezogen werden.

(b) Wird die i-te Spalte durch αa_i ersetzt, erscheint in jedem Summanden von (7.3) ein αa_{ij} an Stelle von a_{ij}. Dieses α kann daher aus der Summe ausgeklammert werden.

(c) Wir verwenden Induktion über n. Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig. Denn wenn $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ zwei identische Spalten besitzt, verschwindet ihre Determinante. Für den Schluss $n \to n + 1$ entwickeln wir die Determinante mit Satz 7.8 nach der ersten Zeile. Enthält $A_{1,l}$ die beiden identischen Spalten, so verschwindet ihre Determinante nach Induktionsvoraussetzung. Sind l, l' die beiden identischen Spalten, so besitzen $(-1)^{l+1} \det A_{l,1}$ und $(-1)^{l'+1} \det A_{l',1}$ entgegengesetztes Vorzeichen. □

Bemerkung 7.10 Die Determinante ist ebenso eine alternierende Multilinearform in den Zeilen der Matrix. Die Aussagen (a)-(c) im letzten Satz bleiben richtig, wenn man das Wort Spalte durch Zeile ersetzt. Die Beweise sind genauso einfach. □

Bemerkung 7.11 In einer alternierenden Multilinearform wechselt das Vorzeichen, wenn die Komponenten vertauscht werden. Entsteht A' aus A durch Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten, so gilt $\det A = -\det A'$. Zu beweisen brauchen wir dieses Prinzip nur für eine alternierende Multilinearform $a(v_1, v_2)$ in zwei Komponenten. Es gilt

$$0 = a(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = a(v_1 + v_2, v_1) + a(v_1 + v_2, v_2) = a(v_1, v_1) + a(v_2, v_1) + a(v_1, v_2) + a(v_2, v_2)$$
$$= a(v_2, v_1) + a(v_1, v_2)$$

□

Man beachte, dass bei αA das α in jeder Zeile erscheint, daher $\det \alpha A = \alpha^n \det A$.

Satz 7.12 (Multiplikationssatz für Determinanten) *Für $(n \times n)$-Matrizen A, B gilt $\det AB = \det A \cdot \det B$.*

Beweis: Seien $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$, $C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. Mit der Definition der Determinante gilt dann

$$\begin{aligned}
\det AB &= \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi) c_{1\,\pi(1)} \cdot \dots \cdot c_{n\,\pi(n)} \\
&= \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi) \Big(\sum_{j_1=1}^n a_{1\,j_1} b_{j_1\,\pi(1)} \Big) \dots \Big(\sum_{j_n=1}^n a_{1\,j_n} b_{j_n\,\pi(n)} \Big) \\
&= \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi) \sum_{1 \le j_1, \dots, j_n \le n} a_{1\,j_1} \dots a_{n\,j_n} b_{j_1\,\pi(1)} \dots b_{j_n\,\pi(n)} \\
&= \sum_{1 \le j_1, \dots, j_n \le n} a_{1\,j_1} \dots a_{n\,j_n} \cdot \left[\sum_\pi \operatorname{sign}(\pi) b_{j_1\,\pi(1)} \dots b_{j_n\,\pi(n)} \right]
\end{aligned}$$

Den Ausdruck in den eckigen Klammern können wir interpretieren als die Determinante der Matrix, die in der ersten Zeile die Zeile j_1 von B, in der zweiten Zeile die Zeile j_2 von B besitzt, oder allgemein: In der i-ten Zeile steht die Zeile j_i. Bezeichnen wir diese Matrix mit $B(j_1, \dots, j_n)$, so ist

$$\det AB = \sum_{1 \le j_1, \dots, j_n \le n} a_{1\,j_1} \dots a_{n\,j_n} \cdot \det B(j_1, \dots, j_n).$$

Nach Bemerkung 7.10 verschwindet $B(j_1, \dots, j_n)$ höchstens dann nicht, wenn die Zeilen paarweise verschieden sind. Daher brauchen wir die Summe nur über alle Permutationen der Zahlen $1, \dots, n$ zu erstrecken

$$\det AB = \sum_\pi a_{1\,\pi(1)} \dots a_{n\,\pi(n)} \cdot \det B(\pi(1), \dots, \pi(n)).$$

Die Matrix $B(\pi(1), \dots, \pi(n))$ geht aus einer Permutation der Zeilen von B hervor. Aus Bemerkung 7.11 wissen wir, dass

$$\det B(\pi(1), \dots, \pi(n)) = \operatorname{sign} \pi \det B.$$

Damit

$$\det AB = \sum_\pi a_{1\,\pi(1)} \dots a_{n\,\pi(n)} \cdot \operatorname{sign} \pi \det B. = \det A \cdot \det B.$$

□

Korollar 7.13 *Für eine reguläre Matrix gilt*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Beweis: Nach der Multiplikationsformel gilt

$$1 = \det E_n = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}.$$

□

Die beiden bisher vorgestellten Möglichkeiten zur Berechnung der Determinante, nämlich die Definition und der Entwicklungssatz von Laplace, benötigen $n!$ Summanden und kommen ab $n \geq 4$ kaum noch in Frage. Stattdessen lässt sich die Determinante sehr einfach aus dem Gaußschen Eliminationsverfahren bestimmen. Wir hatten dort die Matrix A durch eine Folge von Umformungen auf eine rechte obere Dreiecksmatrix gebracht. Genauer gibt es Permutationsmatrizen P_k und Eliminationsmatrizen G_k für $k = 1, \dots, n-1$ mit

$$R = G_{n-1}P_{n-1} \dots G_1P_1A \tag{7.5}$$

mit einer rechten oberen Dreiecksmatrix R. Mit der Matrix P_k wird die k-te Zeile mit einer anderen Zeile vertauscht oder es ist $P_k = E_n$, wenn keine Vertauschung notwendig ist. Die Anzahl der echten Vertauschungen sei l. G_k ist ein Produkt von Matrizen $G_{ik,\alpha}$, um die k-te Spalte zu eliminieren. Die $G_{i,k,\alpha}$ sind linke untere Dreiecksmatrizen mit lauter Einser in der Hauptdiagonalen, daher $\det G_k = 1$. Aus dem Multiplikationssatz für Determinanten und (7.5) folgt daher

$$\det A = (-1)^l \det R = (-1)^l \prod_{i=1}^{n} r_{ii}. \tag{7.6}$$

Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften der Determinante zusammen:

Satz 7.14 (a) *Eine Matrix ist genau dann regulär, wenn* $\det A \neq 0$.

(b) *Es gilt* $\det A = \det A^T$.

(c) *Ist* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *so* $\det \overline{A} = \overline{\det A}$.

(d) *Entsteht A' aus A, indem zwei Zeilen oder zwei Spalten von A vertauscht werden, so gilt* $\det A' = -\det A$.

Beweis: (a) folgt aus (7.6).

(b) folgt aus (7.5), indem man diese Formel transponiert.

(c) Das beweist man direkt aus der Definition. □

7.6 Adjunkte und Cramersche Regeln Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Wie im vorigen Abschnitt bezeichnen wir mit A_{ij} die Matrix in $\mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$, die aus der Matrix A hervorgeht, wenn wir die i-te Zeile und j-te Spalte streichen. Das Element

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

heißt (i, j)-ter Komplementärwert der Matrix A (A_{ji} ist kein Schreibfehler!). Die Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Heißt *Komplementärmatrix* oder *Adjunkte* zu A.

Lemma 7.15 *Es gilt*

$$\hat{A}A = A\hat{A} = \begin{pmatrix} \det A & & \\ & \ddots & \\ & & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E_n.$$

Beweis: Aus der Definition der $\hat{a}_{jk}$ erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{a}_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ij} \det A_{kj} = \det A',$$

wobei A' aus A hervorgeht, indem die k-te Zeile von A durch die i-te Zeile von A ersetzt wird. Das folgt aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz 7.8. Falls $k = i$, so wurde an der Matrix nichts verändert und es gilt $\det A' = \det A$. Andernfalls besitzt A' zwei gleiche Zeilen und ihre Determinante verschwindet nach Bemerkung 7.10. □

Satz 7.16 (Cramersche Regeln) *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär.*

(a) *Für die Inverse von A gilt*

$$A^{-1} = \frac{\hat{A}}{\det A}.$$

(b) *Für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gilt*

$$x_i = \frac{\det(a_1|\dots|a_{i-1}|b|a_{i+1}|\dots|a_n)}{\det A}.$$

Beweis: (a) Das folgt aus dem vorigen Lemma wegen $\det A \neq 0$.

(b) Es gilt

$$x = A^{-1}b = \frac{\hat{A}b}{\det A}.$$

Der i-te Eintrag von $\hat{A}b$ ist

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_j \det A_{ji}$$

und die letzte Summe ist gleich der behaupteten Determinante nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz. □

Die Cramerschen Regeln dienen theoretischen Zwecken, weil sie erlauben, die Inverse und die Lösung eines LGS geschlossen hinzuschreiben. Für $n > 2$ sind sie aber viel zu aufwendig.

Für $n = 2$ bekommt man für die Inverse eine Formel, die man auswendig können sollte,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\hat{A}}{\det A} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$